

Р. И. Ивановский

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

**ОСНОВЫ, ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ
С ПРИМЕРАМИ И ЗАДАЧАМИ В СРЕДЕ Mathcad**

Рекомендовано Санкт-Петербургским институтом информатики
и автоматизации Российской академии наук (СПИИРАН)
в качестве учебного пособия для студентов технических вузов.
Регистрационный номер 035 от 21 февраля 2008 г. МГУП

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2008

УДК 681.3.06 (075.8)
ББК 32.973.26-018.2я73
И22

Ивановский Р. И.

И22 Теория вероятностей и математическая статистика. Основы, прикладные аспекты с примерами и задачами в среде Mathcad. — СПб.: БХВ-Петербург, 2008. — 528 с.: ил. + CD-ROM — (Учебное пособие)

ISBN 978-5-9775-0199-6

В книге излагаются основы теории вероятностей (события, композиция независимых испытаний, случайные величины, основные законы распределения, предельные теоремы, векторные случайные величины, элементы теории случайных функций и процессов) и математической статистики (выборки и их распределения, точечные и интервальные оценки, проверка статистических гипотез, регрессионный и корреляционный анализ).

Приводятся рекомендации по решению типовых задач в среде Mathcad, предлагаются программные структуры Mathcad, которые могут быть использованы для организации и проведения практических занятий, в процессе научных исследований. Прилагаемый компакт-диск содержит 30-дневную полнофункциональную версию Mathcad 14, файлы решений задач и примеров, рассматриваемых в тексте, а также дополнительные материалы.

*Для студентов, аспирантов, преподавателей,
научных сотрудников и инженеров*

УДК 681.3.06(075.8)
ББК 32.973.26-018.2я73

Рецензенты:

Кафедра "Высшая математика" Санкт-Петербургского государственного политехнического университета (СПбГПУ), завкафедрой — д-р физ.-мат. наук, профессор В. И. Антонов;
А. Г. Петрашень, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры "Высшая математика" Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики (СПбГУ ИТМО).

Оригинал-макет подготовлен Р. И. Ивановским

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 04.03.08.

Формат 70×100¹/₁₆. Печать офсетная. Усл. печ. л. 42,57.

Тираж 2000 экз. Заказ №

"БХВ-Петербург", 194354, Санкт-Петербург, ул. Есенина, 5Б.

Санитарно-эпидемиологическое заключение на продукцию
№ 77.99.60.953.Д.002108.02.07 от 28.02.2007 г. выдано Федеральной службой
по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека.

Отпечатано с готовых диапозитивов

в ГУП "Типография "Наука"

199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 978-5-9775-0199-6

© Ивановский Р. И., 2008

© Оформление, издательство "БХВ-Петербург", 2008

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	8
ЧАСТЬ I. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.....	15
Глава 1. СОБЫТИЯ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ.....	15
1.1. Событие. Пространство элементарных событий.....	15
1.2. Действия над событиями и свойства действий.....	17
1.3. Алгебра событий.....	19
1.4. Вероятность.....	20
1.4.1. Аксиоматический подход	20
1.4.2. Классический подход	21
1.4.3. Статистический подход	21
1.4.4. Геометрический подход	23
1.5. Вычисление вероятностей.....	24
1.5.1. Некоторые соотношения комбинаторики.....	25
Глава 2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.....	28
2.1. Вероятность суммы событий. Сложение вероятностей.....	28
2.2. Независимые события. Вероятность их произведения.....	30
2.3. Условная вероятность. Вероятность произведения событий (общий случай).....	33
2.4. Формула полной вероятности. Формула Байеса.....	35
Глава 3. КОМПОЗИЦИЯ НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЙ.....	38
3.1. Композиция независимых испытаний при одинаковых вероятностях успеха	39
3.2. Композиция независимых испытаний при различных вероятностях успеха...	45
3.3. Применение схемы Пуассона для анализа надежности.....	51
3.4. Асимптотические приближения при повторении испытаний.....	53
3.4.1. Формула Пуассона.....	54
3.4.2. Локальная теорема Муавра—Лапласа.....	56
3.4.3. Интегральная теорема Лапласа.....	58
Глава 4. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ.....	61
4.1. Общие положения.....	61
4.2. Дискретные случайные величины.....	62
4.3. Непрерывные случайные величины.....	65
4.4. Числовые характеристики случайных величин.....	70
4.5. Числовые характеристики положения (математическое ожидание, квантиль, медиана, мода).....	71
4.5.1. Свойства математического ожидания случайной величины.....	73
4.6. Числовые характеристики рассеивания (дисперсия, коэффициент вариации).....	77
4.6.1. Свойства дисперсии случайной величины.....	78
4.7. Числовые характеристики формы (асимметрия, эксцесс).....	79
4.8. Теоретические моменты распределения.....	81
4.9. Характеристические и производящие функции.....	86
4.9.1. Характеристические функции.....	86

4.9.2. Свойства характеристических функций.....	87
4.9.3. Производящие функции моментов.....	89
4.9.4. Свойства производящих функций моментов.....	89
Глава 5. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ИХ СВОЙСТВА.....	93
5.1. Равномерное распределение.....	93
5.2. Нормальное распределение.....	95
5.3. Показательное распределение.....	101
5.4. Биномиальное распределение.....	104
5.5. Распределение Пуассона.....	106
5.6. Геометрическое распределение.....	110
5.7. Распределение функции одного случайного аргумента.....	112
5.7.1. Аргумент X — дискретная случайная величина.....	113
5.7.2. Аргумент X — непрерывная случайная величина.....	114
Глава 6. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ.....	120
6.1. Основные положения.....	120
6.2. Неравенство Чебышева.....	121
6.3. Теорема Бернулли.....	123
6.4. Теорема Чебышева.....	124
6.5. Центральная предельная теорема.....	126
Глава 7. ВЕКТОРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ (ВСВ).....	129
7.1. Дискретные случайные векторы.....	130
7.2. Функция распределения векторной случайной величины.....	134
7.2.1. Свойства двумерной функции распределения.....	135
7.3. Непрерывные случайные векторы. Плотность распределения векторной случайной величины.....	137
7.4. Числовые характеристики векторных случайных величин. Зависимость и независимость случайных величин.....	142
7.5. Математическое ожидание векторной случайной величины.....	147
7.5.1. Свойства математического ожидания векторной случайной величины... ..	148
7.6. Вторые моменты векторных случайных величин. Коэффициент корреляции. Ковариационные и корреляционные матрицы.....	149
7.6.1. Линейные преобразования ВСВ.....	158
7.7. Условные законы распределения. Функция регрессии.....	163
7.8. Законы распределения нескольких случайных величин. Двумерный нормальный закон распределения. Эллипсы рассеивания.....	172
7.9. Плотность распределения суммы случайных величин. Композиция законов распределений.....	181
Глава 8. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ И ПРОЦЕССОВ.....	186
8.1. Основные понятия.....	186
8.2. Числовые характеристики случайных функций.....	189
8.2.1. Математическое ожидание случайной функции.....	189
8.2.2. Дисперсия случайной функции.....	190
8.2.3. Корреляционная функция.....	190
8.3. Векторные случайные функции и их числовые характеристики.....	191
8.3.1. Линейные формы случайных функций.....	194
8.4. Стационарные случайные функции и их числовые характеристики.....	197

8.4.1. Свойства корреляционных функций стационарных случайных функций	198
8.4.2. Спектральная плотность.....	201
8.5. Случайный процесс типа белого шума. Дельта-функция.....	204
8.6. Преобразование случайных процессов линейными динамическими системами. Ковариационное уравнение.....	207
8.6.1. Непрерывные стохастические системы.....	208
8.6.2. Дискретные стохастические системы.....	216
8.6.3. Дискретная аппроксимация непрерывных СС.....	217
8.7. Генерация стационарных случайных последовательностей.....	221
ЧАСТЬ II. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ.....	225
Глава 1. ВЫБОРКИ И ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ.....	227
1.1. Типы выборок и способы их формирования.....	227
1.2. Статистическое распределение выборки.....	229
1.3. Числовые характеристики выборочных распределений.....	233
1.4. Гистограмма.....	237
Глава 2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТОЧЕЧНОГО ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ.....	243
2.1. Точечные оценки и их свойства.....	243
2.2. Свойства выборочного среднего.....	245
2.3. Свойства выборочной дисперсии.....	247
2.4. Распределения числовых характеристик выборки.....	249
2.4.1. Распределение выборочного среднего при известной дисперсии.....	249
2.4.2. Распределение выборочной дисперсии.....	249
2.4.3. Распределение выборочного среднего при неизвестной дисперсии.....	250
2.4.4. Распределение отношения двух выборочных дисперсий.....	251
2.4.5. Асимптотические свойства выборочных моментов.....	251
2.5. Точечные оценки на основе метода моментов.....	254
2.6. Метод максимального правдоподобия (МП).....	257
2.6.1. Метод МП для дискретных случайных величин.....	257
2.6.2. Метод МП для непрерывных случайных величин.....	259
2.7. Неравенство Рао-Крамера. Свойства оценок максимального правдоподобия..	264
2.7.1. Неравенство Рао-Крамера.....	264
2.7.2. Свойства оценок максимального правдоподобия.....	267
Глава 3. ИНТЕРВАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ....	269
3.1. Сущность задач интервального оценивания.....	269
3.2. Интервальное оценивание математического ожидания нормального распределения с известной дисперсией.....	272
3.2.1. Традиционный подход.....	272
3.2.2. Альтернативная процедура оценивания	273
3.2.3. Асимптотическая интервальная оценка математического ожидания.....	278
3.3. Интервальное оценивание дисперсии нормального распределения.....	280
3.3.1. Асимптотическая интервальная оценка дисперсии.....	282
3.4. Интервальное оценивание математического ожидания нормального распределения при неизвестной σ^2	285

3.5. Интервальное оценивание отношения дисперсий двух нормальных распределений.....	288
3.6. Интервальное оценивание разности математических ожиданий двух нормальных распределений.....	290
Глава 4. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ.....	294
4.1. Виды гипотез. Критерий значимости.....	294
4.2. Критическая область. Общий алгоритм проверки гипотез.....	296
4.3. Ошибки первого и второго рода. Мощность критерия.....	300
4.4. Параметрические гипотезы.....	308
4.4.1. Критерий Неймана—Пирсона.....	308
4.4.2. Сложные гипотезы.....	312
4.4.3. Критерий Вальда.....	313
4.4.4. Проверка гипотез на основе доверительных интервалов.....	316
4.5. Определение объема выборки при проверке гипотез.....	319
4.6. Проверка гипотез о виде распределения.....	331
4.6.1. Критерий хи-квадрат.....	332
4.6.2. Критерий Колмогорова.....	342
4.6.3. Критерий ω^2	346
4.7. Другие задачи проверки гипотез.....	347
4.7.1. Проверка гипотезы о разности математических ожиданий двух нормальных распределений.....	348
4.7.2. Проверка гипотезы о равенстве дисперсий двух нормальных распределений.....	352
4.7.3. Проверка гипотез об однородности выборок (критерии χ^2 , Смирнова, Уилкокса, знаков).....	354
Глава 5. ОСНОВЫ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА.....	364
5.1. Задачи регрессии.....	364
5.2. Линейная регрессия. Метод наименьших квадратов (МНК).....	366
5.2.1. Алгоритм МНК в форме обобщенного обращения матрицы.....	367
5.2.2. Свойства МНК-оценок параметров линейной регрессии.....	370
5.2.3. Оценки параметров простой линейной регрессии и их свойства.....	374
5.2.4. Множественная линейная регрессия.....	380
5.2.5. Рекуррентный алгоритм МНК.....	383
5.3. Подходы к анализу адекватности линейной регрессии.....	393
5.4. Надежность оценок линейной регрессии. Доверительные интервалы.....	398
5.5. Нелинейная регрессия.....	403
Глава 6. ОСНОВЫ КОРРЕЛЯЦИОННОГО АНАЛИЗА.....	414
6.1. Коэффициент корреляции и корреляционное отношение.....	414
6.2. Точечная оценка r_{xy} . Выборочный коэффициент корреляции... ..	421
6.2.1. Свойства выборочного коэффициента корреляции.....	422
6.2.2. Альтернативные алгоритмы точечной оценки r_{xy}	423
6.3. Интервальная оценка и проверка значимости r_{xy}	427
6.4. Точечная оценка корреляционного отношения R_{yx}	434
6.5. Интервальная оценка и проверка значимости R_{yx}	436
6.6. Специальный корреляционный анализ.....	439
6.6.1. Анализ парных связей.....	439
6.6.2. Анализ множественных связей.....	445

6.6.3. Сводный коэффициент корреляции.....	446
6.6.4. Выборочный сводный коэффициент корреляции.....	448
6.6.5. Частная корреляция.....	450
6.6.6. Выборочный частный коэффициент корреляции.....	455
6.6.7. Интервальная оценка и проверка значимости выборочных сводного и частного коэффициентов корреляции.....	460
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	469
Приложение 1. Таблицы (плотности вероятностей нормированного нормального рас- пределения и значения функции Лапласа).....	470
Приложение 2. Простейшие потоки и анализ процессов «старения»	472
Приложение 3. Символьный анализ параметров регрессии.....	479
Приложение 4. Решение задачи композиции в среде Mathcad.....	481
Приложение 5. Производная и интеграл случайной функции.....	482
Приложение 6. Марковские случайные процессы и последовательности.....	487
Приложение 7. Винеровские случайные процессы.....	490
Приложение 8. Эргодические случайные функции.....	491
Приложение 9. Распределение хи-квадрат.....	493
Приложение 10. Распределение Стьюдента.....	495
Приложение 11. Распределение Фишера.....	497
Приложение 12. Символьный анализ оценок максимального правдоподобия.....	499
Приложение 13. Некоторые распределения непрерывных случайных величин.....	501
Приложение 14. Таблицы выборочных данных.....	510
Приложение 15. Векторное и матричное дифференцирование.....	511
Приложение 16. Формирование выборочных данных с заданными выборочными числовыми характеристиками.....	514
Приложение 17. Основы применения Mathcad.....	519
Приложение 18. Описание компакт-диска.....	522
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	524
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.....	526

*Посвящается светлой памяти
профессора Владимира Александровича Троицкого,
выдающегося математика и замечательного человека*

ВВЕДЕНИЕ

Множество систем (технических, социальных, биологических, экономических и других), составляющих основу окружающей нас действительности, можно представить различными моделями, среди которых выделяются два класса: детерминированных и стохастических (вероятностных). Области применения этих моделей определяются задачами исследования, допустимостью различных упрощений, возможностью адекватной интерпретации результатов, получаемых при их использовании.

В моделях первого класса все строго определено, отдельные элементы связаны функциональными зависимостями, которые позволяют однозначно определять поведение моделей в прошлом, настоящем и будущем.

Более реальными являются модели второго класса. Они характеризуются невозможностью однозначно определить значения параметров и состояний систем. Анализируя результаты многократных опытов, экспериментов (или наблюдений) над такими системами, можно наблюдать колебания, разброс результатов каждого из опытов. Это происходит потому, что в таких системах имеют место множество неопределенных, неконтролируемых факторов. Результат воздействий совокупности факторов в процессе изучения процессов и явлений, связанных с подобными системами, невозможно предсказать.

Теория вероятностей занимается изучением совокупности результатов абстрактных, теоретических экспериментов над системами, подверженными воздействию неконтролируемых факторов, анализом закономерностей, которым подчиняются эти результаты.

Теория вероятностей служит одним из краеугольных камней современной математики, фундаментом современной теории систем. С другой стороны, теория вероятностей обеспечивает теоретическую базу для широкого круга практических задач обработки данных наблюдений, получаемых в результате реальных опытов (наблюдений). Такая обработка данных связана с получением оценок параметров исследуемых явлений, исследованием законов, которым подчиняются результаты экспериментов, формированием математического описания наблюдаемых процессов и явлений, их прогнозированием. Практика обработки результатов испытаний, опытов, экспериментов в целях определения возможного математического описания наблюдаемых процессов, приближенного определения (оценки) параметров составляет основу математической статистики.

Трудно представить полноценное научное исследование в любой области знаний, которое выполнено без учета разброса данных эксперимента (наблюдений), без учета совокупности факторов, влияющих на получаемые результаты. Это объясняет тот непреходящий интерес к изучению основ теории вероятностей и математической статистики, который наблюдается в последнее время. Анализ тенденций внедрения математических методов в практику решения практических задач показывает, что это внимание к теории вероятностей и математической статистике в ближайшие периоды и в отдаленном будущем будет только возрастать. Причиной этого служит как резкий подъем развития средств вычислительной техники, разработка и внедрение новых информационных технологий во все сферы жизни общества, так и новые результаты, полученные в последнее время в области имитационного моделирования. Та революция, которая произошла в прошлое десятилетие в области создания программных платформ имитационного моделирования, делает его одним из основных и перспективных методов научного исследования сложных систем, явлений, процессов как совокупности множества более простых взаимодействующих элементов. Наибольшей полнотой и объективностью полученные таким образом результаты будут характеризоваться только при учете случайной природы взаимодействий, факторов и возмущений в таких моделях.

Книга посвящена изложению основ теории вероятностей и математической статистики с акцентом на прикладные аспекты и ориентацией на гармонически сбалансированное формирование знаний, умений и навыков учащихся.

Излагаются разделы теории вероятностей и математической статистики, предусмотренные государственными образовательными стандартами многих специальностей и направлений технического образования, связанных с системным анализом, анализом и синтезом информационно-вычислительных и информационно-управляющих систем, анализом и синтезом систем обработки информации в реальном времени, анализом и синтезом стохастических систем, разработкой программных сред и моделированием. В изложении акцентируется практическая направленность методов и алгоритмов, даются рекомендации по их практическому использованию для получения решения соответствующих задач с применением компьютеров.

Реальные прикладные задачи, решение которых требует привлечения теории вероятностей и математической статистики, характеризуются, как правило, алгоритмической сложностью, необходимостью выполнения значительных объемов вычислений. Получение результатов в таких задачах без привлечения компьютерных технологий затруднительно или практически невозможно.

В условиях недостаточного внедрения средств вычислительной техники и информационных технологий в процесс образования не удастся прививать учащимся умения и навыки решения профильных прикладных задач, связанных с использованием теории вероятностей и математической статистики. В этом случае на практическом занятии могут рассматриваться одна-две простые задачи без возможности анализа результатов при варьировании исходных данных.

Компьютеризация практических занятий при изучении теории вероятностей и математической статистики требует применения специализированного программного обеспечения. Разработка программ, составляющих основу подобного программного обеспечения, на языках высокого уровня представляет непростую проблему, что служит основной причиной недостаточного проникновения компьютерных технологий в учебный процесс.

Проблема создания специализированного программного обеспечения резко упрощается с привлечением универсальных программных систем компьютерной математики (СКМ), поскольку при этом исключается необходимость разработки программ на языках высокого уровня. Применение СКМ в процессе проведения практических занятий позволяет уделять должное внимание многовариантному решению широкого спектра алгоритмически сложных задач по теории вероятностей и математической статистике.

Поэтому в книге, наряду с изложением теоретико-математических основ, формулировок и доказательств, приводятся также рекомендации по решению типовых задач теории вероятностей и математической статистики в среде СКМ Mathcad. Эти рекомендации носят практический характер, позволяющий преподавателю создавать на их основе собственные примеры и иллюстрации, составлять необходимое множество индивидуальных заданий, а студентам — использовать рекомендованные программные структуры для успешного анализа и решения практических задач, выполнения исследовательских работ.

Известны специализированные программные системы, предназначенные для решения круга задач, относящихся к теории вероятностей и математической статистике. Среди них можно отметить программные комплексы Statistica; SYSTAT, TableCurve 2D, TableCurve 3D, PeakFit, AutoSignal компании Systat Software Inc; Stata компании Stata Corporation и др.^{*)} Эти системы характеризуются исключительно высокой степенью интеграции. Решение задач в них требует лишь ввода исходных данных, например, результатов наблюдений, и выбора режима работы (типа задачи, которая должна быть решена). После активации этого режима пользователь получает ответ, для получения которого может не требоваться проникновения в сущность использованного при решении подхода, знания формульных зависимостей и алгоритмов. Предельно упрощая, можно сказать, что решить соответствующую задачу, известную пользователю лишь по названию, с помощью таких систем можно, даже не зная основ теории вероятностей и математической статистики. Конечно, указанные программные системы имеют свою область приложения, однако совершенно неприемлемы при изучении теории вероятностей и математической статистики, при проведении практических занятий.

Процесс изучения теории вероятностей и математической статистики требует рассмотрения тонкой структуры материала, практического освоения обширной совокупности понятий, методов и алгоритмов анализа результатов

^{*)} См., например, *Боровиков В.* Statistica: искусство анализа данных на компьютере. СПб.: — Питер, 2001. — 650 с.

экспериментов. Поэтому представляется, что изучение теории вероятностей и математической статистики должно опираться на программные системы невысокой степени интеграции, позволяющие рассмотреть детали, подходы и алгоритмы решения отдельных задач, обеспечивающие наглядность и информативность занятий. В данной работе в качестве такой программной системы используется Mathcad.

Выбор Mathcad определяется следующими основными соображениями

- сравнительная простота и большая распространенность этой СКМ среди пользователей (студенческая среда, научные работники, преподаватели);
- универсальность, приспособленность к численному, символьному и графическому решению широкого круга математических задач;
- наличие большого числа встроенных функций для решения задач теории вероятностей и математической статистики;
- возможность решения задач с выделением достаточно мелких этапов и глубоким проникновением в сущность каждого из них в тесной связи с особенностями задачи в целом, без механицизма, характерного для программных сред высокой степени интеграции;
- отсутствие высоких требований к пользователю как к программисту;
- возможность обработки данных, записанных в различных форматах (например, в текстовых с расширениями .txt, .prn, .csv), с последующей трансформацией результатов в один из этих форматов;
- простота двумерного (2D) и трехмерного (3D) графического представления результатов;
- возможность интеграции Mathcad с множеством других программных систем (Excel, MatLab, Lotus, Power Point и др.);
- простота создания пояснительных записок, отчетов, докладов, статей и даже монографий на основе совместного использования Mathcad и текстовых редакторов Word.

Перечисленными возможностями не обладает, например, приложение Excel, рекомендуемое в качестве базы при изучении теории вероятностей и математической статистики в ряде книг^{*)}, что ограничивает возможности не только студента, но и преподавателя.

В среде Mathcad пользователю предлагается широкий набор «шаблонов» (предварительно запрограммированных на языке C++ процедур) и встроенных функций для решения любых математических задач, визуализации результатов с помощью 2D- и 3D-графиков, мощный арсенал операторов символьного преобразования математических выражений, решения систем алгебраических и дифференциальных уравнений, неравенств, циклических и рекуррентных процедур и проч. Широко представлен в Mathcad арсенал средств для решения задач теории вероятностей и математической статистики.

^{*)} См., например, Горелова Г. В., Кацко И. А. Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с прим. Excel. Ростов-на-Дону.: ЕНИКС, 2002. — 400 с.

Все эти особенности Mathcad не только облегчают процесс достижения конечного результата, осуществление более глубокого анализа проблем, но и позволяют использовать альтернативные пути решения тех же задач (см. главы 3, 4, 6, часть II).

Следует иметь в виду, что применение СКМ в процессе изучения основ теории вероятностей и математической статистики практически исключает необходимость использования таблиц (плотностей и функций распределений, квантилей и т.д.), которые широко представлены во многих учебниках. При решении задач в среде конкретной СКМ все эти данные могут быть достаточно просто вычислены для любых (не только узловых, как в таблицах) значений параметров распределений, что исключает необходимость нормирования соответствующих случайных величин. Эти возможности обеспечиваются множеством встроенных функций, предусмотренных для распределений различных видов. Если же требуется использовать распределение (например, Колмогорова), которое обычно не учтено в СКМ, характеристики таких распределений могут вычисляться на основе заданных аналитических выражений и/или (для квантилей) путем численного решения соответствующих уравнений. Такой подход использован автором в программе вычисления квантилей для следующих распределений: бета, биномиального, Коши, хи-квадрат, показательного, Фишера, гамма (двухпараметрического), Колмогорова, нормального, Пуассона, Стюдента, равномерного, Вейбулла. Эта программа и ряд других размещены в качестве интерактивных ресурсов на портале <http://mas.exponenta.ru> в рубрике <<Математика>>, разделах <<Теория вероятностей>> и <<Математическая статистика>>.

Использование СКМ на практических занятиях позволяет существенно расширять круг анализируемых профильных задач, полноценное введение которых ранее (без СКМ) ограничивалось их алгоритмической сложностью или большими объемами вычислений. Среди задач этого типа: исследование схемы испытаний с двумя исходами и различными вероятностями локальных успехов, исследование свойств многомерных распределений для векторных случайных величин и процессов (последовательностей), получение оценок максимального правдоподобия поисковыми методами, решение задач множественной линейной и нелинейной регрессии, проверки гипотез и проч. В течение одного практического занятия, без привлечения СКМ и компьютеров, обычно нет возможности поставить, формализовать сложную задачу и получить ее численное или аналитическое решение. В то же время, используя СКМ, подобные задачи могут быть решены не только в локальном варианте, но и всесторонне исследованы при различных исходных данных. Ряд подобных задач (например, одновременная оценка коэффициентов парной корреляции, точечная и интервальная оценка коэффициентов корреляции и корреляционных отношений по результатам решения задач регрессии, анализ динамики изменения дисперсий и корреляционных моментов вектора состояний линейной стохастической системы, получение числовых характеристик линейных форм векторных случайных величин и процессов, точечная оценка сводного и част-

ного коэффициентов корреляции по результатам решений соответствующих задач регрессии) подробно рассмотрен в материале пособия. Изучение свойств стохастических систем в работе опирается на метод ковариационного анализа случайных процессов и последовательностей, изложенный с позиции современной теории систем. В частности, широко используются так называемые ковариационные уравнения, представляющие собой матричные дифференциальные или разностные уравнения, которые описывают процессы изменения во времени вторых моментов распределения векторных случайных величин и функций. В известных учебниках и учебных пособиях аналогичного назначения подобный материал, роль которого для анализа и синтеза реальных стохастических систем трудно переоценить, освещен недостаточно или практически отсутствует.

Для типовых примеров и задач в разделах предлагаются программные структуры Mathcad, каждая из которых может служить основой получения множества вариантов индивидуальных заданий для практических занятий с применением компьютеров. Эти программные структуры могут быть использованы для постановки и выполнения исследовательских работ (например, связанных с анализом влияния исходных параметров на величины вероятностей событий, на значения точечных оценок, границы доверительных интервалов и проч.). Такие исследования могут сопровождать каждое практическое занятие, поскольку среда Mathcad обеспечивает моментальный пересчет сформированных файлов для каждого нового набора исходных данных или при изменении программы.

Предлагаемые mscd-структуры решения типовых задач не следует рассматривать в качестве единственно возможных. Эти структуры и иллюстративные материалы служат лишь вариантом гарантированного достижения конечного результата, имея который можно заниматься их совершенствованием и разработкой собственных программ. Каждый из примеров может служить основой конкретной многовариантной практической и исследовательской работы студента.

Использование среды Mathcad в качестве основы при решении типовых задач потребовало уделить в материале некоторое внимание особенностям практического применения этой СКМ, рекомендациям и вариантам достижения результата. Этому посвящены те комментарии, которыми сопровождаются варианты решения задач.

Материал пособия ориентирован как на опытных пользователей Mathcad, так и на пользователей, которые могут и не иметь опыта работы в этой СКМ. Поэтому в прил. 17 приводятся минимально необходимые сведения по основам применения Mathcad. Подробное описание технологии решения задач в среде Mathcad приводится в работе автора [17]. Там же можно найти практические рекомендации по дозированному внедрению СКМ в учебный процесс, основанные на многолетнем опыте.

Многие примеры и задачи, рассмотренные в настоящем пособии, послужили основой разработки интерактивных ресурсов, свободно доступных в Интернете (см. <http://mas.exponenta.ru/>, рубрика <<Математика>>). Доступ к этим ресурсам не требует установки СКМ Mathcad на пользовательском компьютере.

Книга предназначена для студентов и аспирантов технических вузов, инженерно-технических и научных работников. Она адресована также и специалистам, профессиональная деятельность которых связана с моделированием и имитацией случайных процессов и явлений, анализом и синтезом систем со случайными воздействиями, построением математических моделей по данным наблюдений и проч.

При изложении материала:

- решения примеров выделено значками □ (начало) и ■ (конец);
- доказательства утверждений отмечены значками ▷ (начало) и ◀ (конец).

Список литературы по теме содержит цитируемые источники и перечень рекомендованной литературы.

Автор надеется, что предлагаемый материал будет полезен студентам и преподавателям в их практической деятельности, а его изучение послужит хорошей стартовой площадкой современному системному аналитику, профессиональная деятельность которого будет осуществляться в условиях развитых информационных технологий, широкого использования компьютерных средств во всех сферах деятельности.

К пособию прилагается компакт-диск с триал-версией Mathcad 14 и файлами решений задач и примеров, рассматриваемых в тексте. Файлы созданы в Mathcad 13.

Г л а в а 1. СОБЫТИЯ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

1.1. Событие. Пространство элементарных событий

Как отмечалось выше, теория вероятностей по результатам (исходам) абстрактных, теоретических экспериментов, опытов, испытаний или наблюдений изучает математические модели систем, процессов и явлений, на которые действуют совокупности неконтролируемых факторов.

Назовем испытанием реализацию некоторого комплекса условий, который может быть повторен сколь угодно большое число раз. Всякий факт, который может произойти или не произойти в результате данного испытания, носит название **события**. Так, подбрасывая монету пять раз, можно говорить о событии, которое состоит в том, что более четырех раз выпал герб.

Русским математиком А. Н. Колмогоровым в 1933 г. предложена аксиоматика абстрактных событий. В ее основе лежат элементарные события как отражения исходов испытания.

Предполагая, что испытание можно повторить несколько (теоретически — неограниченное число) раз, по результатам серии испытаний может быть получено множество элементарных (неразложимых, взаимоисключающих) исходов. Каждому элементарному исходу соответствует одно и только одно **элементарное (неразложимое) событие** ω . Отдельные элементарные события при этом могут рассматриваться в качестве точек пространства элементарных событий.

Пространством элементарных событий называется любое абстрактное множество Ω , состоящее из элементов ω .

Пространство элементарных событий называется **дискретным**, если оно образовано конечным или бесконечным числом точек, которые могут быть занумерованы в простую последовательность.

Простейшими пространствами элементарных событий являются те, которые содержат конечное число n точек. Этот частный случай пространства элементарных событий порождается ограниченным числом экспериментов. Однако можно представить и такие идеализированные эксперименты, которые осуществляются бесконечное число раз. Например, пусть в игре с участием двух игроков победителем становится игрок, выигравший 3 раза подряд. Количество игр (экспериментов) в этом случае может быть от трех и выше, в зависимости от индивидуальных свойств игроков. Если класс участников примерно одинаков, то теоретически возможна ситуация, когда число игр может оказаться бесконечным.

С позиций пространства элементарных событий дадим следующее определение события.

Событием называется любое подмножество пространства элементарных событий. В частности, элементарное событие — это одноэлементное подмножество пространства элементарных событий.

Бросая, например, монету три раза, получаем следующее пространство элементарных событий: ГГГ, ГГР, ГРГ, РГГ, РГР, РРГ, ГРР, РРР (Г — выпадение герба при однократном бросании, Р — выпадение решетки).

Событие A «выпало не менее двух гербов» содержит первые четыре элементарные события и является, поэтому, разложимым. Такое событие определяется как **сложное событие**. Сложным в рассмотренном примере будет также событие B «выпал ровно один герб», поскольку оно означает или РГР, или РРГ, или ГРР, т. е. содержит три элементарных события.

Совокупность точек пространства элементарных событий, представляющих все те элементарные исходы опыта, при которых происходит сложное событие C , полностью описывает это событие. Обратно, произвольно заданное множество D , содержащее несколько точек пространства элементарных событий, можно назвать сложным событием; оно происходит или не происходит в зависимости от того, принадлежит или не принадлежит множеству D точка, представляющая исход опыта.

Таким образом, сложное событие наступает при появлении **хотя бы одного** из составляющих его элементарных событий.

Пусть осуществляется выборка наугад одной детали из множества с возвращением вынутой детали обратно после определенных действий над ней, например, обмера или простой регистрации. Предположим, что для удобства эксперимента все детали пронумерованы. Процесс отбора деталей в данном примере представляет испытание. В результате такого испытания можно наблюдать появление деталей с определенными порядковыми номерами, т. е. появление событий $d(i)$, $i = 1, 2, 3, \dots$. Каждое событие $d(i)$ представляет собой элементарное событие. Полная совокупность всех элементарных событий представляет собой пространство Ω в этом испытании.

Сложным событием в примере будет, например, событие «отбор детали с порядковым номером, меньшим 4». Оно наступит при появлении хотя бы одного из элементарных событий $d(1)$ или $d(2)$, или $d(3)$.

Различают события **достоверные, невозможные, несовместные, равновозможные**. Событие называют **достоверным**, если оно происходит при каждом проведении данного испытания. Событие называют **невозможным**, если оно не может произойти ни при одном эксперименте. С позиций пространства элементарных событий достоверное событие (обозначается I или Ω) — это событие, содержащее все возможные элементарные события, а невозможное событие ($\emptyset$) — это событие, не содержащее ни одного элементарного события. События называют **несовместными** (взаимоисключающими), если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании. Несколько событий — **равновозможные**, если ни одно из них не имеет объективного преимущества перед другими. Из введенных определений следует, что элементарные события — несовместные и равновозможные.

1.2. Действия над событиями и свойства действий

Рассмотрим основные отношения между событиями и действия над ними.

1. $A \subset B$ или $B \supset A$. Обозначение $\subset$ соответствует понятию «влечет». По поводу этого отношения говорят, что появление события A влечет за собой наступление события B . При этом множество элементарных событий A содержится в множестве элементарных событий B , т. е. A является подмножеством B . Отношению $A \subset B$ удовлетворяют, например, события $A\{d(3), d(7), d(9)\}$ и $B\{d(3), d(4), d(6), d(7), d(9)\}$.

2. $A = B$. Эквивалентность (равенство) событий A и B , т. е. наступление, либо не наступление событий A и B вместе. Равенство событий удовлетворяется при выполнении условий $A \subset B$ и $B \supset A$.

3. $A \cup B$ или $A + B$. Объединение событий (сумма, «или»). Результат объединения есть событие, заключающееся в появлении или A , или B , или совместном их появлении, т. е. наступлении хотя бы одного из объединяемых событий. Элементарные события, входящие в A и B , участвуют в объединении однократно. Например, при $A\{d(3), d(4)\}$ и $B\{d(4), d(7)\}$ объединению этих событий будет соответствовать событие $A + B = C\{d(3), d(4), d(7)\}$.

4. $A \cap B$ или AB . Пересечение (произведение, «и») событий. Наступает в случае, если события и A , и B произошли вместе. При $A\{d(1), d(4), d(9)\}$ и $B\{d(3), d(4), d(6), d(7), d(9)\}$ событие $AB = C\{d(4), d(9)\}$ наступит только тогда, когда появятся события или $d(4)$, или $d(9)$.

5. $\bar{A}$. Дополнение к событию A (событие, противоположное событию A). Дополнение $\bar{A}$ означает не наступление события A . Читается как «не A ».

6. $A \cap B = \emptyset$ или $AB = \emptyset$. Несовместность событий A и B . Означает, что события A и B не могут наступить вместе. Наступление события A исключает наступление события B и наоборот.

7. $A \setminus B$ или $A - B$. Разность событий A и B . Означает появление события, состоящего в наступлении события A и в не наступлении события B .

8. $A \circ B$. Симметрическая разность. Результатом этого действия над событиями A и B служит событие, равное $\overline{AB} + \overline{BA}$.

Введенные основные отношения между событиями и действия над ними можно представить в графической форме (рис. 1.1), в виде диаграммы Д. Вена (английский математик, 1834—1923). Квадраты диаграммы (см. рис. 1) соответствуют достоверным событиям.

Рассмотрим свойства действий.

Из определения объединения и пересечения следуют простые равенства:

$$A + A = A; AA = A \text{ или } A \cup A = A; A \cap A = A. \quad (1.1)$$

В дальнейшем для простоты будем обозначать объединения и пересечения символами сложения и умножения.

$$\text{Свойство коммутативности: } A + B = B + A; AB = BA. \quad (1.2)$$

Свойство ассоциативности: $A + (B + C) = (A + B) + C$; $A(BC) = (AB)C$. (1.3)

Свойство дистрибутивности:

$$A + BC = (A + B)(A + C); A(B + C) = AB + AC. \quad (1.4)$$

Объединение и пересечение с достоверным событием:

$$A + \Omega = \Omega; A\Omega = A. \quad (1.5)$$

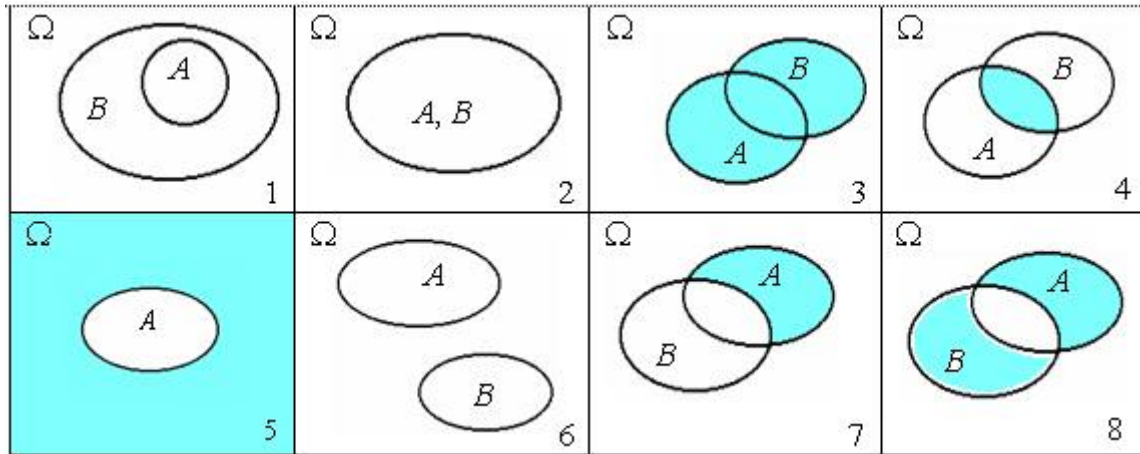


Рис. 1.1. Графическая интерпретация основных отношений и действий

Объединение и пересечение события A с невозможным событием:

$$A + \emptyset = A; A\emptyset = \emptyset. \quad (1.6)$$

Объединение и пересечение события A с дополнением к нему:

$$A + \bar{A} = \Omega; A\bar{A} = \emptyset. \quad (1.7)$$

Дополнение к дополнению: $\bar{\bar{A}} = A$. (1.8)

Дополнение к объединению и пересечению:

$$\overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}; \overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}. \quad (1.9)$$

Свойство эквивалентных событий:

$$\text{если } A = B, \text{ тогда } A \subset B \text{ и } B \subset A, \text{ а так же } \bar{A} = \bar{B}. \quad (1.10)$$

Свойства отношения $\subset$:

$$\text{если } A \subset B \text{ и } B \subset C, \text{ то } A \subset C; \quad (1.11)$$

$$\text{если } A \subset B, \text{ то } \bar{B} \subset \bar{A}. \quad (1.12)$$

$$\text{Свойство объединения: } A + B = A + (\bar{A}B). \quad (1.13)$$

$$\text{Свойство разности: } A \setminus B = A\bar{B}. \quad (1.14)$$

$$\text{Дополнение к достоверному событию: } \bar{\Omega} = \emptyset. \quad (1.15)$$

Приведенные свойства легко доказываются с помощью введенных ранее определений и имеют ясную графическую интерпретацию.

Введем здесь еще одно определение, касающееся понятия полной группы событий. Пусть события $A_1, A_2, \dots, A_s$ несовместны. Будем называть **полной группой событий** такую их совокупность, которая в сумме составляет достоверное событие:

$$A_1 + A_2 + \dots + A_s = \Omega. \quad (1.16)$$

Таким образом, полную группу событий составляет множество событий $A_1, A_2, \dots, A_s$, появление хотя бы одного из которых есть достоверное событие.

Задание к самостоятельной работе:

- * Проиллюстрировать графически справедливость свойств (1)–(15).
- * События A и B означают хотя бы одно попадание и не менее двух попаданий в цель при трех выстрелах. Что означают события: $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{A} + \bar{B}$, $\bar{A} \bar{B}$, $\overline{A+B}$, $\overline{AB}$, A/B , $\bar{A}/\bar{B}$, $\overline{A/B}$.

1.3. Алгебра событий

В теории вероятностей рассматриваются события, удовлетворяющие требованиям замкнутости относительно операций объединения, пересечения и дополнения. В связи с этим вводится определение алгебры событий.

Алгеброй событий называют класс событий, замкнутый относительно операций объединения, пересечения и дополнения.

Рассмотрим пример. Испытание состоит в подбрасывании монеты. В результате испытаний будут выпадать: либо герб (Γ), либо цифра (Π). Поэтому достоверное событие $\Omega = \{\Gamma, \Pi\}$.

Составим множество $A = \{\emptyset, \Gamma, \Pi, \Omega\}$. Проверим, составляет ли множество A алгебру событий. С этой целью для операций объединения, пересечения и дополнения составим таблицы, приведенные ниже.

$\cup$	$\emptyset$	Γ	Π	Ω
$\emptyset$	$\emptyset$	Γ	Ω	Ω
Γ	Γ	Γ	Ω	Ω
Π	Π	Ω	Π	Ω
Ω	Ω	Ω	Ω	Ω

$\cap$	$\emptyset$	Γ	Π	Ω
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
Γ	$\emptyset$	Γ	$\emptyset$	Γ
Π	$\emptyset$	$\emptyset$	Π	Π
Ω	$\emptyset$	Γ	Π	Ω

A	$\emptyset$	Γ	Π	Ω
$\bar{A}$	Ω	Π	Γ	$\emptyset$

Первые две таблицы имеют единую структуру и представляют результаты действий $\cup$ и $\cap$ над элементами множества A . Последняя таблица представляет дополнения к элементам A . Из таблиц следует, что многократные операции вида $\cup$, $\cap$ и дополнения над элементами множества A приводят нас к событиям,

составляющим это множество. Таким образом, класс событий, входящих в A , является замкнутым на самого себя и A — это алгебра событий.

1.4. Вероятность

Возможность появления событий в общем случае различна. Сопоставляя события по степени возможности, вводят количественную меру объективной возможности появления каждого события — вероятность события.

Известно несколько подходов к определению вероятности события (аксиоматический, классический, статистический, геометрический).

1.4.1. Аксиоматический подход

Аксиоматический подход (А. Н. Колмогоров) к определению вероятности является наиболее общим. Пусть, $\Omega = \{\omega\}$ — пространство элементарных событий и F — построенная на нем алгебра событий.

Вероятностью события A называется вещественная функция $P(A)$, определенная для каждого события алгебры F , удовлетворяющая следующим аксиомам:

1. Неотрицательности, т. е. $P(A) \geq 0$. (1.17)

2. Нормировки (вероятность достоверного события равна единице):

$$P(\Omega) = 1. \quad (1.18)$$

3. Аддитивности. Пусть $A_1, A_2, \dots$ — счетное множество попарно несовместных событий из алгебры F . Тогда вероятность суммы событий равна сумме их вероятностей:

$$P\left(\sum_k A_k\right) = \sum_k P(A_k); A_i A_j = \emptyset, i, j = 1, 2, \dots \quad (1.19)$$

Для двух несовместных событий из (1.19) следует:

$$P(A + B) = P(A) + P(B), \text{ при } AB = \emptyset. \quad (1.20)$$

Другими следствиями аксиом (1.17)—(1.19) служат соотношения:

- $P(\emptyset) = 0$ (вероятность невозможного события равна нулю);
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;
- $0 \leq P(A) \leq 1$.

Доказательства трех последних следствий тривиальны и непосредственно вытекают из свойств (1.15), (1.7), лемм (1.17)—(1.19).

Событие A — некоторое подмножество пространства элементарных событий $\Omega = \{\omega\}$. Поэтому, приписывая каждому из элементарных событий вероятности p_ω такие, что $p_\omega \geq 0$ и $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$, любому событию A будет соответствовать вероятность $P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$.

1.4.2. Классический подход

Пусть эксперимент имеет конечное число n возможных (элементарных) исходов, Пусть также, в силу практических или теоретических аргументов, ни один из исходов не должен появляться чаще других, т. е. ни одному из них нельзя отдать предпочтения. Тогда, связанные с каждым элементарным исходом события — равновозможные (см. разд. 1.1) элементарные события.

Таким образом, рассматривается эксперимент E , порождающий множество элементарных событий $E_1, E_2, \dots, E_n$, обладающих следующими свойствами:

- события $E_1, E_2, \dots, E_n$ равновозможные и несовместные;
- при $j \neq i$ $E_j \cdot E_i = \emptyset$.
- события $E_1, E_2, \dots, E_n$ образуют полную группу ($\sum_{j=1}^n E_j = \Omega$);

Такой эксперимент носит название **классического эксперимента** с равновозможными элементарными исходами. Каждому из исходов (событий) эксперимента E может быть приписана вероятность $p = 1/n$.

Пусть теперь, среди n равновозможных событий эксперимента E найдутся m событий $E_k, k = \overline{1, m}, m \in n$, каждое из которых обладает свойством $E_k \subset A$. По этому поводу говорят, что каждое из событий E_k благоприятствует появлению события A ; иначе — из общего числа n равновозможных событий событию A благоприятствует m событий, т. е. A наступает при появлении каждого из m равновозможных и несовместных исходов.

В этих условиях классического эксперимента с равновозможными исходами **вероятность события A** равна отношению числа m благоприятствующих A событий к общему числу n элементарных событий:

$$P(A) = m / n. \quad (1.21)$$

1.4.3. Статистический подход

Предположим теперь, что имеется некоторое количество испытаний, которые повторяются сериями при неизменных условиях. Например, в первой серии испытаний число экспериментов равно N_1 , во второй — N_2 , в k -ой — N_k . В каждой из этих серий событие A может появиться несколько $(0, 1, 2, \dots)$ раз.

Относительной частотой $\hat{P}(A)$ события A в серии испытаний называется отношение числа μ испытаний данной серии, в которых появилось событие A , к общему числу ν испытаний серии:

$$\hat{P}(A) = \mu / \nu.$$

Здесь μ — число появлений события A в общем числе испытаний данной серии; число μ носит название **частоты** появлений события A .

Обозначим $N_k(A)$ частоту появления события A в k -ой серии. Отношение $N_k(A)/N_k$ — относительная частота события A в k -ой серии.

При достаточно большом числе экспериментов в сериях можно заметить, что значения относительных частот события A в каждой серии группируются около некоторого определенного числа:

$$N_1(A)/N_1 \approx N_2(A)/N_2 \approx \dots \approx N_k(A)/N_k \approx \hat{P}(A).$$

При неограниченном увеличении числа испытаний в сериях процесс группирования относительных частот события A стабилизируется в том смысле, что разброс колебания относительных частот вокруг $\hat{P}(A)$ уменьшается с ростом числа испытаний в сериях. В связи с этим вводится определение.

Вероятностью события A (статистической вероятностью события A) называется число, около которого колеблется относительная частота этого события, приближаясь к нему по мере увеличения числа испытаний.

Проиллюстрируем процесс стабилизации относительных частот при увеличении числа испытаний на примере идеализированного эксперимента, имитацию которого осуществим в Mathcad. Предположим, что в эксперименте осуществляется бросание монеты n раз; эксперимент повторяется 5 раз. На рис. 1.2 приведены результаты таких экспериментов при $n = 100, 500, 3000$.

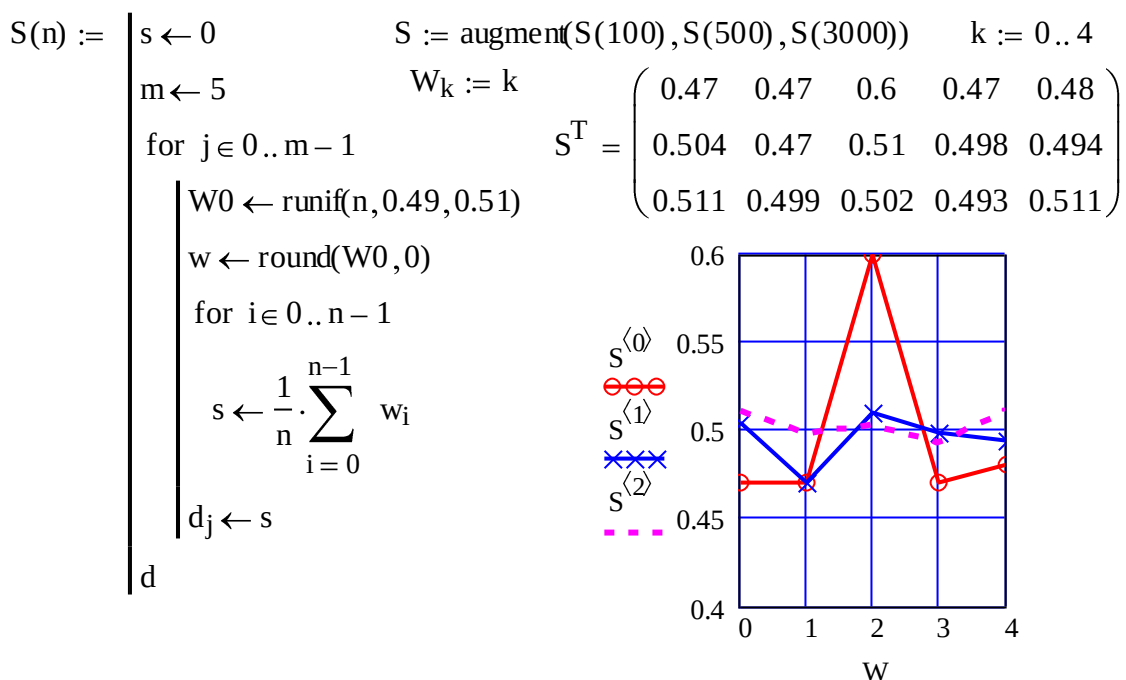


Рис. 1.2. Результаты вычисления относительных частот

Относительные частоты для этих значений n сведены в матрицу S , которая на рис. 1.2 представлена в транспонированном виде. Значения элементов матрицы S выведены на график. Первый столбец матрицы S ($n = 100$) имеет значения, сильно отличающиеся от теоретического значения 0.5. Колебания значений второго столбца S ($n = 500$) вокруг 0.5 происходят в диапазоне, абсолютная величина которого не превышает 0.03. При $n = 3000$ (третий столбец матрицы S) указанный диапазон отклонений от значения 0.5 снижается до уровня 0.011 для выбранного числа повторений.

В левой части (см. рис. 1.2) приведена циклическая процедура имитации результатов бросания. В качестве генератора результатов эксперимента использован генератор независимых случайных чисел (встроенная функция **runif**) с равномерным распределением в диапазоне (0.49, 0.51), данные которого округляются до ближайшего целого (0 или 1) с применением встроенной функции **round**.

По поводу статистического подхода к определению вероятности можно сделать следующие замечания:

- из статистического подхода следует, что относительная частота события A может служить приближенным значением (оценкой) вероятности события A :

$$P(A) \approx \hat{P}(A) = \mu / \nu; \quad (1.22)$$

- из формулы (1.22) следует, что основные свойства вероятности и свойства относительных частот события A при большом числе испытаний близки. Опуская доказательства, укажем лишь, что относительные частоты удовлетворяют выражениям, которые могут быть получены из (1.17)—(1.20) при условии замены $P(A)$ на $\hat{P}(A)$;

- если эксперимент не может быть отнесен к классическому с равновозможными исходами, то статистический подход служит единственной основой приближенного вычисления вероятности.

1.4.4. Геометрический подход

При геометрическом подходе рассматривается эксперимент, в котором точка M наугад бросается в определенную геометрическую область Q (отрезок, часть плоскости, область пространства). Характер процесса бросания (наугад, случайно) определяет равновозможность попадания брошенной точки в любую конечную подобласть q области Q . Поэтому вероятность попадания точки M в $q \in Q$ не зависит от положения q внутри области Q , а лишь пропорциональна мере подобласти q . Под мерой области понимается длина отрезка, площадь или объем. В качестве события A в данном случае выступает факт попадания точки M в подобласть q .

Вероятностью события A (геометрической вероятностью события A) называется отношение меры подобласти $q \in Q$ к мере области Q :

$$P(A) = m(q) / m(Q), \quad (1.23)$$

где $m(q)$ — мера подобласти q , $m(Q)$ — мера области Q .

Для примера рассмотрим одномерный случай. Пусть отрезок L_A составляет часть отрезка L . На отрезке L наугад выбирается произвольная точка. В этих условиях все отрезки $L_A \in L$ — равновозможные исходы эксперимента, причем вероятность $P(A)$ того, что точка окажется на отрезке L_A пропорциональна его длине и не зависит от местоположения L_A на L . При сделанных предположениях $P(A) = L_A / L$.

В двумерной области подобные предположения могут быть сделаны относительно плоских фигур с площадями S_A и S . Вероятность попадания точки на

фигуру $S_A \in S$ пропорциональна площади этой фигуры и не зависит от ее формы и расположения внутри S : $P(A) = S_A / S$. Аналогично — для вероятностей попадания точки в многомерную область объема V_A внутри области с объемом V : $P(A) = V_A / V$. Эта вероятность также не зависит от формы и расположения области V_A внутри V , а определяется только ее относительным объемом.

1.5. Вычисление вероятностей

Классическое определение вероятности и выражение (1.21) позволяют наметить основной подход к непосредственному вычислению вероятностей в различных задачах анализа исходов испытаний. При вычислении вероятности следует выполнить четыре последовательных этапа:

1. Определить множество Ω всех элементарных исходов.
2. Определить подмножество $M(A)$ исходов, которые благоприятствуют появлению события A .
3. Найти численные значения n и m по результатам выполнения п.п. 1 и 2.
4. Вычислить вероятность появления события A по формуле (1.21).

В простейших случаях практическое применение этого подхода не вызывает трудностей. Рассмотрим такие примеры.

Пример 1.1. Определить вероятность того, что при последовательном бросании двух шестигранных кубиков сумма очков будет равна 5.

□ Решение. Множество Ω всех элементарных исходов составляют пары чисел $X = (x_1, x_2)$, где $x_k = 1, 2, \dots, 6$, $k = 1, 2$. Подмножество $M(A)$ исходов, благоприятствующих появлению события A , определяется теми парами из X , сумма значений которых равна 5. Число элементов множества всех элементарных исходов $n = 6 \cdot 6 = 36$. Число элементов подмножества $M(A) = \{2, 3; 3, 2; 1, 4; 4, 1\}$ исходов $m = 4$. Вероятность $P(A) = 4/36 = 1/9$. ■

Пример 1.2. В урне находится 20 шаров: 6 белых, 4 красных, 8 зеленых и 2 синих. Из урны производится выборка одного шара наугад. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется: а) не красным; б) не зеленым; в) не красным и не зеленым.

□ Решение. Множество всех возможных исходов в данном случае равно 20. Это множество состоит из несовместных и равновероятных событий. Обозначая A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) события, состоящие в возможности вынуть шар каждого из четырех цветов, имеем: $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \Omega$. Каждое из четырех событий наступит, если будет извлечен шар соответствующего цвета. Например, событие A_1 состоит из 6 равновероятных элементарных событий полной группы Ω . Если будет извлечен один из 6 красных шаров, то событие A_1 наступит. Поэтому вероятность первого события $P(A_1) = 6/20 = 0.3$.

Аналогично, $P(A_2) = 4/20 = 0.2$; $P(A_3) = 8/20 = 0.4$; $P(A_4) = 2/20 = 0.1$.

Сумма этих вероятностей, как вероятность суммы несовместных событий, составляющих полную группу, равна единице.

Событие $\bar{A}_2$ — извлечен не красный шар — означает, что вынутый шар относится к множеству 16 остальных шаров, т. е. $\bar{A}_2 = A_2 + A_3 + A_4$. Тогда, в силу (1.21), вероятность извлечь не красный шар

$$P(\bar{A}_2) = P(A_1) + P(A_3) + P(A_4) = 0.3 + 0.4 + 0.1 = 16/20 = 0.8.$$

Аналогично, вероятность извлечь не зеленый шар

$$P(\bar{A}_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_4) = 0.3 + 0.2 + 0.1 = 12/20 = 0.6.$$

События $\bar{A}_2$ и $\bar{A}_3$ совместны. Их наступление вместе произойдет в случае, когда вынутый шар окажется белым или синим. Таким образом, пересечение $\bar{A}_2$ и $\bar{A}_3$ равно сумме событий $A_1 + A_4$ и вероятность извлечь не красный и не синий шары будет равна: $P(\bar{A}_2 \bar{A}_3) = P(A_1) + P(A_4) = 0.4$. ■

Задание к самостоятельной работе:

* Брошены два шестигранных кубика. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 3. (Ответ: $P(A) = 1/18$).

* Подбрасываем монету 2 раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз выпадет герб. (Ответ: $P(A) = 3/4$).

В более сложных случаях при определении числа всех возможных исходов и числа исходов, благоприятствующих появлению события A , как правило, необходимо использовать формулы комбинаторики. Напомним их.

1.5.1. Некоторые соотношения комбинаторики

Размещениями называются комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом, либо порядком элементов. Число размещений из n по m :

$$A_n^m = n! / (n - m)! = (n - m + 1)(n - m + 2) \dots (n - 1)n. \quad (1.24)$$

Перестановками называются комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения.

Число перестановок:

$$P_n = A_n^n = n!. \quad (1.25)$$

Сочетаниями называются комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом.

Число сочетаний:

$$C_n^m = n! / m!(n - m)! = A_n^m / P_m. \quad (1.26)$$

Для вычисления значений (1.24)—(1.26) удобно использовать Mathcad, в котором оператор **!** (**Shift** + **1**) вычисляет факториал, а встроенные функции **permut**(n, m) и **combin**(n, m) — размещения (1.24) и сочетания (1.26).

При непосредственных подсчетах вероятностей могут быть полезными следующие правила.

° Пусть элемент a может быть выбран из совокупности элементов N_a способами, а элемент b — выбран N_b способами. Тогда выбор или a , или b может быть осуществлен $N_a + N_b$ способами (правило сумм).

° Пусть элемент a выбирается из совокупности элементов N_a способами и после каждого из этих выборов элемент b выбирается N_b способами. Тогда выбор и a , и b осуществляется $N_a N_b$ способами (правило произведений).

° Пусть из совокупности, содержащей l элементов, последовательно k раз выбирается по одному элементу с возвращением извлеченного элемента каждый раз в исходную совокупность. Тогда число N_1 способов выбрать k элементов будет

$$N_1 = l^k \quad (k \leq l). \quad (1.27)$$

° Пусть каждый извлеченный элемент не возвращается обратно. Число способов N_2 выбора k элементов из совокупности l будет определяться числом размещений из l по k :

$$N_2 = A_l^k. \quad (1.28)$$

° Пусть выбирается k элементов из l . Предполагается, что при одних и тех же элементах совокупности группы по k элементов считаются одинаковыми независимо от порядка перечисления элементов. Число различных групп из k элементов, которые могут быть образованы, будет определяться числом сочетаний из l по k :

$$N_3 = C_l^k. \quad (1.29)$$

° Пусть в исходной совокупности l имеется s различных совокупностей, состоящих соответственно из $l_1, l_2, \dots, l_s$ элементов. Тогда, в случае, когда из этой совокупности осуществляется отбор по схеме: k_1 из l_1 элементов, k_2 из l_2 элементов, $\dots$, k_s из l_s элементов, то общее число N_4 способов образования s групп по $k_1, k_2, \dots, k_s$ элементов без учета порядка элементов в каждой из них может быть найдено как произведение сочетаний:

$$N_4 = C_{l_1}^{k_1} C_{l_2}^{k_2} \dots C_{l_s}^{k_s}, \quad \sum_{j=1}^s l_j = l. \quad (1.30)$$

Пример 1.3. Кодовый замок имеет 10 кнопок, соответствующих цифрам от 0 до 9. Код замка — двузначный, образованный различными числами. Какова вероятность набора правильного кода при выборе кнопок наугад?

□ Решение. Пары различных цифр, которые могут быть набраны, отличаются друг от друга как составом, так и порядком расположения цифр. Это означает, что общее число элементарных исходов в рассматриваемых условиях определяется числом размещений из 10 по 2 и составляет $n = A_{10}^2 = 10! / 8! = 90$. Событию A (выбор правильного сочетания) благоприятствует только один исход ($m = 1$). Согласно (1.21), искомая вероятность $P(A) = 1/90$. ■

Пример 1.4. В общем числе 10 черных и белых шаров 6 черных. Какова вероятность того, что среди наугад взятых 5 шаров окажется 3 черных?

□ Решение. Общее число возможных исходов по выбору 5 шаров из 10 определяется числом сочетаний из 10 по 5: $n = C_{10}^5 = 10! / 5! \cdot 5! = 252$. Для подсчета числа исходов, благоприятствующих событию A (среди наугад взятых 5 шаров 3 черных), необходимо воспользоваться формулой (1.30). В данном случае имеем две совокупности: черные шары ($l_1 = 6$) и белые шары ($l_2 = 4$).

В отобранной наугад пятерке шаров для события A значимы 3 черных и 2 белых. Из первой группы $k_1 = 3$ шара могут быть выбраны C_6^3 , из второй $k_2 = 2$ шара могут быть выбраны C_4^2 способами. Тогда число исходов, содержащих 3 черных шара, составляет $m = C_6^3 C_4^2 = 120$. Вероятность $P(A) = 10/21$. ■

Пример 1.5. Пусть в группе из $N = 100$ студентов $M = 20$ — круглые отличники. Внешней комиссией для последующего тестирования отбирается $n = 10$ студентов (выборка без возвращения). Какова вероятность того, что среди отобранных студентов число отличников будет равно $m = 5$?

□ Решение. Предположим, что мы перенумеровали всех студентов. Тогда общее число групп из $n = 10$ человек в множестве из 100, учитывая, что отдельные группы будут отличаться хотя бы одним номером (порядок следования номеров в группах не важен), будет определяться числом сочетаний из 100 по 10: C_{100}^{10} . Общее число сочетаний по $m = 5$ для отличников равно C_{20}^5 , а число сочетаний по $(n - m)$ из общего числа не отличников составляет $C_{100-20}^{10-5} = C_{80}^5$. В этих условиях число благоприятствующих случаев для формулы (1.21) получим, комбинируя каждое из C_{20}^5 сочетаний с каждым из C_{80}^5 сочетаний. Число благоприятствующих исходов будет определяться произведением $C_{20}^5 C_{80}^5$, а искомая вероятность интересующего нас события составит $C_{20}^5 C_{80}^5 / C_{100}^{10} = 0.022$. При вычислениях числа сочетаний была использована встроенная функцией **combin** в Mathcad. Ниже приведена копия mcd-файла, в котором **combin**(Q, R) введена как функция пользователя $C(Q, R)$, позволяющая получать значения сочетаний при произвольных Q и R . ■

$$C(Q, R) := \text{combin}(Q, R)$$

$$\begin{aligned} C(20, 5) &= 15504 & C(80, 5) &= 24040016 \\ C(100, 10) &= 17310309456440 \end{aligned}$$

$\frac{C(20, 5) \cdot C(80, 5)}{C(100, 10)} = 0.022$

Глава 2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

2.1. Вероятность суммы событий. Сложение вероятностей

Сумма (объединение) событий рассматривалась нами ранее в *разд. 1.2*. Напомним здесь, что результатом объединения событий служит появление хотя бы одного из совокупности объединяемых событий. Тогда для полной группы событий, определенной в *разд. 1.2* как множество возможных событий, состоящих из s несовместных событий A_j ($j = 1, 2, \dots, s$), в сумме составляющих достоверное событие (см. (1.16)) имеем:

$$A_1 + A_2 + \dots + A_s = \Omega.$$

Для полной группы событий справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. Сумма вероятностей попарно несовместных событий, составляющих полную группу, равна единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_s) = 1. \quad (2.1)$$

▷ Доказательство прямо следует из аксиом вероятностей (1.18), (1.19). Действительно, вероятность суммы попарно несовместных событий, в силу аксиомы (1.19), равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_s) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_s). \quad (2.2)$$

Но события A_j ($j = 1, 2, \dots, s$) по условию составляют полную группу, т. е.

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_s) = P(\Omega). \quad (2.3)$$

Согласно аксиоме (1.18) вероятность достоверного события $P(\Omega) = 1$, что совместно с (2.2) и (2.3) подтверждает справедливость (2.1). ◀

Следствиями рассмотренной теоремы служат утверждения:

◦ сумма вероятностей противоположных событий равна единице, т. е.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1; \quad (2.4)$$

◦ вероятность невозможного события равна нулю, т. е.

$$P(\emptyset) = 0. \quad (2.5)$$

▷ Доказательство (2.4) следует из свойств противоположных событий (1.7), которые по определению несовместны и в сумме составляют достоверное событие. Невозможное событие противоположно достоверному, поэтому, в силу (1.7), (2.4), $P(\Omega) + P(\emptyset) = 1$, откуда, учитывая $P(\Omega) = 1$, следует (2.5). ◀

Предположим теперь, что условие несовместности событий не налагается.

Для произвольных событий A и B ($AB \neq \emptyset$ или $AB = \emptyset$) справедлива следующая теорема, определяющая общее правило сложения вероятностей.

Теорема 2.2. Вероятность суммы двух событий (совместных или несовместных) равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (2.6)$$

▷ Рассмотрим таблицу с вероятностями различных комбинаций событий A , B и их дополнений.

Событие	A	$\bar{A}$
B	$P(AB)$	$P(\bar{A}B)$
$\bar{B}$	$P(A\bar{B})$	$P(\bar{A}\bar{B})$

Отметим, что каждое из событий A и B может быть представлено суммой двух несовместных событий (см. комментарий ^(*) после доказательства):

$$A = AB + A\bar{B}; B = AB + \bar{A}B; [(AB)(A\bar{B})] = \emptyset; [(AB)(\bar{A}B)] = \emptyset. \quad (2.7)$$

Поэтому по правилу сложения вероятностей двух несовместных событий имеем:

$$P(A) = P(AB) + P(A\bar{B}); \quad (2.8)$$

$$P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B). \quad (2.9)$$

С другой стороны, события AB , $A\bar{B}$, $\bar{A}B$, $\bar{A}\bar{B}$ составляют полную группу, поэтому $P(AB) + P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) + P(\bar{A}\bar{B}) = 1$, откуда

$$1 - P(\bar{A}\bar{B}) = P(AB) + P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B). \quad (2.10)$$

Левая часть равенства (2.10) представляет собой вероятность суммы событий A и B , поскольку событие $\bar{A}\bar{B}$ служит дополнением к событию $A+B$ согласно (1.9). Таким образом $P(A+B) + P(\bar{A}\bar{B}) = 1$, $1 - P(\bar{A}\bar{B}) = P(A+B)$ и

$$P(A+B) = P(AB) + P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B). \quad (2.11)$$

Согласно (2.8) первые два слагаемых правой части равенства (2.11) равны $P(A)$, а последнее слагаемое (2.11) выражается из (2.9): $P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB)$, что в результате дает выражение (2.6). ◀

^(*) Представление событий суммой двух несовместных событий нуждается в пояснении. Пусть, например, определяется вероятность того, что купленное в магазине изделие будет кондиционным (событие A). Пусть также известно, что изделие этого типа выпускается двумя заводами (события B и $\bar{B}$ — изделие выпущено первым и вторым заводами), процент выпуска кондиционных изделий на каждом из которых различен. Событие $\bar{A}$ — изделие некондиционное, причем $A\bar{A} = B\bar{B} = \emptyset$. Тогда события, например, AB и $A\bar{B}$, состоящие в том, что кондиционная деталь выпущена первым и вторым заводами, являются несовместными. Купленное в магазине кондиционное изделие может быть выпущено первым или вторым заводом, поэтому $A = AB + A\bar{B}$, т. е. событие A представляется суммой двух несовместных событий.

Аналогичное разложение событий на суммы (2.7) имеет место в задачах выборки объекта из двух различных групп (см. пример 2.2), проверки кондиционности прибора на двух стендах, при появлении события в рамках множества попарно несовместных гипотез и в других задачах.

Общее правило сложения вероятностей (2.6) легко распространяется на случай произвольного числа событий. Так, для трех событий имеем:

$$P(A + B + C) = P[A + (B + C)] = P(A) + P(B + C) - P[A(B + C)];$$

$$P(B + C) = P(B) + P(C) - P(BC);$$

$$P[A(B + C)] = P[AB + AC] = P(AB) + P(AC) - P(ABC);$$

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC). \quad (2.12)$$

При выводе (2.12) использовались свойства ассоциативности (1.3) суммы событий и свойство дистрибутивности (1.4) событий.

Легко убедиться в том, что общие правила сложения вероятностей (2.6) и (2.12) для несовместных событий (попарно несовместных в случае, когда число событий больше двух) принимают вид (1.19) и (2.2).

2.2. Независимые события. Вероятность их произведения

В теории вероятностей большое значение имеют задачи, в которых вычисляются вероятности произведения (совместного появления) событий. Результат будет зависеть от степени взаимного влияния событий. Также как и при анализе вероятностей суммы событий, анализ вероятностей произведения начнем с простейшего случая, связанного с понятием независимых событий.

Событие A называется **не зависящим** от события B , если появление события B не меняет вероятности появления события A . Если событие A не зависит от события B , то и событие B не зависит от события A . Это означает, что **свойство независимости взаимно**.

Определение. События A и B называются независимыми, если вероятность их совместного появления равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A B) = P(A) P(B). \quad (2.13)$$

Выражение (2.13) служит условием независимости событий A и B .

События A и B , не обладающие свойством (2.13), называют зависимыми. В следующем разделе будет дано другое определение независимых событий.

Факт априорной независимости реальных событий при решении прикладных задач часто устанавливается по смыслу решаемой задачи. Так, пусть при осуществлении контроля партии деталей делается выборка с возвращением: очередная наугад выбранная деталь возвращается обратно. Тем самым каждый раз восстанавливаются исходные условия испытаний. Поэтому выявление некондиционной детали при первом, втором и последующих испытаниях будут независимыми событиями.

Другим примером может служить стрельба по цели двух стрелков, когда событие «стрелок №1 поразил цель» и событие «стрелок №2 поразил цель» независимы по смыслу. Вероятность поражения цели первым стрелком не зависит от того, поражена ли цель другим стрелком. Поэтому вероятность совме-

стного поражения цели двумя стрелками можно найти, перемножая вероятности поражения цели каждым из стрелков.

Условие (2.13) независимости двух событий можно обобщить на случай нескольких событий. Для этого необходимо ввести понятия попарной независимости и независимости в совокупности.

Несколько событий называются **попарно независимыми**, если независимы каждые два из них. Так, события A , B и C будут попарно независимыми, если независимы события A и B , A и C , B и C .

События $A_1, A_2, \dots, A_s$ называются **независимыми в совокупности**, если для любых k из них выполняется соотношение

$$P(A_j A_{j+1} \dots A_{j+k-1}) = \prod_{i=j}^{j+k-1} P(A_i). \quad (2.14)$$

Выражение (2.14) при $k = 2$ отражает условие попарной независимости; при $k = s$ это выражение дает общее правило определения вероятности произведения независимых в совокупности событий:

$$P(A_1 A_2 \dots A_s) = \prod_{i=1}^s P(A_i). \quad (2.15)$$

Это правило гласит: вероятность совместного наступления нескольких независимых в совокупности событий равна произведению вероятностей каждого из событий. Доказательство (2.15) тривиально и основано на последовательном использовании свойства (1.3) произведений событий и условия (2.13).

Анализ соотношения (2.14) позволяет выявить ряд практически важных следствий из общего правила. Рассмотрим некоторые из них, необходимые в дальнейшем.

Следствие 1. Из попарной независимости событий не следует их независимости в совокупности. Действительно, условия попарной независимости — лишь частный случай (2.14), соответствующий $k = 2$.

Следствие 2. Независимость событий A и B влечет за собой независимость следующих пар событий: A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и B , $\bar{A}$ и $\bar{B}$. Доказательство следует из анализа вероятности событий A , B и $\bar{A}$ соответственно. Каждое из этих событий может быть представлено суммами двух несовместных событий (см. (2.7) и пояснения ^(*) на стр. 29)

$$A = AB + A\bar{B}; B = AB + \bar{A}B; \bar{A} = \bar{A}B + \bar{A}\bar{B}.$$

По правилу сложения вероятностей несовместных событий имеем (см. (2.8), (2.9)):

$$P(A) = P(AB) + P(A\bar{B}); P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B); P(\bar{A}) = P(\bar{A}B) + P(\bar{A}\bar{B}).$$

Первое из этих выражений используем для доказательства независимости A и $\bar{B}$. В силу независимости A и B имеем $P(A) = P(A)P(B) + P(A\bar{B})$, откуда

$$P(A\bar{B}) = P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(\bar{B}).$$

Аналогично, с использованием выражений для $P(B)$ и $P(\bar{A})$, может быть доказана независимость двух оставшихся пар событий.

Следствие 3. Независимость в совокупности событий $A_1, A_2, \dots, A_s$ влечет независимость в совокупности дополнений к этим событиям:

$$P\left(\prod_{i=1}^s \bar{A}_i\right) = \prod_{i=1}^s P(\bar{A}_i). \quad (2.16)$$

Доказательство (2.16) может быть получено многократным использованием утверждения, приведенного в следствии 2 и касающегося дополнений.

Следствие 4. Вероятность $P(A)$ события A , состоящего в появлении хотя бы одного события из независимых в совокупности событий $A_1, A_2, \dots, A_s$, равна:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \dots q_s. \quad (2.17)$$

Здесь через q_j ($j = 1, 2, \dots, s$) обозначены вероятности $P(\bar{A}_j)$ дополнений к событиям A_j . В частном случае, при одинаковых вероятностях p появления каждого события в отдельном испытании, вероятности непоявления этих событий $q = 1 - p$ также одинаковы для каждого $j = 1, 2, \dots, s$ и выражение (2.17) приобретает вид

$$P(A) = 1 - q^s. \quad (2.18)$$

Для доказательства (2.17) отметим, что событие A (появление хотя бы одного события) означает наступление либо одного, либо двух, либо трех и т. д., либо всех событий. Противоположное событие $\bar{A}$ (ни одно из событий не наступило) выразится произведением дополнений к событиям A_j , поэтому:

$$\bar{A} = \prod_{i=1}^s \bar{A}_i; \quad A + \prod_{i=1}^s \bar{A}_i = \Omega; \quad P(A) + P\left(\prod_{i=1}^s \bar{A}_i\right) = 1,$$

откуда, учитывая (2.16) и обозначение $P(\bar{A}_j) = q_j$, получаем (2.17).

Ниже, в разд. 3.1, трактовка следствия 4 будет дана с позиций композиции независимых испытаний с двумя исходами (схемы испытаний Бернулли).

Задания к самостоятельной работе:

* Вероятность попадания α -частиц и β -частиц в контрольную зону равна 0.6 и 0.8. Какова вероятность одновременного попадания α - и β -частиц в эту зону.

Ответ: 0.48.

* В цехе имеется 3 однотипных станка. Вероятность того, что каждый станок работает в данный момент, равна 0.8. Какова вероятность события A , состоящего в том, что в данный момент работает хотя бы один станок.

Ответ: 0.992.

* Вероятность попадания каждой из однотипных элементарных частиц в контрольную зону одинакова. Какова эта вероятность, если вероятность попадания частицы хотя бы один раз при трех испытаниях равна 0.973.

Ответ: 0.7.

2.3. Условная вероятность. Вероятность произведения событий (общий случай)

Рассмотрим теперь вероятность совместного наступления событий без наложения требований их независимости.

Ранее отмечалось, что вероятность появления событий зависит от условий испытаний и может менять свою величину при изменении этих условий. Обозначим совокупность условий испытаний через Q . Если при анализе вероятности события A учитываются только условия Q , без учета каких-либо дополнительных условий, то такую вероятность $P(A)$ называют **безусловной**. Поэтому ранее рассмотренные вероятности, строго говоря, правильнее было бы называть безусловными. При анализе вероятности события A с учетом дополнительного условия, заключающегося в том, что произошло событие B , используется понятие условной вероятности.

Условной вероятностью $P(A/B)$ называют вероятность события A при условии, что событие B уже произошло. Вычисление условных вероятностей осуществляется с использованием безусловных вероятностей по следующему правилу: условная вероятность события A при условии, что событие B уже произошло, равна частному от деления вероятности совместного наступления этих двух событий на вероятность условия:

$$P(A/B) = P(AB)/P(B); P(B) \neq 0. \quad (2.19)$$

Из определения условной вероятности следует общее правило умножения для вычисления вероятности совместного наступления событий A и B :

$$P(AB) = P(B) P(A/B) = P(A) P(B/A), \quad (2.20)$$

т. е. вероятность произведения двух событий равна произведению безусловной вероятности осуществления одного из них на условную вероятность другого, при условии, что первое уже наступило.

Из приведенных определений следуют свойства условной вероятности:

1. $P(A/A) = P(B/B) = 1$.
2. Пусть событие A может быть представлено в виде суммы двух несовместных событий A_1 и A_2 (см. пояснения^(*) на стр. 29), т. е.

$$A = A_1 + A_2; A_1 A_2 = \emptyset.$$

Тогда условная вероятность события A при условии наступления события B будет определяться суммой условных вероятностей составляющих при том же условии

$$P(A/B) = P(A_1/B) + P(A_2/B).$$

Это означает, что правило сложения вероятностей двух несовместных событий остается справедливым и для условных вероятностей. Доказательство, основанное на применении выражения (2.19) и учитывающее несовместность событий $A_1 B$ и $A_2 B$, оставляем сделать читателю самостоятельно.

3. При независимости событий A и B условная вероятность становится равной безусловной: $P(A/B) = P(A)$; $P(B/A) = P(B)$.

Доказательство прямо следует из выражений (2.19) и (2.13).

Общее правило (2.20) умножения вероятностей может быть распространено на случай произвольного числа событий. Например, для событий A, B, C :

$$P(ABC) = P(A)P(B/A)P(C/AB). \quad (2.21)$$

Действительно, обозначая $AB = D$, получаем $P(DC) = P(D)/P(C/D)$. Но вероятность $P(D) = P(A)P(B/A)$, что в совокупности дает выражение (2.21).

В общем случае вероятность совместного наступления s событий равна произведению безусловной вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем условные вероятности каждого последующего события предполагают, что все предыдущие события уже произошли:

$$P(A_1 A_2 \dots A_s) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_2 A_1) \dots P(A_s / \prod_{i=1}^{s-1} A_i). \quad (2.22)$$

Важно отметить, что эта общая формула не налагает ограничений на порядок перечисления событий.

Рассмотрим типовой пример на определение вероятностей совместного появления событий в общем случае.

Пример 2.1. В ящике 2 круглых и 3 ромбических детали. Осуществляются две последовательных выборки по одной детали без возвращения. Определить вероятность появления ромбической детали (событие B) при второй выборке, если при первой была извлечена круглая деталь (событие A).

□ Решение. На момент второго испытания в ящике остались 4 детали, из которых 3 ромбических. Поэтому условная вероятность

$$P(B/A) = 3/4.$$

Получить решение этого примера можно и с использованием формулы (2.19). Для этого найдем $P(AB)$ и $P(A)$. Вероятность $P(AB)$ того, что в первом отборе появилась круглая деталь, а во втором — ромбическая, определяется по методике, рассмотренной в разд. 1.5 (выражение (1.21)). Общее число n исходов, в которых появляются две разнотипные детали (неважно, в каком порядке), равно числу размещений $n = A_5^2 = 20$. Число m исходов, благоприятствующих появлению события AB , равно $2 \cdot 3 = 6$. Поэтому $P(AB) = 6/20 = 0.3$.

Вероятность $P(A) = 2/5$, откуда $P(B/A) = P(AB)/P(A) = 3/4$. ■

Задания к самостоятельной работе:

* Доказать, что при независимости событий A, B и C , условные вероятности $P(A/BC), P(B/AC), P(C/AB)$ равны безусловным вероятностям $P(A), P(B), P(C)$.

* Используя данные примера 1, пояснить смысл и рассмотреть варианты получения $P(A/B)$.

* В урне имеется 7 черных и 3 белых шара. Осуществляется поочередное изъятие сначала одного шара, затем — другого (без возвращения). Определить вероятность появления шара одного цвета при условии, что перед ним вытаскивается шар другого цвета. Определить вероятность появления двух разноцветных шаров с использованием (2.20) и (1.21).

Ответ: $P(A/B) = 7/9$, $P(B/A) = 3/9$, $P(AB) = 7/30$ (событие A — вытащен черный шар, событие B — вытащен белый шар).

2.4. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Рассмотренные в *разд. 2.1—2.3* правила определения вероятности суммы и произведения событий не исчерпывают перечня вариантов реальных задач анализа вероятностей. При определении вероятностей сложных событий рассмотренные правила часто используются совместно. Пусть совокупность n попарно несовместных событий (гипотез) $H_1, H_2, \dots, H_n$ составляет полную группу. Заранее неизвестно, какое из этих событий наступит, поэтому их называют гипотезами. Таким образом, $H_1 + H_2 + \dots + H_n = \Omega$, $H_i H_j = \emptyset$; $i \neq j$ ($i = 1, n$; $j = 1, n$) и на основании аксиомы (1.18)

$$P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_n) = 1. \quad (2.23)$$

Пусть некоторое событие A происходит совместно с одним из событий H_i , т. е. в одном из попарно несовместных видов (см. пояснения ^(*) на стр. 29)

$$A = AH_1 + AH_2 + \dots + AH_n; \quad (AH_i)(AH_j) = \emptyset, \quad i \neq j \quad (2.24)$$

и известны условные вероятности $P(A/H_i)$ события A при каждой из гипотез.

Тогда вероятность события A равна

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(AH_i) = \sum_{i=1}^n P(H_i) P(A/H_i). \quad (2.25)$$

Выражение (2.25) носит название **формулы полной вероятности**. Доказательство (2.25) опирается на правило сложения вероятностей несовместных событий и использование соотношения (2.20) для вероятности совместного наступления событий A и H_i .

Выше отмечалось, что заранее неизвестно, с какой из гипотез появится событие A . Поэтому H_i часто называют гипотезами относительно A . Важно отметить, что правдоподобность (мера справедливости) каждой гипотезы до проведения испытания остается неясной и значения вероятностей $P(H_i)$ отдельных гипотез до испытания могут лишь только предварительно назначаться в рамках выражения (2.23). Это обстоятельство позволяет называть вероятности $P(H_i)$ априорными (доопытными). Уточнить меру справедливости каждой из гипотез может только проведение испытаний.

Предположим теперь, что исходные данные относительно совокупности гипотез и события A , принятые в начале этого раздела, сохраняют свою силу.

Это означает, что даны априорные вероятности, удовлетворяющие выражению (2.23), известны условные вероятности $P(A/H_i)$, а событие A реализуется в одном из несовместных видов (2.24) и его вероятность определяется формулой (2.25).

Пусть также в этих условиях проведено испытание, в результате которого появилось событие A . Этот факт неизбежно приведет к изменению вероятностей гипотез по сравнению с априорными значениями, поскольку с появлени-

ем события A получена новая информация и о конкурирующих гипотезах, при которых этот факт только и мог произойти. Новые значения вероятностей гипотез при условии, что событие A уже произошло, обозначаются как $P(H_i / A)$ и носят название апостериорных (послеопытных).

Условные вероятности $P(H_i / A)$ по определению (см. (2.19)) равны

$$P(H_i / A) = P(H_i A) / P(A),$$

но вероятность совместного появления событий A и H_i в силу (2.20) может быть выражена через априорную вероятность гипотезы $P(H_i)$ и известную условную вероятность $P(A / H_i)$:

$$P(H_i A) = P(H_i)P(A / H_i).$$

Подставляя последнее выражение в $P(H_i / A)$ и используя формулу (2.25) полной вероятности, окончательно имеем:

$$P(H_i / A) = P(H_i)P(A / H_i) / P(A) = P(H_i)P(A / H_i) / \sum_{j=1}^n P(H_j)P(A / H_j). \quad (2.26)$$

Полученное выражение носит названия **формулы Байеса** для вероятности гипотез по имени автора — английского математика, который опубликовал эти результаты в 1764 г. Новая оценка вероятности гипотезы H_i по формуле Байеса находится как частное от деления произведения априорной вероятности этой гипотезы и вероятности появления события A при гипотезе H_i на сумму таких произведений для каждой из n гипотез. Возможность получения новых значений вероятностей гипотез, как отмечалось ранее, появилась после того, как было проведено испытание и стал известным его результат.

Пример 2.2. Вуз представил контрольной комиссии 5 групп студентов следующего состава:

- 1) 2 группы по 8 человек каждая, из которых 2 отличника;
- 2) 3 группы по 10 человек каждая, из которых 6 отличника.

Для проверки знаний комиссия наугад выбирает одну группу из пяти и из этой группы также наугад выбирается студент. Какова вероятность события A , состоящего в том, что выбранный студент окажется отличником? Если событие A произошло, каковы вероятности того, что отличник принадлежит к группам первого и второго типов?

□ Решение. Обозначим группы первого типа через H_1 , второго — через H_2 . Отличник может принадлежать к группам первого или второго типов, т. е. событие A подразделяется на два несовместных вида: AH_1 или AH_2 , причем в силу (2.24) и (2.25) $A = AH_1 + AH_2$; $P(A) = P(AH_1) + P(AH_2)$.

По правилу умножения (2.20)

$$P(AH_1) = P(H_1)P(A / H_1); P(AH_2) = P(H_2)P(A / H_2).$$

Согласно условиям задачи $P(H_1) = 2/5$; $P(H_2) = 3/5$; $P(A / H_1) = 2/8$; $P(A / H_2) = 6/10$, поэтому $P(AH_1) = 0.1$; $P(AH_2) = 0.36$, а искомая вероятность выбрать отличника из групп указанного состава $P(A) = 0.46$.

Предположим теперь, что выбранный комиссией студент — отличник. Тогда апостериорные вероятности принадлежности отличника к группам первого и второго типов должны вычисляться по формуле Байеса (2.26):

$$P(H_i/A) = P(H_i)P(A/H_i) / P(A), i = 1, 2.$$

Подставляя в эту формулу полученные ранее значения, получим:

$$P(H_1/A) = 5/23; P(H_2/A) = 18/23.$$

Сопоставление апостериорных вероятностей гипотез $P(H_1/A)$ и $P(H_2/A)$ с априорными $P(H_1)$ и $P(H_2)$ показывает, что более правдоподобным является принадлежность выбранного отличника к группе второго типа. ■

Задания к самостоятельной работе:

* Изделие выпускается двумя заводами. Первый поставляет на рынок 70% продукции, второй — 30%. Выпуск стандартных изделий для первого завода составляет 83%, для второго — 63%. Проверкой купленного в магазине изделия установлено, что оно стандартное. Какова вероятность приобрести стандартное изделия в описанных условиях? Какова вероятность того, что приобретенное изделие выпущено вторым заводом?

Ответ: $P(A) = 0.77$; $P(H_2/A) = 0.245$ (H_2 — гипотеза, что изделие выпущено вторым заводом; событие A заключается в том, что изделие стандартно).

* Автозавод осуществляет проверку автомашин на двух стендах. Из каждых 100 машин на первый стенд попадает 55, на второй — 45. Стенды отличаются качеством проверки. Из каждой сотни кондиционных машин на первом стенде признается годными 96, на втором — 98. Определить вероятность признания автомашин соответствующими нормам и вероятность того, что решение о соответствии машины нормам принято после испытания на втором стенде.

Ответ: $P(A) = 0.97$; $P(H_2/A) = 0.445$ (A — событие, заключающееся в том, что машина соответствует нормам; H_2 — гипотеза, что проверка проводилась на втором стенде).

* Анализом качества микросхем установлено, что 65% из них имеют повышенный уровень качества, остальные соответствуют техническим нормам. При проверке на стенде платы, собранной из высококачественных микросхем, выявлено, что вероятность безотказной работы платы за T часов составляет 0.98. Надежность плат, собранных из обычных микросхем, характеризуется вероятностью безотказной работы, равной 0.79 за время T . Какова вероятность того, что проверяемая плата, безотказно отработавшая T часов, собрана из высококачественных микросхем?

Ответ: $P(H_1/A) = 0.697$ (A — событие, заключающееся в том, что плата безотказно работала T часов; H_1 — гипотеза, что плата собрана из высококачественных микросхем).

Глава 3. КОМПОЗИЦИЯ НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЙ

Композицией испытаний называется сложное испытание.

Поясним это определение на примере. Пусть осуществляются два каких-либо испытания с n и m исходами:

E , порождающее множество элементарных исходов $E_1, E_2, \dots, E_k, \dots, E_q$;

D , порождающее множество элементарных исходов $D_1, D_2, \dots, D_j, \dots, D_r$.

Упорядоченные пары этих двух испытаний (обозначим условно ED) можно рассматривать к качестве некоторого сложного испытания, элементарные исходы которого будут образованы всеми возможными комбинациями n исходов испытания E с m исходами испытания D . Сложное испытание ED в данном случае является композицией двух испытаний.

Пространство элементарных исходов испытания ED будут составлять qr исходов вида $E_k D_j$, ($k = \overline{1, q}, j = \overline{1, r}$). События (сложные события) в поле испытания ED будут составлены всевозможными суммами событий, соответствующих $E_k D_j$, например, $E_3 D_4 + E_1 D_7$. По правилу сложения вероятностей будут определяться и вероятности событий в поле испытания ED .

Несмотря на то, что вероятности $P(E_k)$ и $P(D_j)$ элементарных событий испытаний E и D известны, вероятность события $E_k D_j$ лишь в частном случае будет определяться только вероятностями $P(E_k)$ и $P(D_j)$ (см. разд. 2.2, 2.3).

Два испытания называют **независимыми**, если в поле событий, образованном композицией их исходов, вероятности элементарных событий вида $E_k D_j$ определяются по правилу умножения вероятностей независимых событий:

$$P(E_k D_j) = P(E_k)P(D_j).$$

Это правило рассмотрено в разд. 2.2 (см. (2.13)) в связи с определением независимых событий. Применительно к двум испытаниям приведенное соотношение означает, что исходы первого испытания не влияют на вероятность появления того или иного исхода во втором испытании. Последовательность таких испытаний определяется как композиция двух независимых испытаний.

Пусть теперь производится n испытаний, причем результатом первого испытания является A_1 , второго — A_2 , последнего — A_n .

Композицией n независимых испытаний называется такое сложное испытание, для любого возможного результата $A_1 A_2 \dots A_n$ которого справедливо соотношение

$$P(A_1 A_2 \dots A_i \dots A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_i) \dots P(A_n),$$

где вероятность $P(A_i)$ определена для возможного исхода i -го испытания независимо от всех других испытаний.

Ниже рассматривается композиция n независимых испытаний, каждое из которых имеет два независимых исхода (успех или неуспех). Подобная схема испытаний в условиях, когда вероятности успеха не зависят от номера испы-

тания, носит название схемы Бернулли по имени швейцарского математика Якова Бернулли (1654—1705), впервые исследовавшего ее основные закономерности.

3.1. Композиция независимых испытаний при одинаковых вероятностях успеха

Рассмотрим сложное испытание $\mathbf{A}$, составленное последовательностью (серией) n независимых испытаний, образованной повторением одного и того же испытания в одинаковых условиях. В качестве элементарных исходов для каждого отдельного испытания серии будем предполагать два исхода: появление события A (успех) с вероятностью $p = \text{const}$ и события $\bar{A}$ (неуспех) с вероятностью $q = 1 - p$.

Поставим задачу определить вероятность того, что в серии из n испытаний событие A появилось ровно k раз ($k = 0, 1, 2, \dots, n$).

Каждая серия как сложное испытание $\mathbf{A}$ будет характеризоваться числом k появлений события A и числом $(n - k)$ появления $\bar{A}$. Результат серии будем фиксировать, последовательно проставляя символ A или $\bar{A}$ на месте, соответствующем номеру составляющего серию отдельного испытания. Тогда пространство элементарных событий сложного испытания $\mathbf{A}$, образованного последовательностью n однотипных испытаний, будет составлено сложными событиями вида

$$b_{n,k} = A \bar{A} \bar{A} A A \dots \bar{A} A. \quad (3.1)$$

Здесь $b_{n,k}$ — сложное событие серии n испытаний, в которых успех A появился ровно k раз.

В (3.1) событие A появилось в первом, четвертом, пятом и последнем из отдельных испытаний, входящих в рассматриваемую серию, всего k раз. Событие $\bar{A}$ в (3.1) наступило во втором, третьем и предпоследнем испытаниях серии; общее число появлений события $\bar{A}$ в событии (3.1) равно $(n - k)$. В силу независимости элементарных испытаний, вероятность сложного события $b_{n,k}$, состоящего в том, что в серии из n однотипных испытаний событие A появится ровно k раз и не появится $(n - k)$ раз, будет равна

$$P(b_{n,k}) = P(A)P(\bar{A})P(\bar{A})P(A)P(A) \dots P(\bar{A})P(A) = p^k q^{n-k}. \quad (3.2)$$

Другие события, входящие в множество пространства элементарных событий сложного испытания $\mathbf{A}$, могут иметь такое же число k появления успеха A , но порядок следования символов A и $\bar{A}$ в них будет отличен от приведенного в (3.1). Например, при $n = 3$ имеем совокупность из трех сложных событий, в которых успех встречается $k = 2$ раза: $AA\bar{A}$, $A\bar{A}A$, $\bar{A}AA$.

Все сложные события, имеющие различный порядок следования символов A и $\bar{A}$, но характеризующиеся одним и тем же числом k символов A и числом $(n - k)$ символов $\bar{A}$, объединим в сложное событие $B_{n,k}$. Входящие в группу $B_{n,k}$ сложные события вида (3.1) несовместны и однотипны, поскольку каждое из

них имеет одну и ту же вероятность (3.2). Число таких однотипных событий $b_{n,k}$ в $B_{n,k}$ определяется числом сочетаний из n по k (см. (1.29)), т. е. C_n^k , поскольку группы по k элементов из n мы будем считать одинаковыми независимо от порядка следования элементов.

Таким образом, сложное событие $B_{n,k}$ (появление k раз события A в n испытаниях), состоит из C_n^k попарно несовместных однотипных событий $b_{n,k}$ с одинаковыми вероятностями (3.2). По правилу (2.2) вероятность суммы C_n^k попарно несовместных событий есть сумма вероятностей (3.2) каждого из составляющих событий $b_{n,k}$. Отсюда вероятность $P(B_{n,k}) = P_n(k)$ появления k раз события A в серии n независимых испытаний равна:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}; \quad k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (3.3)$$

Полученное выражение носит название **формулы Бернулли**.

Формула (3.3) позволяет определять вероятность $P_n(0)$ отсутствия успеха во всех испытаниях серии, вероятность $P_n(1)$ появления успеха в одном испытании, вероятность $P_n(n)$ появления успехов во всех отдельных испытаниях серии. Вероятности (3.3) носят название биномиальных вероятностей, что объясняется связью основных соотношений, касающихся числа событий $b_{n,k}$ и сумм вероятностей $P_n(k)$ (3.3) с биномом Ньютона.

Действительно, общее число событий $b_{n,k}$, составляющих сложные события $B_{n,k}$ при $k = 0, 1, 2, \dots, n$, определяется суммой сочетаний

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^k + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n.$$

Нетрудно заметить, что эта сумма представляет формулу Ньютона

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n \quad (3.4)$$

при $a = 1$ и $b = 1$. Отсюда следует, что сумма сочетаний $\sum_{k=0}^n C_n^k$ равна 2^n :

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^k + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n. \quad (3.5)$$

С другой стороны, события $B_{n,0}, B_{n,1}, B_{n,2}, \dots, B_{n,n}$ попарно несовместны и составляют полную группу, поэтому сумма их вероятностей равна единице:

$$\sum_{i=0}^n P_n(i) = P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) + \dots + P_n(n) = 1. \quad (3.6)$$

Это очевидное утверждение, которое не нуждается в доказательстве, может быть, тем не менее, подтверждено. Легко видеть, что при подстановке вероятностей (3.2) в сумму (3.6) последняя преобразуется в бином Ньютона (3.4) с $a = p, b = q$ и общим членом $C_n^k a^{n-k} b^k$:

$$\sum_{i=0}^n P_n(i) = (p + q)^n, \quad (3.7)$$

где p и q — вероятности появления события A и не появления этого события соответственно. В сумме эти вероятности равны единице, т. е. $p + q = 1$, что дает результат (3.6). Доказательство (3.7) предоставляется читателю, который

может проанализировать выражение при $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ и воспользоваться затем методом математической индукции.

Выражение (3.6) представляет вероятность достоверного события, заключающегося в том, что в n испытаниях событие A неизбежно произойдет 0, или 1, или 2, или 3, или ... , или $n - 1$, или n раз.

Пример 3.1. Рассмотрим сложное испытание, образованное повторением трех однотипных испытаний ($n = 3$) с двумя исходами. Согласно (3.5), общее число событий $b_{n,k}$ при трех испытаниях равно 8. Эти события, сложные события $B_{n,k}$ и соответствующие им вероятности (3.2) приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

$B_{3,k}$	$B_{3,0}$	$B_{3,1}$			$B_{3,2}$			$B_{3,3}$
$b_{n,k}$	$\bar{A} \bar{A} \bar{A}$	$\bar{A} \bar{A} A$	$\bar{A} A \bar{A}$	$A \bar{A} \bar{A}$	$AA \bar{A}$	$A \bar{A} A$	$\bar{A} AA$	AAA
$P(b_{n,k})$	$qqq = q^3$	qqr	qrp	pqq	ppq	pqr	qpp	$ppp = p^3$

Появление события A или 0 (не наступление события A), или 1, или 2, или 3 раза в 3 испытаниях представляет собой достоверное событие, поэтому сумма вероятностей (см. нижнюю строку табл. 3.1), согласно (3.6), (3.3), (3.7) и учитывая $(p + q) = 1$, равна: $q^3 + 3pq^2 + 3p^2q + p^3 = (p + q)^3 = 1$.

Следствия формулы Бернулли

Формула Бернулли (3.3) позволяет получить вероятность появления события ровно k раз. Однако при решении практических задач часто возникает необходимость определить вероятности появления события не более или не менее определенного числа раз. Получим значения таких вероятностей.

❖ Вероятность того, что событие A произойдет не более, чем k раз.

Обозначим через $\mathcal{P}_n(k)$ вероятность того, что событие A произойдет не более, чем k раз в n испытаниях, т. е. появится или 0, или 1, или 2, или 3, ... или k раз. Согласно сделанным ранее разъяснениям, вероятность $\mathcal{P}_n(k)$ будет равна сумме первых k членов выражения (3.6), т. е.

$$\mathcal{P}_n(k) = P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) + \dots + P_n(k) = \sum_{i=0}^k P_n(i). \quad (3.8)$$

Эта вероятность называется **кумулятивной** (накопленной) вероятностью.

❖ Вероятность того, что событие A произойдет не менее, чем k раз.

Вероятность того, что событие A произойдет не менее k раз, т. е. или k , или $k + 1$, ... , или n раз, будет равна сумме последних $(n - k + 1)$ слагаемых (3.6). Обозначая вероятность появления события A не менее k раз через $R_n(k)$, получим:

$$R_n(k) = P_n(k) + P_n(k+1) + \dots + P_n(n) = \sum_{j=k}^n P_n(j) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} P_n(i). \quad (3.9)$$

Анализ выражений (3.8) и (3.9) для нахождения кумулятивной вероятности и вероятности появления события не менее k раз позволяет сделать вывод об их взаимосвязи:

$$R_n(k) + \mathcal{P}_n(k-1) = 1. \quad (3.10)$$

Получение значения, например $R_n(k)$, позволяет с помощью (3.10) вычислить $\mathcal{P}_n(k-1)$ и наоборот.

❖ Вероятность того, что событие A произойдет хотя бы один раз.

Ранее, в разд. 2.2, была определена вероятность (см. (2.17), (2.18)) появления хотя бы одного события в серии нескольких испытаний. Для этого вводилось противоположное событие (событие не наступило ни разу). Теперь, с позиций схемы испытаний Бернулли, этот случай достаточно просто может быть проанализирован с использованием соотношения (3.9) для вероятности $R_n(k)$. Сложное событие, состоящее в том, что событие A наступит хотя бы 1 раз в серии n испытаний, означает, что оно произойдет не менее 1 раза, т. е. или 1, или 2, или 3, ..., или n раз. Из сложного события исключается непоявление события A , поэтому искомая вероятность может быть выражена одной из следующих формул:

$$R_n(1) = P_n(1) + P_n(2) + \dots + P_n(n) = \sum_{j=1}^n P_n(j) = 1 - P_n(0). \quad (3.11)$$

Не появление события A при n испытаниях означает, что событие (3.1) выразится произведением n событий $\bar{A}$, т. е. $b_{n,0} = \bar{A} \bar{A} \bar{A} \dots \bar{A} \bar{A} \bar{A}$. Такое событие — единственное в составе $B_{n,0}$, т. е. $B_{n,0} = b_{n,0}$, и его вероятность равна произведению q :

$$P_n(0) = q q q \dots q q q = q^n. \quad (3.12)$$

Подставляя (3.12) в (3.11), окончательное выражение для вероятности появления хотя бы одного события A в серии нескольких испытаний получаем, аналогично (2.17), в следующем виде:

$$R_n(1) = 1 - q^n. \quad (3.13)$$

Формула (3.13) может быть использована для определения минимально необходимого числа независимых испытаний n при заданной вероятности $R_n(1)$ появления хотя бы одного события. Подобная задача рассматривается ниже.

❖ Вероятность того, что событие A произойдет не более одного раза.

В ряде задач требуется определить вероятность появления события A не более одного раза. Эта вероятность определяется по выражению (3.8):

$$\mathcal{P}_n(1) = P_n(0) + P_n(1) = [1 + (n-1)p] q^{n-1}. \quad (3.14)$$

Рассмотрим ряд типовых задач, предварительно указав встроенные функции Mathcad, которые могут быть применены для вычислений по формулам

(3.3), (3.8), (3.9). Значения вероятностей по формуле Бернулли (3.3) выводит встроенная функция **dbinom(k, n, p)**; кумулятивные вероятности (3.8) вычисляются функцией **pbinom(k, n, p)**. Для вычисления числа сочетаний предусмотрена встроенная функция **combin(n, k)**, применявшаяся в разд. 1.5.1.

Задача 3.1. В процессе проверки качества деталей на контроль взято 10 деталей, из которых наугад осуществляется выборка отдельных деталей с возвращением в контрольную группу после проверки. Доля некондиционных деталей во всей партии равна 0.05. Каковы вероятности обнаружить в контрольной группе:

- 1) некондиционные детали?
- 2) не более 2 некондиционных деталей?
- 3) не менее 2 некондиционных деталей?

□ Решение. По условию задачи $k = 2$, $n = 10$, $p = 0.05$, $q = 1 - p = 0.95$.

Вероятность обнаружить 2 некондиционные детали из 10 вычисляется по формуле (3.3): $P_{10}(2) = 0.075$. Ответ на второй вопрос задачи дает формула (3.8) для кумулятивной вероятности:

$$\mathcal{P}_{10}(2) = P_{10}(0) + P_{10}(1) + P_{10}(2) = 0.599 + 0.315 + 0.075 = 0.988.$$

Для ответа на третий вопрос воспользуемся формулой (3.9):

$$R_{10}(2) = 1 - [P_{10}(0) + P_{10}(1)] = 0.086.$$

На рис. 3.1 представлено решение этой задачи в среде Mathcad. В первых двух строках mcd-файла (см. рис. 3.1) по формуле Бернулли (3.3) вычисляется $P_{10}(2)$. Прямые вычисления сопровождаются применением функций **dbinom** и **combin**. Затем на основе **dbinom** и **pbinom** формируются две функции пользователя, с помощью которых вычисляются значения вероятностей $P_n(k)$ и $\mathcal{P}_n(k)$ при различных исходных значениях k , n и p . Вероятности $P_n(k)$ в представленном файле обозначены $D(x, n)$, кумулятивные вероятности $\mathcal{P}_n(k)$ — через $P(x, n)$, а вероятность $R_{10}(2)$ обозначена R . В нижней строке кумулятивная вероятность вычислена по формуле (3.8).

$C := \text{combin}(10, 2) \quad C = 45 \quad \frac{10!}{2 \cdot 8!} = 45$	$\text{dbinom}(2, 10, 0.05) = 0.075$
$C \cdot 0.05^2 \cdot 0.95^8 = 0.075$	$\text{dbinom}(2, 10, 0.05) = 0.075$
$D(x, n) := \text{dbinom}(x, n, 0.05)$	$P(x, n) := \text{pbinom}(x, n, 0.05)$
$D(0, 10) = 0.599 \quad D(1, 10) = 0.315 \quad D(2, 10) = 0.075$	$R = 0.086$
$R := 1 - (D(0, 10) + D(1, 10))$	$R = 0.086$
$n := 10 \quad D(0, n) + D(1, n) + D(2, n) = 0.988$	$P(2, 10) = 0.988$

Рис. 3.1. Решение задачи 3.1 в среде Mathcad

Рисунок 3.1 иллюстрирует удобство использования встроенных функций Mathcad для решения аналогичных задач и исследования влияния отдельных исходных данных на результаты испытаний по схеме Бернулли. В качестве одного из множества вариантов такого исследования на рис. 3.2 приво-

дятся результаты анализа влияния числа испытаний ($n = 10$ и $n = 20$) на вероятности $P_n(k)$ появления ряда ($k = 0, 1, \dots, 20$) успехов и кумулятивные вероятности $\mathcal{P}_n(k)$.

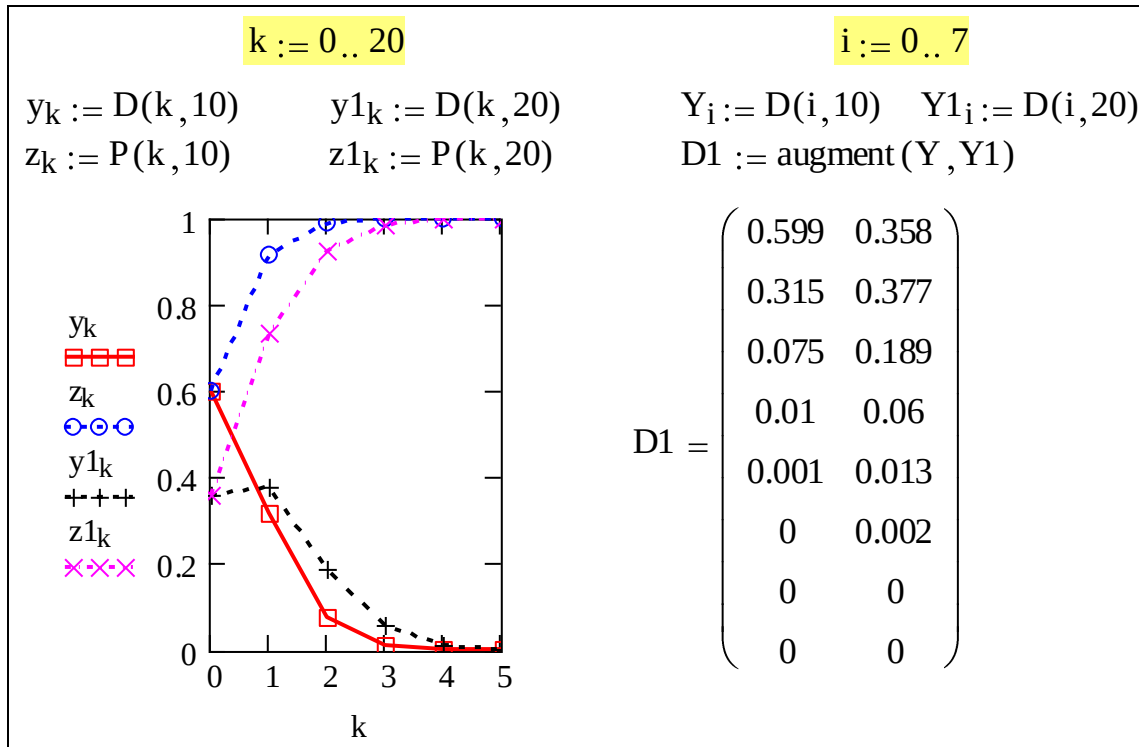


Рис. 3.2. Изменение вероятностей $P_n(k)$ и $\mathcal{P}_n(k)$ при $n = 10$ и $n = 20$

Рисунок 3.2 — продолжение рассмотренного выше (см. рис. 3.1) mcd-файла, поэтому используются прежние обозначения. Значения $P_n(k)$ и $\mathcal{P}_n(k)$ при $k = 0, 1, \dots, 20$ объединены в (21×1) -векторы y (при $n = 10$), $y1$ ($n = 20$) и z ($n = 10$), $z1$ ($n = 20$) соответственно и изображены на графике. Вероятности $P_n(k)$ довольно быстро уменьшаются до нуля, а значения $\mathcal{P}_n(k)$ также быстро приближаются к единице. Поэтому на графиках показаны лишь первые 6 значений этих вероятностей. В правой части приводятся численные значения первых восьми значений вероятностей $P_n(k)$ при $n = 10$ (вектор Y) и при $n = 20$ (вектор $Y1$). Эти (8×1) -векторы объединены в двухстолбцовую матрицу $D1$ с помощью встроенной матричной функции **augment**.

Значения вероятностей на графиках соединены линиями для наглядности. В противном случае результаты их вычислений были бы трудно различимы.

Из приведенного графика видно, что вероятности $P_n(k)$ и $\mathcal{P}_n(k)$ с увеличением числа испытаний медленнее стремятся к своим установившимся значениям, причем характер изменения $P_n(k)$, монотонный при $n = 10$, становится унимодальным при $n = 20$, т. е. кривая $P_{20}(k)$ приобретает максимум при $k = 1$. Этот факт отражает закономерность, согласно которой максимум биномиальных вероятностей достигается при $k = np$ (см. разд. 5.4). ■

Задача 3.2. В скольких шахматных партиях с равным по силе противником выигрыш более вероятен: в трех партиях из четырех или в пяти из восьми?

□ Решение. Вероятность выигрыша у равносильного противника $p = 0.5$. Искомые вероятности находим по формуле (3.3):

$$P_4(3) = 0.25; \quad P_8(5) = 0.219.$$

Приведем решение этой задачи в Mathcad (копия фрагмента mcd-файла):

$$\text{dbinom}(3, 4, 0.5) = 0.25 \quad \text{dbinom}(5, 8, 0.5) = 0.219$$

Полученные результаты свидетельствуют о том, что в данных условиях более вероятен выигрыш трех партий из четырех. ■

Задача 3.3. Пусть вероятность попадания в десятку при одном выстреле равна 0.2. Определить наименьшее число независимых выстрелов, которые надо произвести, чтобы с вероятностью, не меньшей 0.9, попасть в десятку хотя бы один раз.

□ Решение. Рабочей формулой для этой задачи служит (3.13). Событие A заключается в успешном поражении десятки при одном выстреле. Это происходит с вероятностью $p = 0.2$. Вероятность неуспешного выстрела составляет $q = 0.8$. Поэтому исходным выражением для нахождения числа испытаний будет $(1 - q^n) \geq 0.9$ или $(1 - 0.9) \geq 0.8^n$, откуда, после логарифмирования, имеем

$$n \log 0.8 \leq \log 0.1; \quad n (\log 8 - 1) \leq -1; \quad n \geq 1/(1 - \log 8).$$

Окончательно получаем $n \geq 10.319$, т. е. для ответа на поставленный в задаче вопрос достаточно произвести 11 выстрелов.

На рис 3.3 приведены два варианта решения задачи в среде Mathcad.

$$n := \frac{1}{1 - \log(8)} \quad n = 10.319 \quad \boxed{\text{ceil}(n) = 11}$$

$$x := 0 \quad \text{Given} \quad 1 - 0.8^x \geq 0.9 \quad \text{Find}(x) = 10.319$$

Рис. 3.3. Решение задачи 3.3 в Mathcad

В первой строке (см. рис. 3.3) приводится простой алгоритм и результат получения минимального значения искомого параметра n , который затем округляется до ближайшего большего целого встроенной функцией **ceil**. В нижней строке рис. 3.3 этот результат получен с использованием вычислительного блока с ключевыми словами **given** и **find**. Для получения решения этим способом необходимо предварительно задать начальное приближение, которое при решении (см. рис 3.3) принято нулевым. ■

3.2. Композиция независимых испытаний при различных вероятностях успеха

Обобщением ранее рассмотренной схемы испытаний служит последовательность независимых испытаний с двумя исходами, в которых условие по-

стоянства вероятностей успехов A не налагается. Такая схема испытаний известна под названием схемы Пуассона, по имени французского математика Симеона Дени Пуассона (1781—1840), который впервые исследовал ее основные свойства.

Рассмотрим, как и ранее, последовательность (серию) из n независимых испытаний, причем в каждом i -ом испытании ($i = 1, 2, \dots, n$) возможны два исхода A_i и $\bar{A}_i$ с вероятностями p_i и $q_i = 1 - p_i$ соответственно. Любое испытание с номером $j \neq i$ также может закончиться одним из двух исходов A_j и $\bar{A}_j$ с вероятностями p_j и $q_j = 1 - p_j$. При этом $p_j \neq p_i$ и $q_j \neq q_i$ ($j \neq i$).

Каждая серия, как сложное испытание A будет характеризоваться числом k успехов и числом $(n - k)$ неудач, однако эти события в данном случае будут индексированы и соответствовать определенному номеру испытания в составе серии. Будем, как и в разд. 3.1, отмечать результаты отдельных испытаний символами A_i и $\bar{A}_i$, тогда пространство элементарных событий сложного испытания A будет составлено сложными событиями вида

$$b_{n,k} = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 A_4 A_5 \dots \bar{A}_{n-1} A_n. \quad (3.15)$$

В этом событии успех A появился в первом, четвертом, пятом и последнем испытании серии; общее число успехов в событии (3.15) равно k . Событие $\bar{A}$ наступило во втором, третьем и предпоследнем из элементарных испытаний, всего $(n - k)$ раз.

В силу независимости отдельных испытаний вероятность сложного события $b_{n,k}$ (3.15) будет равна

$$P(b_{n,k}) = p_1 q_2 q_3 p_4 p_5 \dots q_{n-1} p_n. \quad (3.16)$$

Таким образом, выражение (3.16) определяет вероятность одного сложного события $b_{n,k}$, состоящего в том, что в одной серии из n испытаний успех появится ровно k раз и не появится $(n - k)$ раз.

Число отличных друг от друга событий типа (3.15) с одинаковыми числами появления успехов, но имеющих различный порядок следования символов A и $\bar{A}$, как и в разд. 3.1, определяется числом сочетаний из n по k , т. е. C_n^k . Поскольку вероятности успехов в отдельных испытаниях серии теперь различны, различными будут и вероятности (3.16) для каждого сложного события с одинаковыми числами появления успеха. Поэтому вероятность $P_n(k)$ появления успеха ровно k раз в n испытаниях в рассматриваемом случае не может быть выражена аналогично (3.3).

Для вычисления этой вероятности применяется формальный прием [1], основанный на введении произведения n биномов $(p_i z + q_i)$ и анализе коэффициентов при степенях вспомогательной переменной z . Рассмотрим этот подход на примере, аналогичном примеру 3.1 в разд. 3.1.

Пример 3.2. Рассмотрим сложное испытание, образованное повторением трех испытаний ($n = 3$) с двумя исходами и различными вероятностями успеха в каждом из них. Результаты испытаний представлены в табл. 3.2, в которой использованы ранее введенные обозначения (см. табл. 3.1).

Таблица 3.2

$B_{3,k}$	$B_{3,0}$	$B_{3,1}$			$B_{3,2}$			$B_{3,3}$
$b_{n,k}$	$\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$	$\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$	$\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3$	$A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$	$A_1 A_2 \bar{A}_3$	$A_1 \bar{A}_2 A_3$	$\bar{A}_1 A_2 A_3$	$A_1 A_2 A_3$
$P(b_{n,k})$	$q_1 q_2 q_3$	$q_1 q_2 p_3$	$q_1 p_2 q_3$	$p_1 q_2 q_3$	$p_1 p_2 q_3$	$p_1 q_2 p_3$	$q_1 p_2 p_3$	$p_1 p_2 p_3$

Вероятности $P_3(k)$ того, что в трех последовательных испытаниях события A_i ($i = 1, 2, 3$) произойдут ровно k раз ($k = 0, 1, 2, 3$), определяются с помощью рассмотренных выше соотношений:

$$\begin{aligned}
 P_3(0) &= P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = q_1 q_2 q_3; \\
 P_3(1) &= P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) + P(\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3) + P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = q_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 q_3; \\
 P_3(2) &= P(A_1 A_2 \bar{A}_3) + P(A_1 \bar{A}_2 A_3) + P(\bar{A}_1 A_2 A_3) = p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3; \\
 P_3(3) &= P(A_1 A_2 A_3) = p_1 p_2 p_3.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим произведение биномов $(p_i z + q_i)$, где $i = 1, 2, 3$. После их перемножения и приведения подобных членов получим:

$$\begin{aligned}
 (p_1 z + q_1)(p_2 z + q_2)(p_3 z + q_3) &= p_1 p_2 p_3 z^3 + (p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3) z^2 + \\
 &+ (q_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 q_3) z + q_1 q_2 q_3.
 \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при степенях z с выражениями, приведенными выше для вероятностей $P_3(k)$, убеждаемся в их полном совпадении. Можно убедиться в том, что подобное совпадение вероятностей, вычисленных по таблицам, аналогичным табл. 3.2, с коэффициентами при степенях z будет иметь место для произвольного числа n испытаний в серии.

Таким образом, вероятности появления успеха ровно k раз в серии n испытаний для рассматриваемого случая различных вероятностей успеха в отдельных испытаниях серии могут вычисляться с использованием выражения

$$\varphi(z) = \prod_{i=1}^n (p_i z + q_i) = \sum_{k=0}^n \beta_k z^k = \sum_{k=0}^n P_n(k) z^k. \quad (3.17)$$

В силу (3.6) сумма вероятностей $P_n(k)$ при $(k = 0, 1, 2, \dots, n)$, т. е.:

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^n \beta_k = \sum_{k=0}^n P_n(k) = 1. \quad (3.18)$$

Таким образом, для вычисления вероятностей появления события A ровно k раз в n испытаниях в рассматриваемом случае ($p_j \neq p_i$ при $j \neq i$) необходимо:

1. Задать вероятности $p_i, q_i = 1 - p_i$ исходов отдельных испытаний серии.
2. Сформировать $\varphi(z)$ в форме произведения биномов (3.17).
3. Разложить это произведение по степеням z .
4. Найти вероятности вероятностей, вычислив коэффициенты β_k в (3.17).

Как отмечалось выше, схема испытаний Пуассона служит обобщением схемы испытаний Бернулли. Нетрудно убедиться в том, что выражения (3.17) справедливо и при одинаковых вероятностях $p_j = p_i = p$:

$$\phi(z) = \prod_{i=1}^n (p_i z + q_i) = \sum_{k=0}^n P_k(k) z^k,$$

где вероятности $P_n(k)$ определяются выражением (3.3), т. е. вычисляются по формуле Бернулли.

Решение практических задач с использованием формулы (3.17) сопряжено с достаточно большими объемами вычислений, которые целесообразно возложить на компьютер. Так, в среде Mathcad с этой целью можно использовать ряд встроенных функций, а также операторов и команд символьных вычислений. Перечислим основные из них.

Для осуществления символьных преобразований функции $\phi(z)$ (3.17) удобно использовать следующие операторы символьной палитры:

- **collect** — разлагает функцию $\phi(z)$ по степеням z ;
- **expand** — выводит все члены разложения без приведения подобных;
- **coeffs** — выводит вектор коэффициентов β_k разложения; может использоваться как при непосредственном задании $\phi(z)$ в виде (3.17), так и после применения операторов **collect**;
- **substitute** — используется для подстановки числовых или символьных значений в промежуточные или результирующие выражения.

Возможности перечисленных операторов иллюстрируются рис. 3.4, который содержит решение задачи (3.17) при $n = 2$.

$$\begin{aligned} \phi(z) &:= (p1 \cdot z + q1) \cdot (p2 \cdot z + q2) \\ \phi(z) \text{ collect, } z &\rightarrow p1 \cdot p2 \cdot z^2 + (q1 \cdot p2 + p1 \cdot q2) \cdot z + q1 \cdot q2 \\ \phi(z) \text{ expand, } z &\rightarrow p1 \cdot p2 \cdot z^2 + p1 \cdot z \cdot q2 + q1 \cdot p2 \cdot z + q1 \cdot q2 \\ \phi(z) \text{ coeffs, } z &\rightarrow \begin{pmatrix} q1 \cdot q2 \\ q1 \cdot p2 + p1 \cdot q2 \\ p1 \cdot p2 \end{pmatrix} \\ \phi(z) \text{ substitute, } p1 = 0.2, p2 = 0.4 &\rightarrow (.2 \cdot z + q1) \cdot (.4 \cdot z + q2) \\ \phi1(z) &:= [p1 \cdot z + (1 - p1)] \cdot [p2 \cdot z + (1 - p2)] \\ \phi1(z) \text{ substitute, } p1 = 0.2, p2 = 0.4 &\rightarrow (.2 \cdot z + .8) \cdot (.4 \cdot z + .6) \end{aligned}$$

Рис. 3.4. Символьные преобразования (3.17) в среде Mathcad ($n = 2$)

Функция $\phi(z)$ задавалась в примере (см. рис. 3.4) в двух вариантах, отмеченных заливкой. В первом варианте с помощью описанных операторов осуществлено разложение $\phi(z)$ и получение коэффициентов β_k в (3.17) в символьной форме. Следует обратить внимание на то, что оператор **coeffs** строит вектор коэффициентов полинома в порядке возрастания степени z , поэтому первый элемент вектора представляет свободный член разложения (значение

$P_n(0)$), а последним элементом вектора коэффициентов служит $P_n(n)$. Вторым вариантом функции $\phi(z)$ введен для удобства подстановки числовых значений вероятностей p_1 и p_2 , значения которых приняты 0.2 и 0.4 соответственно. Полученная после подстановки функция $\phi(z)$ может быть использована для определения вектора вероятностей $P_n(n)$ с помощью оператора **coeffs**.

Числовые значения вероятностей p_i могут быть введены непосредственно в биномы функции $\phi(z)$ или заданы предварительно, до ввода символьного выражения этой функции (рис. 3.5).

$$\begin{array}{l}
 p1 := .2 \quad p2 := .4 \quad q1 := 1 - p1 \quad q2 := 1 - p2 \\
 \phi(z) := (p1 \cdot z + q1) \cdot (p2 \cdot z + q2) \\
 \phi(z) \text{ collect, } z \rightarrow 8 \cdot 10^{-2} \cdot z^2 + .44 \cdot z + .48 \quad \phi(z) \text{ coeffs, } z \rightarrow \begin{pmatrix} .48 \\ .44 \\ 8 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix} \\
 \phi(z) \text{ expand, } z \rightarrow 8 \cdot 10^{-2} \cdot z^2 + .44 \cdot z + .48
 \end{array}$$

Рис. 3.5. Введение в пример ($n=2$) исходных значений

На рис. 3.5 представлен второй вариант задания числовых значений и вычисления вероятностей рассмотренного примера. Полученный вектор коэффициентов разложения функции $\phi(z)$ в примере при $p_1 = 0.2$ и $p_2 = 0.4$ содержит результат решения этого простого примера: $P_2(0) = 0.48$, $P_2(1) = 0.44$, $P_2(2) = 0.08$. Проверкой правильности полученного результата служит вычисление по формуле (3.18): $P_2(0) + P_2(1) + P_2(2) = 1.0$.

При задании функции $\phi(z)$ в виде произведения биномов с числовыми коэффициентами вычисление вектора вероятностей $P_n(k)$ упрощается и может быть выполнено с помощью команд позиции **Symbolics** главного меню системы Mathcad. Последовательное использование команд **Symbolics\Collect** и **Symbolics\Polynomial Coefficients** приводит к получению искомого вектора вероятностей. Рисунок 3.6 содержит результаты применения указанных команд к примеру, рассмотренному ранее (см. рис.3.5). Активизация указанных команд осуществляется после наведения уголка курсора на аргумент (символ z в нашем случае) очередного выражения.

Исходное выражение	$(0.2 \cdot z + 0.8) \cdot (0.4 \cdot z + 0.6)$
Результат команды Symbolics\Collect	Результат команды Symbolics\Polynomial Coefficients
$.08 \cdot z^2 + .44 \cdot z + .48$	$\begin{pmatrix} .48 \\ .44 \\ .08 \end{pmatrix}$

Рис. 3.6. Решение примера с помощью команд позиции **Symbolics**

Отметим, что введенные ранее кумулятивная вероятность $P_n(k)$ и вероятность $R_n(k)$ того, что событие произойдет не менее k раз, применительно к схе-

ме Пуассона, определяются теми же соотношениями, которые были введены при описании схемы Бернулли. Так, вероятность $P_n(k)$ того, что событие A произойдет не более, чем k раз в n испытаниях, т. е. появится или 0, или 1, или 2, или 3, ... или k раз, для схем испытаний Пуассона вычисляется, аналогично (3.8), по формуле

$$P_n(k) = P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) + \dots + P_n(k) = \sum_{i=0}^k P_n(i). \quad (3.19)$$

Вероятность того, что событие произойдет не менее k раз, т. е. или k , или $k+1$, ... , или n раз:

$$R_n(k) = P_n(k) + P_n(k+1) + \dots + P_n(n) = \sum_{j=k}^n P_n(j) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} P_n(i). \quad (3.20)$$

Слагаемые $P_n(k)$ ($k = 0, 1, \dots, n$) в (3.19) и (3.20) определяются коэффициентами разложения функции $\varphi(z)$ (3.17). Величины $R_n(k)$ и $P_n(k-1)$, как отмечалось ранее (см. (3.10)), взаимно дополняют друг друга до единицы.

Задача 3.4. В автомобиле обнаружено 4 вида неисправностей, которые проявляются с вероятностями 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 соответственно. Осуществлено четыре независимых последовательных испытания. Определить вероятности обнаружения одной, двух, трех, четырех неисправностей и вероятность не обнаружить ни одну из них. Найти вероятность обнаружения в этих условиях не менее двух неисправностей.

□ Решение. По условиям задачи $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.2$, $p_3 = 0.3$, $p_4 = 0.4$. Требуется определить вероятности $P_4(0)$, $P_4(1)$, $P_4(2)$, $P_4(3)$, $P_4(4)$ и $R_4(2)$. Решение осуществляется с использованием формул (3.17), (3.20). Для проверки правильности определения вероятностей $P_4(k)$, где $k = 0, 1, 2, 3, 4$, может быть использовано выражение (3.18). Результаты решения задачи в Mathcad представлены на рис. 3.7. При решении использовался подход, рассмотренный выше (см. рис. 3.6).

Составленная функция $\varphi(z)$ (первая строка рис. 3.7) с помощью команды **Symbolics\Collect** разложена по степеням z . С помощью команды **Symbolics\Polynomial Coefficients** главного меню системы получен вектор искомых вероятностей $P_4(k)$, который затем обозначен как вектор **P**. Первый элемент вектора представляет вероятность $P_4(0)$ не обнаружить ни одну неисправность, последний — вероятность $P_4(4)$ обнаружения всех неисправностей. Вероятность $R_4(2)$ обнаружения не менее двух неисправностей обозначена в файле (см. рис. 3.7) через **R**.

Для проверки по формуле (3.18) результатов решения задачи введена вспомогательная строка **h**. Результат произведения **h** и **P** равен единице, что подтверждает правильность найденных значений $P_4(k)$. ■

Область практического применения схемы испытаний Пуассона достаточно широка. Она включает проверку качества изделий с помощью безвозвратной выборки из контрольной совокупности, множество задач определения ве-

роятностей поражения целей, анализ надежности технических систем. Ниже, в разд. 3.3, описывается одна из подобных задач.

$$\begin{aligned}
 & (0.1 \cdot z + 0.9) \cdot (0.2 \cdot z + 0.8) \cdot (0.3 \cdot z + 0.7) \cdot (0.4 \cdot z + 0.6) \\
 & .0024 \cdot z^4 + .0404 \cdot z^3 + .2144 \cdot z^2 + .4404 \cdot z + .3024 \\
 & R := 1 - (.3024 + .4404) \quad R = 0.257 \\
 & h := (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1) \quad \boxed{h \cdot P = 1}
 \end{aligned}$$

$$P := \begin{pmatrix} .3024 \\ .4404 \\ .2144 \\ .0404 \\ .0024 \end{pmatrix}$$

Рис. 3.7. Решение задачи 3.4 с помощью команд позиции **Symbolics**

3.3. Применение схемы Пуассона для анализа надежности

Надежность, наряду с другими техническими характеристиками систем (точность, габаритные размеры, вес, энергоемкость и проч.), представляет собой одну из их важнейших эксплуатационных характеристик. Напомним, что под надежностью системы понимается свойство технической системы сохранять свои свойства на определенном промежутке времени. Одной из количественных характеристик надежности может служить вероятность безотказной работы в течение фиксированного интервала времени T .

Пусть некоторая система имеет n звеньев, соединенных определенным образом. В процессе эксплуатации на интервале времени T эти звенья могут выходить из строя. Структура системы может быть построена с использованием одного из трех типов схем соединения звеньев: последовательного, параллельного и смешанного (включающего элементы первых двух схем). При последовательном соединении звеньев отказ одного из них вызовет выход из строя всей системы в целом. При параллельном соединении отказ системы может быть вызван лишь отказом всех параллельно работающих звеньев. Структура, относящаяся к смешанному соединению, имеет особенности, присущие двум предыдущим структурам.

Будем считать, что отказы отдельных звеньев системы независимы в совокупности, т. е. отказ одного или даже нескольких звеньев не влияет на вероятность безотказной работы остальных на интервале T . В течение T часть звеньев может находиться в рабочем состоянии и может происходить несколько отказов, т. е. совокупность возможных состояний звеньев представляет множество совместных событий.

Обозначим через $A_{\text{псл } i}$ и $\bar{A}_{\text{псл } i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) рабочее состояние и отказ i -го последовательно соединенного звена соответственно. Тогда для последовательного соединения звеньев сложное событие — безотказная работа системы $A_{\text{псл}}$ — образуется произведением событий A_i :

$$A_{\text{псл}} = \prod_{i=1}^n A_{\text{псл } i} = A_{\text{псл } 1} A_{\text{псл } 2} \dots A_{\text{псл } n}.$$

В силу предположения о независимости вероятность безотказной работы последовательно соединенных звеньев определяется произведением вероятностей их рабочего состояния:

$$P(A_{\text{псл}}) = \prod_{i=1}^n P(A_{\text{псл } i}).$$

Эти выражения учитывают, что при последовательном соединении для выхода из строя всей системы в целом достаточно отказа хотя бы одного звена.

При параллельном соединении звеньев для безотказной работы системы (событие $A_{\text{прл}}$) достаточно, чтобы имело место хотя бы одно из событий $A_{\text{прл } i}$, т. е. или A_1 , или A_2 , ... или A_n . Отказ системы при параллельном соединении элементов возможен лишь при выходе из строя всех элементов одновременно. Таким образом,

$$A_{\text{прл}} = \sum_{i=1}^n A_{\text{прл } i} = A_{\text{прл } 1} + A_{\text{прл } 2} + \dots + A_{\text{прл } n}. \quad (3.21)$$

Поскольку в общем случае события $A_{\text{прл } i}$ — совместны, для определения вероятности безотказной работы $P(A_{\text{прл}})$ системы параллельного типа необходимо применить общую формулу вероятности суммы событий (см. разд. 2.1). Так, для схемы дублирования звеньев ($n = 2$) имеем

$$P(A_{\text{прл } 1} + A_{\text{прл } 2}) = P(A_{\text{прл } 1}) + P(A_{\text{прл } 2}) - P(A_{\text{прл } 1} A_{\text{прл } 2}).$$

При больших значениях n подобные выражения становятся неудобными для практического применения. Значительно проще вычислять вероятность безотказной работы совокупности параллельно соединенных звеньев с использованием выражения (3.11), т. е. путем вычитания из единицы вероятности отказа всей системы.

Отказ системы параллельной структуры эквивалентен отказу всех звеньев, т. е. совместным отказам — произведению событий $\bar{A}_{\text{прл } i}$ ($i = 1, n$): $\bar{A}_{\text{прл}} = \prod_{i=1}^n \bar{A}_{\text{прл } i}$. Здесь $\bar{A}_{\text{прл}}$ — сложное событие (отказ системы), представляющее

собой дополнение к сумме событий $A_{\text{прл } i}$, т. е. к событию $A_{\text{прл}}$ (3.21).

В силу независимости отказов вероятность $P(\bar{A}_{\text{прл}})$ выхода системы из строя равна произведению вероятностей отказов отдельных звеньев:

$$P(\bar{A}_{\text{прл}}) = \prod_{i=1}^n P(\bar{A}_i).$$

Поскольку при анализе безотказного состояния системы в качестве искомых выступают вероятности отказов одного и нескольких звеньев, в рассматриваемой постановке целесообразно обозначить вероятности отказов каждого звена через p_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда искомые вероятности $P_n(k)$ отказов k звеньев

($k = 0, 1, \dots, n$) при n испытаниях могут быть найдены как коэффициенты $\square_k$ функции $\varphi(z)$ (3.17) в соответствии с подходом, описанным в разд. 3.2.

В качестве примера рассмотрим три параллельно работающих звена, вероятности безотказной работы которых равны 0.8, 0.9, 0.95. Требуется определить вероятности отказов одного, двух и трех звеньев за фиксированный интервал времени, а также вероятность безотказной работы системы.

Обозначая через ($p_1 = 0.2, p_2 = 0.1, p_3 = 0.05$) вероятности отказов звеньев и составляя функцию (3.17), получаем решение, представленное ниже.

$$w(z) := (0.2 \cdot z + 0.8) \cdot (0.1 \cdot z + 0.9) \cdot (0.05 \cdot z + 0.95)$$

$$w(z) \text{ coeffs, } z \rightarrow \begin{pmatrix} .6840 \\ .2830 \\ 3.20 \cdot 10^{-2} \\ 1.0 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} P := 1 - 0.001 \\ \mathbf{P = 0.999} \\ .684 + .283 + .0320 = 0.999 \end{array}$$

Вероятности появления отказов одного, двух и трех звеньев равны, соответственно, 0.283, 0.032 и 0.001. Вероятность безотказной работы, обозначенная в mcd-файле через P , получена по формуле (3.11) и равна 0.999.

3.4. Асимптотическое приближение при повторении испытаний

Рассмотренные схемы испытаний принципиально позволяют вычислять вероятности появления событий при произвольном, в том числе большом, числе испытаний n . В то же время, в силу особенностей результирующих выражений и методик, рассмотренных в предыдущих разделах этой главы, их практическое использование сопряжено с трудностями уже при $n > 10$, что вызвано необходимостью проведения операций над очень большими числами.

Эти трудности можно преодолеть и путем использования, например, специальных рекуррентных алгоритмов вычисления факториалов и степеней больших чисел, но это сопряжено с увеличением объемов вычислений и не всегда практически удобно. Значительного упрощения удастся достичь, как было показано, применением программных систем компьютерной математики. Однако и этот путь не может в полной мере решить проблему размерности задач и операций над весьма большими числами, возникающую, например, при анализе нескольких десятков и сотен испытаний. В то же время исследования асимптотического поведения вероятностей $P_n(k)$ появления k раз события A в n испытаниях при стремлении n к бесконечности дают возможность получать приближенные, но достаточно точные с практической точки зрения, значения этих вероятностей по значительно более простым выражениям.

Напомним здесь, что под асимптотическим приближением функции $f(x)$ понимают функцию $\square(z)$ такую, для которой предел отношения $f(x)$ к $\square(z)$ при стремлении x к бесконечности равен единице.

Ниже рассматривается асимптотическое приближение в анализе схем повторения испытаний при постоянном значении вероятности появления успеха в каждом из них. Этот случай асимптотического приближения связан с введением так называемой формулы Пуассона и выражений, обобщаемых локальной теоремой Муавра—Лапласа и интегральной теоремой Лапласа.

3.4.1. Формула Пуассона

Пусть в схеме испытаний Бернулли успех (событие A) в каждом отдельном испытании серии маловероятен (p — мало). Предположим также, что число испытаний n неограниченно возрастает и это сопровождается уменьшением значения вероятности p так, что произведение np остается постоянным.

▷ Обозначим $np = \lambda$ и рассмотрим значения вероятностей $P_n(k)$ для двух соседних значений k при одном и том же значении n . Из формулы Бернулли (3.3) следует простое рекуррентное соотношение, связывающее вероятности $P_n(k+1)$ и $P_n(k)$:

$$P_n(k+1) = [(n-k)p / (k+1)q] P_n(k). \quad (3.22)$$

Нетрудно убедиться в том, что, в силу (3.22), при $n \rightarrow \infty$ отношение вероятностей $P_n(k+1)$ и $P_n(k)$ стремится к отношению $\lambda / (k+1)$:

$$P_n(k+1)/P_n(k) \rightarrow \lambda / (k+1). \quad (3.23)$$

Используем выражения (3.22) и (3.23) для анализа последовательных значений вероятностей $P_n(k)$ при $k = 0, 1, 2$, обозначая $\pi_\lambda(k)$ предел вероятности $P_n(k)$ при $n \rightarrow \infty$ и $np = \lambda = \text{const}$.

Вероятность того, что событие A не появится ни разу в серии из n испытаний, согласно (3.12), равна произведению вероятностей q не появления события в каждом из испытаний данной серии, т. е.

$$P_n(0) = q^n = (1 - \lambda/n)^n. \quad (3.24)$$

Переходя к пределу и учитывая, что при $n \rightarrow \infty$ правая часть выражения (3.24) стремится к $e^{-\lambda}$, т. е. $(1 - \lambda/n)^n \rightarrow e^{-\lambda}$, получим

$$\pi_\lambda(0) = e^{-\lambda}. \quad (3.25)$$

Для вероятности однократного появления ($k = 1$) события A в серии из n испытаний воспользуемся соотношением (3.23). При $k = 1$ из (3.23) имеем:

$$P_n(1)/P_n(0) \rightarrow \lambda, P_n(1) \rightarrow \lambda P_n(0), \pi_\lambda(1) = \lambda e^{-\lambda}. \quad (3.26)$$

При $k = 2$ аналогичными рассуждениями получим:

$$P_n(2)/P_n(1) \rightarrow \lambda/2, \pi_\lambda(2) = \lambda^2 e^{-\lambda}/2. \quad (3.27)$$

Продолжая анализ предельных соотношений для вероятностей $P_n(k)$, нетрудно убедиться в справедливости следующей теоремы. ◀

Теорема 3.1. При неограниченном возрастании числа испытаний n и уменьшении вероятности p событий A так, что $np = \lambda$ остается постоянной, вероятность $P_n(k)$ при $k = 0, 1, 2, \dots$ стремится к пределу

$$P_n(k) \rightarrow \pi_\lambda(k) = (\lambda^k e^{-\lambda}) / k!. \quad (3.28)$$

Таким образом, вероятность появления событий A ровно k раз в большом числе испытаний может быть приближенно определена по формуле (3.28), которая носит название **формулы Пуассона**. Возможные значения k в данном случае относятся к бесконечной последовательности целых чисел. Подобно (3.8) вычисляются и кумулятивные вероятности, т. е. вероятности того, что в испытаниях с параметрами $np = \lambda = \text{const}$ событие произойдет не более k раз:

$$\mathcal{P}_\lambda(k) = \pi_\lambda(0) + \pi_\lambda(1) + \pi_\lambda(2) + \dots + \pi_\lambda(k) = \sum_{i=0}^k \pi_\lambda(i). \quad (3.29)$$

При вычислении вероятностей по формулам (3.28), (3.29) весьма удобно использовать встроенные функции Mathcad, часть из которых была применена нами ранее (см. разд. 3.1). Перечислим эти функции:

dbinom(k, n, p) — вычисляет вероятности $P_n(k)$ по формуле (3.3);

pbinom(k, n, p) — вычисляет вероятности $\mathcal{P}_n(k)$ по формуле (3.8);

dpois(k, λ) — вычисляет вероятности $\pi_\lambda(k)$ по формуле (3.28);

ppois(k, λ) — вычисляет вероятности $\mathcal{P}_\lambda(k)$ по формуле (3.29).

Представляет интерес сопоставить результаты вычисления по формулам Бернулли и Пуассона для одинаковых значений k, n, p . Практика показывает, что формулы (3.3), (3.28) и (3.8), (3.29) дают достаточно близкие результаты уже при $n > 50$.

На рис. 3.8 приведен фрагмент файла Mathcad, в котором такое сопоставление осуществляется для $k = 0, 1, 2, 3, 4$ при $n = 10$ и $n = 50$. Абсолютные разности вероятностей, полученных по формулам (3.3), (3.28) и (3.8), (3.29), вычислены с помощью перечисленных выше встроенных функций. Затенением выделены векторы этих разностей $\delta = P_n(k) - \pi_\lambda(k)$ и $\Delta = \mathcal{P}_n(k) - \mathcal{P}_\lambda(k)$. Цифрами 1 и 2 обозначены разности для двух вариантов исходных данных $n = 10, p = 0.1$ и $n = 50, p = 0.02$ соответственно. Параметры выбраны из условия $np = \lambda = 1$. На графиках (см. рис. 3.8) представлены результаты сопоставления $P_n(k)$ и $\pi_\lambda(k)$ (левый график), а также $\mathcal{P}_n(k)$ и $\mathcal{P}_\lambda(k)$ (правый график) для указанных двух вариантов исходных данных. Как и ранее, отдельные вероятности на графиках соединены линиями для наглядности.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что при увеличении k и одном и том же значении n значения вероятностей, полученные по формулам Пуассона и Бернулли, достаточно быстро приближаются друг к другу. Увеличение числа испытаний n также сопровождается уменьшением рассогласования между этими результатами вычислений по этим формулам. Таким образом, точность асимптотического приближения Пуассона повышается с ростом значений k и числа испытаний n . Количественные меры рассогласований приведены на рис. 3.8.

Проведенный сопоставительный анализ может служить основой для вариантов учебно-исследовательских работ студентов.

```

k := 0..4
b1k := dbinom(k, 10, 0.1)
p1k := dpois(k, 1)
δ1k := b1k - p1k
δ1T = ( -0.019  0.02  0.01  -0.004  -0.004 )

i := 0..4
b2i := dbinom(i, 50, 0.02)
p2i := dpois(i, 1)
δ2k := b2k - p2k
δ2T = ( -0.004  0.004  0.002  -0.001  -0.001 )

B1k := pbinom(k, 10, 0.1)
P1k := ppois(k, 1)
Δ1k := B1k - P1k
Δ1T = ( -0.019  0  0.01  0.006  0.002 )

B2i := pbinom(i, 50, 0.02)
P2i := ppois(i, 1)
Δ2k := B2k - P2k
Δ2T = ( -0.004  0  0.002  0.001  0 )

```

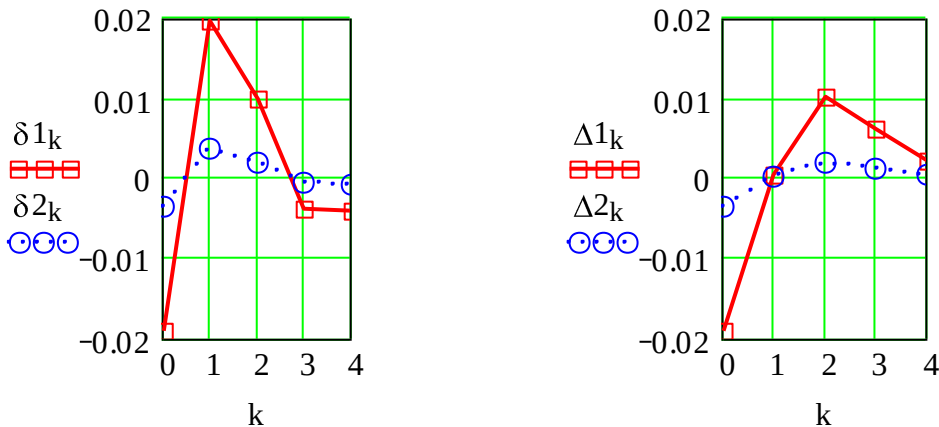


Рис. 3.8. Пример сопоставления распределений

3.4.2. Локальная теорема Муавра—Лапласа

Асимптотические приближения в схеме испытаний Бернулли исследовались также и другими математиками. Так, приближенную формулу для определения вероятности $P_n(k)$ появления события ровно k раз при большом числе испытаний n для $p = 0.5$ получил английский математик Абрахам де Муавр (1667—1754). Этот результат был обобщен на случай произвольного p французским астрономом и математиком Пьером Симоном Лапласом (1749—1827). Асимптотическое приближение, полученное этими учеными, формулируется в виде теоремы, которая приводится здесь без доказательства. В теореме используется вспомогательная функция

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2). \quad (3.30)$$

Теорема 3.2. (Локальная теорема Муавра—Лапласа). Если число независимых испытаний n неограниченно возрастает, а вероятность появления события в каждом из испытаний постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность появления ровно k событий в n испытаниях приближенно равна

$$P_n(k) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x); \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}; \quad 0 < p < 1, \quad (3.31)$$

где функция $\varphi(x)$ определяется выражением (3.30).

Значения $\varphi(x)$ могут быть получены из специальных таблиц (прил. 1) или, как указывалось, найдены путем вычислений в среде используемой СКМ. Функция $\varphi(x)$ — четная, т. е. $\varphi(x) = \varphi(-x)$, поэтому таблицы ее значений составлены для положительных значений аргументов x .

Следует отметить, что вспомогательная функция (3.30) будет подробно рассматриваться ниже (см. разд. 5.2 и 5.4). Поэтому здесь укажем лишь то, что в среде Mathcad значения $\varphi(x)$ вычисляет встроенная функция **dnorm**($x, 0, 1$).

Рассмотрим одну из задач, в которой применяются выражения (3.31).

Задача 3.5. Пусть вероятность брака в массовом производстве деталей равна 0.1. Какова вероятность того, что из 400 наугад выбранных деталей 50 окажутся бракованными?

□ Решение. На рис. 3.9 приведены результаты решения этого примера с использованием описанных ранее встроенных функций системы Mathcad. Искомая вероятность вычислена в этой задаче по формуле Бернулли (3.3), Пуассона (3.28) и Муавра—Лапласа (3.31).

$$\begin{aligned} k &:= 50 & n &:= 400 & p &:= 0.1 & q &:= 1 - p & \lambda &:= n \cdot p \\ x &:= \frac{k - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} & \boxed{P_n &:= \text{dnorm}(x, 0, 1)} \\ & & P_n &= 0.0995 \\ x &= 1.6667 & & & P &:= \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \cdot P_n \\ P_b &:= \text{dbinom}(k, n, p) & P_o &:= \text{dpois}(k, \lambda) \\ P_b &= 0.0165 & P_o &= 0.0177 & P &= 0.0166 \end{aligned}$$

Рис. 3.9. Алгоритм и результаты решения задачи 3.5

По условиям задачи $n = 400$, $k = 50$, $p = 0.1$. Для получения точного решения нужно воспользоваться формулой Бернулли (3.3), вычисления по которой для наших исходных данных без применения средств вычислительной техники весьма громоздки. Поэтому вероятность (3.3) вычисляется с помощью функции **dbinom**. Решения по формуле Пуассона (3.28) и по теореме Муавра—Лапласа (см. (3.30), (3.31)) найдены с применением функций **dpois** и **dnorm**. Таким образом, получены: точное решение ($P_b = 0.0165$) и два приближенных — с использованием теоремы Муавра—Лапласа ($P = 0.0166$) и формулы Пуас-

сона ($Pois = 0.0177$). Результаты свидетельствуют о высокой точности значения искомой вероятности, полученной по формуле (3.31). ■

3.4.3. Интегральная теорема Лапласа

Рассматриваемая ниже теорема определяет приближенные выражения для:

- вероятности появления события A не более k_0 раз;
- вероятности появления события A не менее k_1 раз и не более k_2 раз в серии из n независимых испытаний.

В последнем случае будем для краткости говорить, что k находится в диапазоне от k_1 до k_2 раз.

Интегральная теорема Лапласа имеет те же исходные предположения, которые были введены ранее при формулировке теоремы Муавра—Лапласа. Основные соотношения интегральной теоремы Лапласа приводятся здесь без доказательства. Они будут доказаны в разд. 5.2 при анализе свойств нормального распределения (см. выражения (5.11), (5.12)).

В интегральной теореме Лапласа используется вспомогательная функция $\Phi(x)$ — интеграл от функции (3.30)

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(u) du; \quad \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-u^2/2). \quad (3.32)$$

Функция $\Phi(x)$ носит название функции Лапласа.

Теорема 3.3 (Интегральная теорема Лапласа). Вероятность $P_n(k \leq k_0)$ того, что число k появлений события A будет не более k_0 раз, приближенно равна

$$P_n(k \leq k_0) \approx 0.5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_0} \exp(-u^2/2) du = 0.5 + \Phi(x_0); \quad x_0 = \frac{k_0 - np}{\sqrt{npq}}. \quad (3.33)$$

а вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что число k появлений события A будет находиться в диапазоне от k_1 до k_2 , приближенно равна

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}. \quad (3.34)$$

Вероятность $P_n(k \leq k_0)$ ранее была определена как кумулятивная вероятность (3.8). Поэтому формула (3.33), наряду с возможностью использования формулы Бернулли (3.3), формул (3.28) и (3.31), дает еще один способ вычисления кумулятивной вероятности.

Значения функции Лапласа $\Phi(x)$ берутся из специальных таблиц (см. например, прил. 1) или, как указывалось, могут быть найдены путем использования соответствующих встроенных функций СКМ.

Таблицы составлены для $0 \leq x \leq 5.0$. При $x > 5.0$ принимают $\Phi(x) = 0.5$. При отрицательных значениях аргумента функции Лапласа учитывается ее нечетность, т. е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Для определения вероятности $P_n(k \leq k_0)$ (3.33) в системе Mathcad весьма удобно пользоваться встроенной функцией **pnorm**($k_0, 0, 1$). При этом функция Лапласа образуется вычитанием 0.5 из полученного результата:

$$P_n(k \leq k_0) = \mathbf{pnorm}(x_0, 0, 1); \Phi(x_0) = \mathbf{pnorm}(x_0, 0, 1) - 0.5.$$

Пояснения последнему выражению будут даны ниже, в разд. 5.2.

Для получения вероятности (3.34) попадания k в диапазон можно непосредственно использовать функции **pnorm**($x, 0, 1$) для предварительно вычисленных по выражениям (3.34) значений x_1 и x_2 :

$$P_n(k_1, k_2) = \mathbf{pnorm}(x_2, 0, 1) - \mathbf{pnorm}(x_1, 0, 1).$$

Задача 3.6. В условиях задачи 3.5 найти вероятность того, что событие A появится: а) не более, чем 50 раз в $n = 400$ испытаниях; б) не менее 50 и не более 80 раз в n испытаниях.

□ Решение. По условиям задачи $k_1 = 50$, $k_2 = 80$, $n = 400$, $p = 0.1$.

Решения задачи в среде Mathcad приведены на рис. 3.10.

$$\begin{aligned} k_1 &:= 50 & k_2 &:= 80 & n &:= 400 & p &:= 0.1 & q &:= 1 - p & \lambda &:= n \cdot p \\ x_1 &:= \frac{k_1 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} & x_2 &:= \frac{k_2 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} & x_1 &= 1.667 & x_2 &= 6.667 \end{aligned}$$

Вычисление кумулятивной вероятности по формуле (3.33)

$$0.5 + \int_0^{x_1} \mathbf{dnorm}(x, 0, 1) dx = 0.952$$

$$\mathbf{pnorm}(x_1, 0, 1) = 0.952 \quad \mathbf{pnorm}(k_1, n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot q}) = 0.952$$

$$\begin{aligned} \mathbf{pbinom}(k_1, n, p) &= 0.956 & \sum_{k=0}^{k_1} \mathbf{dbinom}(k, n, p) &= 0.956 \\ \mathbf{ppois}(k_1, \lambda) &= 0.947 \end{aligned}$$

Вычисление вероятности на интервале (50, 80) по формуле (3.34)

Вариант1. $\Phi(x) := \mathbf{pnorm}(x, 0, 1) - 0.5$ $P(k_1, k_2) := \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$

$$\Phi(x_1) = 0.452 \quad \Phi(x_2) = 0.5 \quad P(k_1, k_2) = 0.048$$

Вариант2. $\mathbf{pnorm}(x_2, 0, 1) - \mathbf{pnorm}(x_1, 0, 1) = 0.048$

Рис. 3.10. Алгоритм и результаты решения задачи 3.6

а) По формуле (3.34) получаем значения вспомогательных переменных: $x_1 = 1.667$; $x_2 = 6.667$. Вычисление кумулятивной вероятности $P_{400}(k \leq 50)$ осуществляется по формуле (3.33), в которой функция $\phi(u)$ в (3.32) вычислена с применением указанной выше встроенной функции **dnorm**; искомая вероятность составляет 0.952. Это же значение вычисляется с использованием встроенной функции **pnorm**($x_1, 0, 1$); оно численно равно сумме вероятностей, вычисленных по формуле (3.31). Показывается также, что искомая вероятность

$P_{400}(k \leq 50)$ может быть получена и с применением функции **pnorm**($k_1, np, \sqrt{npq}$). Обоснования этого способа будут даны в разд. 5.4.

Полученное значение искомой кумулятивной вероятности является приближенным, поэтому представляет интерес сопоставить вычисленную вероятность с точным ее значением (3.8) и тем значением, которое получается по формуле Пуассона (3.28), (3.29).

Точное значение этой вероятности определяется формулой (3.8) (функция **dbinom**) и равно 0.956. По формулам (3.28), (3.29) получаем (функция **ppois**) значение 0.947. Ранее вычисленное по формуле (3.33) значение этой вероятности составляет 0.952.

б) Значения функции Лапласа для найденных x_1 и x_2 равны: $\Phi(1.667) = 0.452$; $\Phi(6.667) = 0.5$. Согласно (3.34), искомая вероятность того, что событие A появится не менее 50 и не более 80 раз в n испытаниях равна

$$P(50, 80) = 0.5 - 0.452 = 0.048. \blacksquare$$

Завершая главу 3, отметим, что рассмотренные задачи анализа вероятностей появления событий в серии независимых испытаний требуют выполнения достаточно емких вычислений. При решении таких задач с использованием различных подходов большую помощь, как показано выше, может оказать применение СКМ.

В иллюстрациях к этому разделу приведен ряд типовых программных структур. Они могут использоваться для формирования вариантов индивидуальных заданий на практических занятиях по рассмотренной теме, а также послужить основой организации научно-исследовательских работ студентов.

Глава 4. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

4.1. Общие положения

При проведении испытаний исходы могут иметь количественную меру. Выше приводились примеры, в которых события выражались также и в числовой форме, в виде появления того или иного числа. Так, при бросании шестигранного кубика выпадает одно из шести чисел. При измерении напряжения сети результат (опыта, испытания) выражается числом вольт. При исследовании процессов распада радиоактивных материалов на фиксированном интервале времени результат каждого опыта — число элементарных частиц. Множество исходов подобных испытаний может быть представлено числовым множеством. При этом существенно, что в результате каждого из таких испытаний мы получаем одно и только одно число из совокупности возможных. Это число заранее неизвестно, предсказать его невозможно, поскольку его значение зависит от совокупности случайных причин, полный учет которых заранее принципиально невозможен. В связи с этим вводится понятие случайной величины.

Случайной называют величину X , которая в результате испытания принимает одно значение, априорно (до опыта) неизвестное и зависящее от некоторой совокупности случайных причин, полный учет которых заранее невозможен.

Случайные величины принято обозначать прописными буквами X, Y, Z , а их возможные значения — соответствующими строчными: x, y, z .

С позиции аксиоматической схемы абстрактных событий определение случайной величины может быть уточнено. Пусть, как и ранее, Ω — пространство элементарных событий, состоящее из элементов ω .

Случайной величиной называется функция, определенная на пространстве элементарных событий Ω и принимающая вещественные значения $X(\omega) = x$, где $\omega \in \Omega, x \in (-\infty, +\infty)$. При этом предполагается, что определены вероятности для всех событий, связанных со случайной величиной (например, $X > x, a < X < b, X \leq x, X \geq x, X < x$ и др.).

Всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями, носит название **закона распределения** случайной величины.

Закон распределения случайной величины задается функцией распределения — важнейшей характеристикой случайной величины.

Функцией распределения случайной величины X называется такая функция $F(x)$, определенная для $x \in (-\infty, +\infty)$, значение которой в точке x равно вероятности события ($X < x$):

$$F(x) = P(X < x), x \in (-\infty, +\infty).$$

Введенные понятия будут конкретизированы ниже.

В связи с определением случайной величины важно отметить, что множество всевозможных исходов отдельных испытаний может быть счетным и несчетным. Напомним, что счетным называют множество, элементы которого могут быть пронумерованы и составляют конечную или бесконечную последовательности $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$, причем каждый элемент множества должен иметь один-единственный номер. Типичными примерами счетного множества могут служить: число вызовов такси в фиксированный интервал времени, число автомашин, останавливающихся у конкретного перекрестка при красном свете и т. п.

Множество, не являющееся счетным, называют несчетным. Примерами несчетного множества могут служить: распределение точек на числовой оси в промежутке от 0 до 1, уровень шума на улице города и т. д.

Понятие счетного множества непосредственно связано с термином дискретная случайная величина.

4.2. Дискретные случайные величины

Дискретной называется такая случайная величина, которая может принимать конечное или бесконечное счетное множество значений. Из определения следует, что возможные значения дискретной случайной величины (д.с.в.) принципиально могут быть перечислены; число этих значений может быть конечным или бесконечным.

При этом, для задания дискретной случайной величины необходимо не только перечислить все ее значения, например $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$, но и указать вероятности $p_1, \dots, p_i, \dots, p_n$, с которыми они принимаются. Таким образом, для задания дискретной случайной величины X должна быть определена совокупность (таблица) значений x_i и вероятностей $p_i = P(x_i)$ этих значений, которая носит название **ряда распределения**:

$$\begin{aligned} & x_1, \dots, x_i, \dots, x_n, \dots ; \\ & p_1, \dots, p_i, \dots, p_n, \dots ; \quad \sum_i p_i = 1. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Соответствие между значениями x_i и вероятностями p_i называют **законом распределения дискретной случайной величины X** . Этот закон может быть задан таблично, графически или аналитически.

При табличном задании указывается ряд распределения (4.1). При графическом — приводится график $p_i = f(x_i)$, который носит название **многоугольника (полигона) распределения**.

Аналитическое задание закона распределения требует указания аналитических выражений для значений д.с.в. и их вероятностей. Так, например, закон распределения может быть задан аналитически по результатам серии n независимых испытаний по схеме Бернулли (см. разд. 3.1): значения случайной величины (число успехов k в серии) задаются рядом $k = 0, 1, 2, \dots, n$, а соответствующие каждому значению k вероятности $P_n(k)$ задаются по формуле Бернул-

ли (3.3). Получающийся при этом закон носит название биномиального закона распределения, который подробно рассматривается в *разд. 5.4*. В схеме испытаний Пуассона (*см. разд. 3.4*) число успехов k задается бесконечной последовательностью целых чисел, а их вероятности $\pi_\lambda(k)$ задаются по формуле Пуассона (3.28). Такой закон распределения носит название распределения Пуассона; он рассматривается ниже, в *разд. 5.5*.

На основании общего определения, данного в начале главы, функция распределения дискретной случайной величины X , заданной рядом распределения (4.1):

$$F(x_i) = P(X < x_i), i = 1, 2, \dots$$

В этом соотношении вероятность $P(X < x_i)$ численно равна сумме первых $(i - 1)$ значений вероятностей $p_1 + p_2, \dots + p_{i-1}$, записанных во второй строке ряда распределений (4.1). Закон распределения д.с.в. может быть использован также для определения вероятности того, что случайная величина X не превышает некоторого заданного значения x_j . Для вычисления такой вероятности, которая была определена ранее как кумулятивная $\mathcal{P}(x_j)$ (3.8) (*см. разд. 3.1*), необходимо просуммировать первые значения вероятностей из закона распределения (4.1) до вероятности $p_j = P(x_j)$ включительно. Таким образом, функция распределения $F(x_j)$ и кумулятивная вероятность $\mathcal{P}(x_j)$ д.с.в. могут быть найдены из соотношений вида:

$$F(x_j) = P(X < x_j) = \sum_{i=1}^{j-1} p_i; \quad \mathcal{P}(x_j) = P(X \leq x_j) = \sum_{i=1}^j p_i = F(x_j) + p_j. \quad (4.2)$$

Основными свойствами функции распределения д.с.в. являются:

- 1) $0 \leq F(x_j) \leq 1$;
- 2) $F(x_j) > F(x_i)$ при $x_j > x_i$;
- 3) $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$.

▷ Первое свойство прямо следует из свойств вероятности (*см. разд. 1.4*); второе — из выражения (4.2) для функции распределения д.с.в.. Третье свойство дает выражение для вычисления вероятности попадания в промежуток $[a, b)$. Это свойство следует из того, что событие $X < b$ можно представить в виде суммы двух несовместных событий: $\{X < b\} = \{X < a\} + \{(a \leq X < b)\}$. Из аксиомы (1.20) для вероятностей этих событий имеем:

$$F(b) = F(a) + P(a \leq X < b), \text{ откуда следует свойство 3. } \blacktriangleleft$$

На рис. 4.1, а приведены результаты вычислений в Mathcad функции распределения и кумулятивных вероятностей для д.с.в. с биномиальным законом распределения распределением для $n = 100$; $p = 0.02$ и $k = 0, 1, \dots, 10$. Значения биномиальных вероятностей $P_n(k)$ (3.3) и кумулятивных вероятностей $\mathcal{P}_n(k)$ (3.8), полученных с использованием встроенных функций **dbinom**(k, n, p) и **pbinom**(k, n, p), сведены в векторы **P** и **K** соответственно. Значения функции распределения (вектор **F**) для заданных значений k найдены по формуле $F(x_j) = \mathcal{P}(x_j) - p_j$ (отмечена рамкой), которая следует из (4.2).

$k := 0..10$ $n := 100$ $p := 0.02$ $P_k := \text{dbinom}(k, n, p)$ $K_k := \text{pbinom}(k, n, p)$

$P =$		0	$K =$		0	$F =$		0	$F_k := K_k - P_k$
	0	0.1326		0	0.1326		0	0	
	1	0.2707		1	0.4033		1	0.1326	
	2	0.2734		2	0.6767		2	0.4033	
	3	0.1823		3	0.859		3	0.6767	
	4	0.0902		4	0.9492		4	0.859	
	5	0.0353		5	0.9845		5	0.9492	
	6	0.0114		6	0.9959		6	0.9845	
	7	0.0031		7	0.9991		7	0.9959	
	8	0.0007		8	0.9998		8	0.9991	
	9	0.0002		9	1		9	0.9998	
	10	0		10	1		10	1	

$\sum_{k=0}^5 P_k = 0.9845$ $K_5 = 0.9845$
 $\sum_{k=0}^4 P_k = 0.9492$ $F_5 = 0.9492$
 $(1 - p)^n = 0.1326$

Рис. 4.1, а. Значения функций распределения и кумулятивных вероятностей

В правой части файла (см. рис. 4.1, а) приведены значения $F(5) = 0.9492$, $P_n(5) = 0.9845$ и $P_n(0) = 0.1326$ для заданных параметров.

Графиками функции распределения и кумулятивных вероятностей являются ступенчатые функции со скачками в точках $x_1, x_2, \dots, x_j \dots$

На рис. 4.1, б (продолжение mcd-файла рис. 4.1, а) изображены графики функции распределения (слева), кумулятивной вероятности (в центре) и многоугольник распределения (справа) для тех же исходных данных (см. рис. 4.1, а) при $k = 0, 1, \dots, 6$.

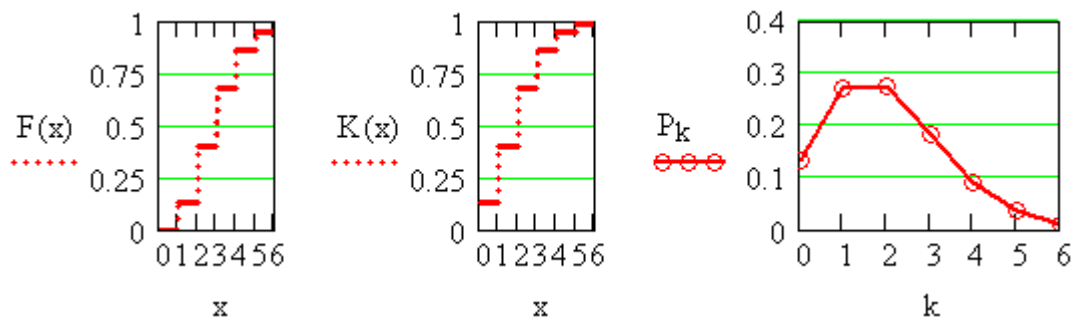


Рис. 4.1, б. Графики примера (см. рис. 4.1,а)

Завершая краткую характеристику дискретных случайных величин, отметим еще одну важную деталь, которая будет необходима в дальнейшем, при рассмотрении числовых характеристик распределений. В выражении (4.1) каждое значение x_i случайной величины появляется с вероятностью p_i . Это означает, что ту же вероятность p_i появления будет иметь и произвольная функция $u(x_i)$. Поэтому можно утверждать, что ряд распределения (4.1) характеризует не только случайную величину X , но и распределение произвольной функции $U(X)$ этой величины:

$$u(x_1), \dots, u(x_i), \dots, u(x_n); \quad p_1, \dots, p_i, \dots, p_n; \quad \sum_i p_i = 1. \quad (4.3)$$

Наряду с дискретными случайными величинами существуют также случайные величины, которые могут принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Такие величины носят название непрерывных случайных величин.

4.3. Непрерывные случайные величины

Случайная величина X называется **непрерывной**, если существует такая неотрицательная интегрируемая на всей числовой оси функция $f(x) \geq 0$, называемая **плотностью распределения** вероятностей, интеграл от которой в пределах от a до b определяет вероятность попадания значений случайной величины X в произвольный промежуток (a, b)

$$P[X \in (a, b)] = P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx. \quad (4.4)$$

Здесь следует отметить, что в выражении (4.4) равноправно могут использоваться знаки неравенства, сопровождаемые знаками равенства или нет. Это объясняется ниже и связано с тем, что вероятность попадания значений непрерывной случайной величины (н.с.в.) в точку a или b равна нулю. Поэтому вероятности

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b). \quad (4.5)$$

Как было отмечено выше, плотность вероятности — неотрицательная функция, т. е. $f(x) \geq 0$. Кроме того, в силу достоверности события, заключающегося в том, что н.с.в. принадлежит $(-\infty, +\infty)$, имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1. \quad (4.6)$$

Из выражения (4.4) следует, что вероятность принадлежности н.с.в. X промежутку $[a, b]$ численно равна площади криволинейной трапеции под кривой $f(x)$ в пределах этого промежутка. Эта площадь в бесконечных пределах изменения X , согласно (4.6), равна единице.

Можно также утверждать, что, с точностью до бесконечно малых высшего порядка, величина $f(x)dx$ определяет вероятность попадания значений н.с.в. X на элементарный отрезок dx , примыкающий к точке x . Величина $f(x)dx$ носит название **элемента вероятности**.

Аналогичную геометрическую интерпретацию имеет и вероятность того, что н.с.в. X не превышает некоторого наперед заданного значения x . Эта вероятность численно равна площади криволинейной трапеции под кривой $f(x)$ при $(-\infty < X < x)$, т. е.

$$P(X < x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = F(x). \quad (4.7)$$

Вероятность $F(x)$ (4.7) называется интегральной функцией распределения или просто — **функцией распределения**. Функции $f(x)$ и $F(x)$ служат важней-

шими характеристиками закона распределения непрерывных случайных величин.

Рассмотрим основные свойства функции распределения $F(x)$ (4.7):

$$1. 0 \leq F(x) \leq 1. \quad (4.8)$$

$$2. F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0; F(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1. \quad (4.9)$$

$$3. P(X \geq x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx - \int_{-\infty}^x f(x)dx = 1 - F(x). \quad (4.10)$$

$$4. F(b) \geq F(a) \text{ при } b > a. \quad (4.11)$$

$$5. P(a < x < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx. \quad (4.12)$$

$$6. \text{ Если } a < X < b, \text{ где } a, b \text{ — заданные числа, то} \\ F(x) = 0 \text{ при } x < a; F(x) = 1 \text{ при } x > b. \quad (4.13)$$

$$7. dF(x)/dx = f(x) \text{ во всех точках непрерывности плотности } f(x). \quad (4.14)$$

▷ Доказательство свойств (4.8)—(4.14) прямо следует из определений $F(x)$, $f(x)$. Поэтому ограничимся лишь небольшими комментариями относительно некоторых из них.

Свойство 4 отмечает неубывающий характер изменения функции $F(x)$ как интеграла от неотрицательной функции $f(x)$.

Свойство 5 определяет приращение функции распределения на отрезке (a, b) как вероятность для случайной величины X попасть в этот отрезок. Эти два свойства следуют из анализа события $X < b$ при $b > a$.

Действительно, пусть $a < X < b$. Поскольку $b > a$, то событие $X < b$ можно подразделить на два несовместных события:

X примет значение $X < a$ с вероятностью $P(X < a)$;

X примет значение в диапазоне (a, b) с вероятностью $P(a \leq X < b)$.

Тогда, по теореме сложения $P(X < b) = P(X < a) + P(a \leq X < b)$, откуда:

$$P(X < b) - P(X < a) = P(a \leq X < b)$$

или $F(b) - F(a) = P(a \leq X < b)$, что подтверждает справедливость (4.12). Но поскольку, согласно аксиоме 1, вероятность есть число неотрицательное, имеем $F(b) - F(a) \geq 0$, откуда следует утверждение (4.11).

Свойство 7 опирается на определение (4.4) и такое утверждение из математического анализа: производная интеграла с переменным верхним пределом равна значению подынтегральной функции на верхнем пределе интеграла во всех точках непрерывности подынтегральной функции. ◀

На основании свойства 5 для непрерывной функции распределения можно сделать вывод о **равенстве нулю вероятности попадания непрерывной случайной величины X в точку**, что отмечалось ранее применительно к выражению (4.5). Действительно, рассматривая X в диапазоне $(a, a + \Delta a)$, из (4.12) имеем:

$$P(a < X < a + \Delta a) = F(a + \Delta a) - F(a).$$

Устремляя Δa к нулю, в силу непрерывности $F(x)$ в точке a получаем:

$$\lim_{\Delta a \rightarrow 0} [F(a + \Delta a) - F(a)] = 0, \text{ откуда: } P(X = a) = 0. \quad (4.15)$$

Следует отметить, что из (4.15) не следует, что событие $X = a$ невозможно. В результате испытаний непрерывная случайная величина X обязательно примет одно из возможных значений в диапазоне своего определения. В частности, этим значением может быть $X = a$.

На рис. 4.2, а приведен типовой вид плотности (промасштабирована для наглядности) и функции распределения, обозначенных $f(x)$ и $F(x)$.

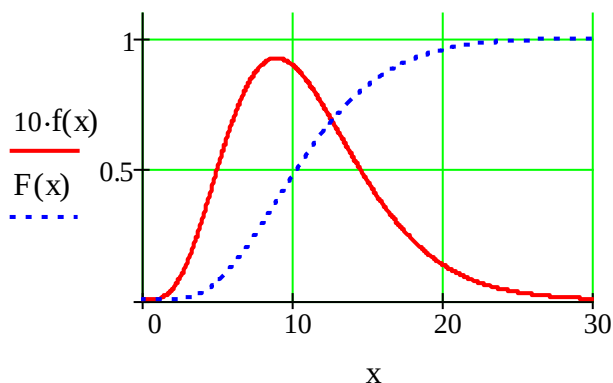


Рис. 4.2, а. Вид плотности и функции распределения

На рис. 4.2, б приведены кривые плотности распределения и дана геометрическая интерпретация свойств (4.7) и (4.12) функции распределения.

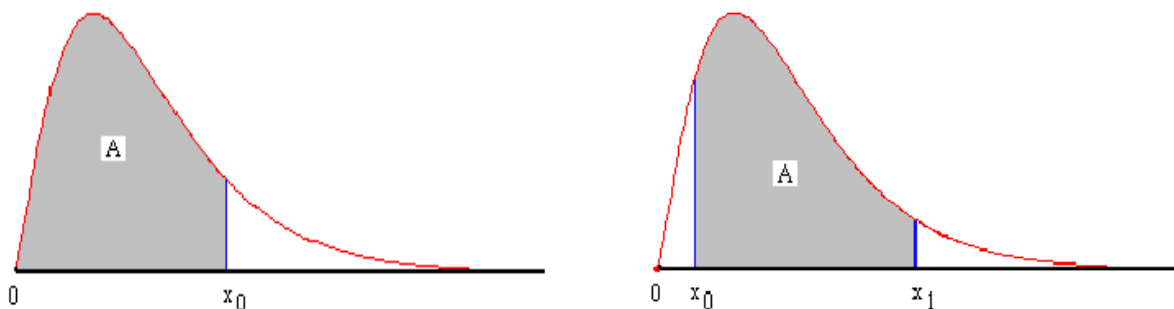


Рис. 4.2, б. Геометрическая интерпретация свойств (4.7) и (4.12)

Площади A на левом и правом рис. 4.2, б представляют функцию распределения $F(x_0)$ и вероятность попадания значений случайной величины в интервал (x_0, x_1) соответственно; последняя вероятность равна разности $[F(x_1) - F(x_0)]$. Незатушеванная площадь на левом рис. 4.2, б равна $1 - A = 1 - F(x_0)$. Сумма незатушеванных площадей на правом рис. 4.2, б равна $1 - A = F(x_0) + [1 - F(x_1)]$.

Рассмотрим несколько типовых задач.

Пример 4.1. Пусть функция распределения имеет вид:

$F(x) = 1 - 0.5(k^2x^2 + 2kx + 2)e^{-kx}; x \geq 0, k \geq 0$. Определить вероятность попадания значений случайной величины в интервал $(0; 1/k)$.

□ Решение. Согласно свойству (4.12) искомая вероятность равна:

$$F(1/k) - F(0) = 1 - 5/(2e) = 0.0803.$$

Копия файла Mathcad с решением этого примера приведена ниже. ■

$$F(x) := 1 - 0.5 \cdot (k^2 \cdot x^2 + 2 \cdot k \cdot x + 2) \cdot \exp(-k \cdot x)$$

$$F\left(\frac{1}{k}\right) - F(0) \rightarrow 1 - 2.5 \cdot \exp(-1)$$

$$F\left(\frac{1}{k}\right) - F(0) \text{ float } ,5 \rightarrow 8.030 \cdot 10^{-2}$$

Пример 4.2. Пусть функция распределения задана следующим образом:

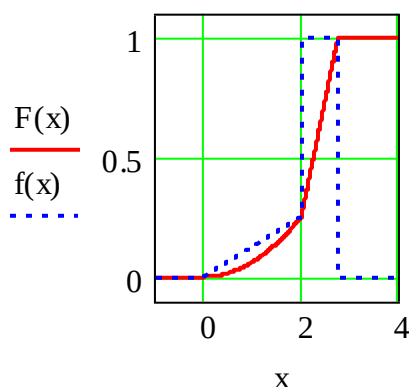
$$F(x) = [(0 \text{ при } x < 0); (x^2/16, 0 \leq x < 2); (x - 7/4, 2 \leq x < 11/4); (1, x \geq 11/4)].$$

Определить плотность вероятности $f(x)$ и вероятность попадания значений случайной величины в интервал $(1; 2,5)$.

□ Решение. Решение, выполненное в Mathcad, представлено на рис. 4.3.

$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ \frac{x^2}{16} & \text{if } 0 \leq x < 2 \\ x - \frac{7}{4} & \text{if } 2 \leq x < \frac{11}{4} \\ 1 & \text{if } x \geq \frac{11}{4} \end{cases}$$

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ \frac{x}{8} & \text{if } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{if } 2 \leq x < \frac{11}{4} \\ 0 & \text{if } x \geq \frac{11}{4} \end{cases}$$



$$F(2.5) - F(1) = 0.688$$

$$\int_1^{2.5} f(x) dx = 0.688$$

$$\int_0^{\frac{11}{4}} f(x) dx = 1$$

Рис. 4.3. Решение примера 4.2

Для определения плотности распределения, соответствующей заданной $F(x)$, необходимо воспользоваться свойством (4.14). Определение вероятности попадания значений случайной величины X в заданный диапазон можно осуществить с применением одной из форм свойства (4.12).

Для задания функций на интервалах используются элементы программных блоков (**Add Line** и оператор **if**). Искомая вероятность равна 0.688. ■

Пример 4.3. Задана плотность распределения случайной величины:

$f(x) = [(0, x < 1); (A/x^2, x \geq 1)]$. Определить:

- 1) коэффициент A ;
- 2) $F(x)$;
- 3) вероятность попадания значений случайной величины в интервал $(2, 3)$;
- 4) вероятность того, что при четырех независимых испытаниях случайная величина X ни разу не попадет в интервал $(2, 3)$.

□ Решение. Для определения неизвестного параметра A плотности вероятностей $f(x)$ необходимо воспользоваться основным свойством (4.6) плотностей распределений. При этом можно идти двумя путями:

- получить выражение для интеграла от $f(x)$ и, приравняв это выражение единице, получить A ;
- составить уравнение, в левой части которого указанный интеграл, а в правой — единица.

Решение этого уравнения может быть найдено в Mathcad с помощью вычислительного блока с ключевыми словами **given** и **find**. Аналогичное уравнение будет решено на рис 4.6 (п. 2).

Для решения примера выберем первый, более простой, путь.

На рис. 4.4 приведены фрагменты решения примера в системе Mathcad с использованием операторов символьных преобразований. Дадим краткие комментарии к полученным результатам.

$$\begin{array}{ll}
 1. & \int_1^{\infty} \frac{A}{x^2} dx \rightarrow A \\
 2. & \int_1^x \frac{1}{u^2} du \text{ simplify } \rightarrow \frac{x-1}{x} \quad F(x) := \frac{(x-1)}{x} \quad x \geq 1 \\
 3. & F(3) = \frac{2}{3} \quad F(2) = \frac{1}{2} \quad F(3) - F(2) = \frac{1}{6} \\
 4. & q := 1 - \frac{1}{6} \quad q = 0.833 \quad q^4 = 0.482
 \end{array}$$

Рис. 4.4. Фрагменты решения задачи 4.3

В диапазоне $(-\infty < x < 1)$ плотность вероятности равна нулю по условию. Поэтому интеграл (4.6) берется в значимой для решения задачи зоне определения $x \geq 1$. Этот интеграл равен A , поэтому, согласно (4.6), $A = 1$.

При определении $F(x)$ интеграл (4.6) в нашей задаче должен рассматриваться в виде суммы двух интегралов от $f(x)$. Первый берется в пределах $(-\infty,$

x) для зоны определения $x < 1$, в которой $f(x) = 0$. Второй интеграл в пределах $(1, x)$ при $x \geq 1$ представлен на рис. 4.4 под цифрой 2. Искомая функция распределения $F(x) = 0$ при $x < 1$ и $F(x) = (x - 1)/x$ при $x \geq 1$.

Ответ на третий вопрос опирается на полученные результаты и свойство (4.12); он представлен на рис. 4.4 под цифрой 3: $F(3) - F(2) = 1/6$.

При ответе на последний вопрос вначале определим вероятность q того, что значения случайной величины не попадут в интервал $(2, 3)$ при одном испытании. Вероятность попасть в этот интервал была получена в позиции 3 и равна $1/6$. Поэтому $q = 1 - 1/6 = 0.833$. Учитывая независимость четырех испытаний и возводя q в четвертую степень, получаем искомую вероятность. Она равна 0.482. ■

4.4. Числовые характеристики случайных величин

Основные понятия, связанные с законами распределения дискретных и непрерывных случайных величин, сведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Дискретные случайные величины	Непрерывные случайные величины
Ряд распределения (4.1)	Плотность распределения (4.6)
Функция распределения и кумулятивная вероятность (4.2)	Функция распределения (4.7)

Полная характеристика случайных величин с применением элементов табл. 4.1 требуется не всегда. Существует множество прикладных задач вероятностного анализа случайных величин, в которых достаточно использовать лишь отдельные свойства законов распределения, выраженные в числовой форме. Таким образом, многие вероятностные задачи не требуют задания законов распределения и могут быть успешно решены с применением лишь их отдельных числовых параметров. Например, при исследовании степени влияния в среднем случайной величины на физический процесс потребуется лишь знание среднего значения исследуемой случайной величины, вокруг которого группируются ее возможные значения. При более детальном анализе может дополнительно потребоваться параметр, характеризующий степень рассеяния значений случайной величины относительно среднего.

Числовыми характеристиками случайной величины называют **неслучайные** численные параметры, позволяющие в предельно сжатой, компактной форме представить основные особенности закона распределения.

Числовые характеристики имеют исключительно широкую область практического применения. Использование числовых характеристик резко облег-

чает решение многих прикладных задач, решаемых методами теории вероятностей и математической статистики.

Числовые характеристики условно подразделяются на характеристики положения, характеристики рассеяния и характеристики формы. Ряд числовых характеристик обобщаются понятием момента распределения. Рассмотрим основные типы числовых характеристик случайных величин и их свойства.

4.5. Числовые характеристики положения (математическое ожидание, квантиль, медиана, мода)

Числовые характеристики случайных величин — не случайны, они полностью определены и относятся к детерминированным действительным числам.

Среди характеристик случайных величин особое место занимают так называемые характеристики положения, представляющие собой точки на числовой оси, вокруг которых группируются значения случайной величины. Остановимся на наиболее часто используемых числовых характеристиках положения дискретных и непрерывных случайных величин. К числу важнейших из них относится математическое ожидание.

Рассмотрим дискретную случайную величину, заданную своим законом распределения (4.1), т. е. значениями x_i и вероятностями p_i . Множество значений x_i , являясь счетным, может быть как конечным, так и бесконечным.

Охарактеризуем положение дискретной случайной величины на оси абсцисс с помощью средневзвешенной величины ее возможных значений. Для этого введем относительные веса v_i , в сумме равные единице:

$$v_i = p_i / \sum_j p_j; \quad \sum_i v_i = 1.$$

Искомое средневзвешенное значение найдем как сумму произведений $v_i x_i$, которую обозначим $M(X)$. Учитывая, что сумма вероятностей p_i равна единице (см. (4.1)), окончательно получим:

$$M(X) = \sum_i x_i p_i. \quad (4.16)$$

Полученное значение носит название математического ожидания.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех ее возможных значений на вероятности этих значений.

В случае бесконечного множества значений x_i ряд в правой части (4.16) предполагается абсолютно сходящимся (т. е. сходится ряд, составленный из абсолютных значений $x_i p_i$), поэтому порядок расположения элементов ряда не влияет на его сумму и может быть произвольным.

Ниже, наряду с обозначением $M(X)$, математическое ожидание будем обозначать также символом m_x .

Выражение (4.16) позволяет дать физическую интерпретацию понятия математического ожидания. Для этого предположим, что x_i — абсциссы материальных точек с массами p_i , причем сумма этих масс согласно (4.1) равна единице. Тогда очевидно, что математическое ожидание (4.16) может рассматриваться в качестве абсциссы центра масс рассматриваемой системы материальных точек.

Во второй части, при рассмотрении основ математической статистики, будет показано, что математическое ожидание дискретной случайной величины тесно связано со средним арифметическим значением всех ее возможных значений, полученным при большом числе опытов. Эта связь имеет ту же природу, которая имеет место применительно к связи вероятности с относительной частотой появления событий (см. разд. 1.4). Действительно, предположим, что при осуществлении n испытаний дискретная случайная величина X приняла m_1 раз значение x_1 , m_2 — значение x_2 и т. д., причем $\sum_i m_i = n$. Тогда среднее

арифметическое всех значений, принятых случайной величиной X , составляет:

$$\bar{x} = \sum_i w_i x_i, \quad w_i = m_i / n. \quad (4.17)$$

Здесь w_i — относительная частота i -го значения X . При увеличении числа испытаний величина w_i стремится к значению вероятности p_i появления x_i , т.е. среднее арифметическое (4.17) приближается к математическому ожиданию (4.16). Чем больше число испытаний, тем ближе значение $\bar{x}$ к $M(X)$.

Обобщая определение (4.16) на случай функции $U(X)$, с учетом (4.3) получим, что математическое ожидание произвольной функции $U(X)$ дискретной случайной величины X определяется равенством:

$$M[U(X)] = \sum_i u(x_i) p_i. \quad (4.18)$$

В случае бесконечного множества значений x_i ряд в правой части (4.18) предполагается, так же как и в предыдущем случае (см. (4.16)), абсолютно сходящимся.

Для непрерывной случайной величины понятие математического ожидания вводится аналогично, но суммирование произведений $p_i x_i$ заменяется интегрированием произведений x на плотность вероятности $f(x)$.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины определяется равенством:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \quad (4.19)$$

причем предполагается, что интеграл в (4.19) абсолютно сходится.

Аналогично (4.18), математическое ожидание произвольной функции $W(X)$ непрерывной случайной величины X определяется соотношением:

$$M[W(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} W(x) f(x) dx, \quad (4.20)$$

Из приведенных определений математического ожидания случайной величины следуют его достаточно простые свойства, перечисляемые ниже.

4.5.1. Свойства математического ожидания случайной величины

Математическое ожидание случайной величины обладает следующими основными свойствами:

$$\left. \begin{array}{l} 1) M(c) = c, \quad c = \text{const}; \\ 2) M(cX) = c M(X); \\ 3) M(cX + b) = c M(X) + b, \quad c = \text{const}, b = \text{const}. \end{array} \right\} \quad (4.21)$$

Свойства просто доказываются путем подстановки соответствующих выражений в формулы (4.16) и (4.18)—(4.20) для математического ожидания. Первое свойство отражает тот факт, что математическое ожидание постоянной величины (детерминированной константы) равно самой постоянной величине. Второе свойство подчеркивает практически важную особенность математического ожидания — возможность вынесения неслучайных элементов за пределы оператора математического ожидания. Третье свойство является некоторым обобщением предыдущих свойств на случай линейной формы от случайной величины. В *главе 7*, в которой рассматриваются системы случайных величин (векторные случайные величины), свойства математических ожиданий будут дополнены (*см. разд. 7.4, 7.5*).

Легко убедиться в том, что рассмотренные свойства (4.21) остаются в силе и в тех случаях, когда c и b — произвольные неслучайные функции.

Важное место среди числовых характеристик распределений занимают квантили, определяющие связь вероятностей (4.2), (4.7) с соответствующим значением случайной величины на числовой оси. Предполагая строго возрастающий характер функции распределения случайной величины X , введем следующее определение.

Квантили порядка p называется такое значение x_p случайной величины, для которой

$$P(X < x_p) = F(x_p) = p. \quad (4.22)$$

Применительно к рис. 4.3, a квантиль x_0 соответствует $F(x_0)$, т. е. затухающей площади A — вероятности нахождения случайной величины в диапазоне $(0, x_0)$.

Квантили разделяются на следующие группы:

- ° квантили $x_{0.25}$, $x_{0.5}$, $x_{0.75}$; делят область определения случайной величины на четыре отрезка, вероятность попадания в каждый из которых одинакова и равна $1/4$. Таким образом, для, например, непрерывной случайной величины квантили делят всю площадь под плотностью вероятности на четыре равные части. Квантили $x_{0.25}$ и $x_{0.75}$ иногда называют нижним и верхним квантилями соответственно. Квантиль $x_{0.5}$ (делит площадь пополам) носит название **медианы**.

ны. Вероятности попадания значений случайной величины в области слева и справа от $x_{0.5}$ равны между собой и имеют значения 0.5:

$$P(X < x_{0.5}) = P(X > x_{0.5}) = 0.5;$$

° децили $x_{0.1}, x_{0.2}, \dots, x_{0.9}$ — делят область определения случайной величины на десять отрезков, вероятность попадания в каждый из которых одинакова и равна 1/10;

° процентиля $x_{0.01}, x_{0.02}, \dots, x_{0.99}$ — делят область определения случайной величины на сто отрезков, вероятность попадания в каждый из которых одинакова и равна 1/100.

Квантили широко используются в практике вероятностных вычислений, при решении задач генерации (см. *разд. 5.7*) случайных чисел с заданными законами распределения, при проверке гипотез (см. *главу 4, ч. II*) и т.д. Математически задача вычисления квантиля состоит в определении такого верхнего предела интегрирования (суммирования) в выражениях типа (4.7) и (4.2), который соответствует заданному значению функции распределения (или кумулятивной вероятности). Поэтому иногда употребляется еще одно название квантиля — обратная функция кумулятивной вероятности, распространенное в англоязычной литературе и математических прикладных программ. Решение, в общем случае, нетривиальной задачи вычисления квантиля может быть получено итеративным путем, что становится доступным при использовании СКМ.

Значения квантилей для различных законов распределений можно найти в специальных таблицах (см. например, [5]). В то же время проблема вычисления квантилей резко упрощается применением систем компьютерной математики. В программных системах Mathcad для этих целей имеется широкий набор встроенных функций, имя которых имеет начальный символ q , а следующее поле содержит код или название закона распределения. При вычислении квантилей специальных распределений, которые не предусмотрены в Mathcad, значения квантилей можно определить путем прямого решения уравнений (4.22) с применением вычислительных блоков. Пример подобного решения приведен ниже на рис. 4.6.

В *главе 3* (см. рис. 3.1, рис. 3.8—3.10) уже были использованы отдельные встроенные функции Mathcad с начальными символами d и p для биномиального, пуассоновского и нормального распределений. Для примера приведем встроенные функции вычисления квантилей для этих распределений:

qnorm(A, m, σ) — вычисляет квантиль x_0 порядка A нормального распределения с математическим ожиданием m и стандартным отклонением σ (см. *разд. 5.2*);

qbinom(A, n, p) — вычисляет квантиль x_0 порядка A биномиального распределения с числом испытаний n и вероятностью появления успеха в каждом испытании p ;

qpois(A, λ) — вычисляет квантиль x_0 порядка A распределения Пуассона с интенсивностью $\lambda = np$.

Параметр A в перечне аргументов встроенных функций представляет заданную вероятность принадлежности значений случайной функции промежутку от левой границы ее определения до x_0 (см. рис. 4.3, а). Для непрерывных случайных величин эта вероятность — функция распределения $F(x_0)$. Для дискретных — кумулятивная вероятность как вероятность того, что случайная величина X не будет превышать значения x_0 .

На рис. 4.5 приведен пример вычисления квантилей для биномиального (qb) и пуассоновского (qp) распределений при $n = 150$, $k = 70$, $p = 0.4$.

$k := 70$	$n := 150$	$p := 0.4$
$Ab := \text{pbinom}(k, n, p)$		$Ab = 0.959$
$qb(Ab) := \text{qbinom}(Ab, n, p)$		$qb(Ab) = 70$
$Ap := \text{ppois}(k, n \cdot p)$		$Ap = 0.91$
$qp(Ap) := \text{qpois}(Ap, n \cdot p)$		$qp(Ap) = 70$

Рис. 4.5. Пример вычисления квантилей

Предварительно для $k = 70$, с помощью встроенных функций **pbinom** и **ppois**, определены кумулятивные вероятности Ab и Ap соответственно. Полученные значения введены в аргументы функций **qbinom** и **qpois** в качестве исходных данных. В результате вычислений по этим функциям получаем квантили, значения которых, естественно, совпадают с исходным значением $k = 70$.

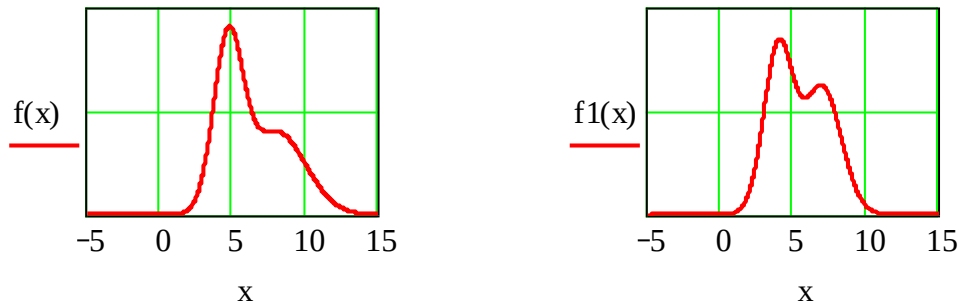
Еще одной числовой характеристикой случайной величины служит **мода** x_M . Модой дискретной случайной величины называется ее наиболее вероятное значение. Мода непрерывной случайной величины равна тому ее значению (или нескольким значениям), которое соответствует максимуму (нескольким максимумам) плотности вероятности. Из определения моды следует, что она имеет место не всегда. Существуют распределения, не имеющие максимумов вероятностей (для дискретных случайных величин) или плотности (для непрерывных случайных величин). Однако большую распространенность имеют так называемые модальные распределения, т. е. имеющие один или несколько указанных максимумов. Такие распределения носят названия унимодальных (один максимум), двумодальных (два максимума), трехмодальных (три максимума) и полимодальных (несколько максимумов).

На рис. 4.6 изображены два характерных типа плотностей распределения: унимодальная $f(x)$ и двумодальная $f_1(x)$ плотности, полученные в Mathcad комбинацией двух плотностей нормального распределения (**dnorm**). Непосредственной проверкой $f(x)$ и $f_1(x)$ можно убедиться в выполнении для них основного свойства плотностей вероятностей (4.6).

Вероятность $P(a, b)$ попадания в интервал $[a, b]$ значений случайной величины первого распределения введена как функция пользователя, которая позволяет вычислять соответствующие вероятности, задавая лишь границы диа-

пазона. Это использовано на рис. 4.6 для определения медианы (п. 1) и квартилей (п. 3) первого распределения. Для плотности $f(x)$ медиана $x_{0.5} = 5.8$; нижний и верхний квартили равны: $x_{0.25} = 4.59$, $x_{0.75} = 8$.

$$\begin{aligned} y1(x) &:= \text{dnorm}(x, 8, 2) & y3(x) &:= \text{dnorm}(x, 7, 1.3) \\ y2(x) &:= \text{dnorm}(x, 4.7, 1) & y4(x) &:= \text{dnorm}(x, 4, 1) \\ f(x) &:= 0.5 \cdot (y1(x) + y2(x)) & f1(x) &:= 0.5 \cdot (y3(x) + y4(x)) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \boxed{1} \quad P(a, b) &:= \int_a^b f(x) dx & P(-5, 5.8) &= 0.5 & P(5.8, 15) &= 0.5 \\ \boxed{2} \quad q &:= 0 & \text{given} & \int_{-\infty}^q f(x) dx = 0.5 & \boxed{\text{find}(q) = 5.8} \\ \boxed{3} \quad P(-5, 4.59) &= 0.25 & P(8, 15) &= 0.25 \\ \boxed{4} \quad \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx &= 6.35 & \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f1(x) dx &= 5.5 \end{aligned}$$

Рис. 4.6. Характеристики положения

В п. 2 рис. 4.6 значение медианы определено путем решения соответствующего уравнения в рамках вычислительного блока (ключевые слова **given** и **find** служат границами этого блока). Предварительно задается нулевое приближение искомой величины (на рис. 4.6 обозначена q). Знак равенства в уравнении вычислительных блоков — оператор соответствия, который вызывается клавишами (**<Ctrl>** + **<=>**). Аналогично можно находить квантили и других распределений.

В п. 4 определяются математические ожидания случайных величин двух распределений: $M(X) = 6.35$; $M(X1) = 5.5$.

Для данного примера (см. рис. 4.6) унимодальное распределение $f(x)$ имеет моду $x_M = 5$, двумодальное $f1(x)$ — две моды: $x1_M = \sim 4$ и $x2_M = \sim 7$.

Некоторые унимодальные распределения имеют симметричный характер, т. е. многоугольник распределений или плотность распределения имеют ось симметрии, относительно которой левая и правая части указанных функций

идентичны. Для таких симметричных распределений абсцисса оси симметрии является одновременно и математическим ожиданием (центр распределения), и модой, и медианой.

4.6. Числовые характеристики рассеяния (дисперсия, коэффициент вариации)

Рассмотренные выше характеристики положения позволяют оценить лишь часть практически важных свойств случайной величины, например, центр распределения множества ее значений, наиболее вероятное значение и проч. Для большинства задач, связанных с исследованием вероятностных свойств процессов и явлений, технических объектов и систем, знания этих параметров недостаточно. Так, при анализе напряжения питания технических установок важно знать не только среднее значение напряжения в течение фиксированного момента времени, но и его возможные отклонения от среднего, так называемые «броски» напряжения, в сильной степени влияющие на надежность объектов. Таким образом, необходимы данные, характеризующие разброс, рассеяние значения случайной величины относительно выбранного значения. Таким значением, относительно которого оцениваются характеристики рассеяния, служит математическое ожидание случайной величины.

Оценку разброса значений случайной величины можно получить с использованием различных числовых характеристик. Все эти характеристики объединяет единая основа — операция центрирования, которая связана с получением отклонения случайной величины от ее математического ожидания. В результате операции центрирования получается центрированная случайная величина, которую будем обозначать надстрочным значком (0).

Центрированной случайной величиной X^0 , соответствующей X , называется разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием:

$$X^0 = X - M(X) = X - m_x. \quad (4.23)$$

Нетрудно видеть, что математическое ожидание X^0 равно нулю. Действительно, применяя к выражению (4.23) свойства математического ожидания (4.21) и учитывая, что m_x — не случайная величина, получим:

$$M(X^0) = M(X) - M(X) = 0. \quad (4.24)$$

Среди числовых характеристик рассеяния случайной величины наиболее широко используется дисперсия.

Дисперсией $D(X)$ случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от математического ожидания, т. е. математическое ожидание квадрата центрированной случайной величины:

$$D(X) = M[(X - m_x)^2] = M[(X^0)^2]. \quad (4.25)$$

Из определения дисперсии следует, что формулы для ее вычисления могут быть получены путем непосредственного использования определения математического ожидания (4.18) и (4.20) от функций случайных величин. Это озна-

чает, что дисперсия дискретной случайной величины X в соответствии с (4.18) вычисляется по формуле:

$$D(X) = \sum_i (x_i - m_x)^2 p_i = \sum_i (x_i^0)^2 p_i. \quad (4.26)$$

Дисперсия непрерывной случайной величины X согласно (4.20) может быть вычислена по формуле:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x^0)^2 f(x) dx. \quad (4.27)$$

Другим распространенным обозначением дисперсии служит

$$D(X) = \sigma^2(X), \quad \sigma(X) = \sqrt{D(X)}, \quad (4.28)$$

где $\sigma(X)$ — среднее квадратическое отклонение (стандарт отклонения).

Другие формулы для вычисления дисперсии, более удобные в ряде вероятностных задач, могут быть получены путем преобразования выражения (4.25). Раскрывая квадрат разности и используя свойства математического ожидания (4.21), получим:

$$D(X) = M[(X - m_x)^2] = M(X^2 - 2X m_x + m_x^2) = M(X^2) - m_x^2. \quad (4.29)$$

Выражение (4.29) характеризует одно из свойств дисперсии, которое формулируется следующим образом: дисперсия случайной величины равна разности между математическим ожиданием квадрата этой величины и квадратом ее математического ожидания. Наряду с определением (4.25), свойство (4.29) часто используется в качестве определения понятия дисперсии случайной величины.

Дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности случайной величины. Поэтому в ряде вероятностных задач более удобно использование стандарта отклонения $\sigma(X)$, размерность которого соответствует размерности случайной величины.

Из приведенных определений и характеристик дисперсии следуют ее свойства, основные из которых формулируются ниже.

4.6.1. Свойства дисперсии случайной величины

Дисперсия случайной величины обладает следующими основными свойствами:

$$\left. \begin{array}{l} 1) D(c) = 0, \quad c = \text{const}; \\ 2) D(cX) = c^2 D(X); \\ 3) D(cX + b) = c^2 D(X), \quad c = \text{const}, \quad b = \text{const}. \end{array} \right\} \quad (4.30)$$

Доказательство первого свойства прямо следует из определений (4.25) или (4.26), поскольку математическое ожидание детерминированной постоянной величины c , согласно (4.21), равно самой величине c . Второе свойство отражает отмеченную выше особенность размерности дисперсии, которая соответст-

вует квадрату размерности случайной величины X . Подставляя cX в выражение (4.25) и учитывая свойства математического ожидания (4.21), имеем:

$$D(cX) = M[(cX - cm_x)^2] = M[c^2(X - m_x)^2] = c^2 M[(X - m_x)^2] = c^2 D(X).$$

Третье свойство легко доказывается, учитывая, что $M(cX + b) = c M(X) + b$.

В главе 7, в которой рассматриваются системы случайных величин (векторные случайные величины), свойства дисперсий будут дополнены (см. разд. 7.4, 7.6).

Свойства (4.30) остаются в силе и в тех случаях, когда c и b — произвольные неслучайные функции.

Дисперсия, а также стандарт отклонения служат абсолютными характеристиками рассеяния случайной величины. Для многих технических приложений интерес представляет то, насколько велико это рассеяние по сравнению со средним значением случайной величины. Так, если оно составляет доли процента, им в некоторых вероятностных задачах можно было бы пренебречь. Если же рассеяние составляет десятки процентов, то пренебрегать им уже, по видимому, нельзя. Для таких оценок относительного рассеяния случайной величины X служит так называемый **коэффициент вариации** γ_x , определяемый следующим равенством:

$$\gamma_x = \sigma(X)/M(X). \quad (4.31)$$

Коэффициент вариации (4.31) обычно исчисляется в процентах.

Наряду с приведенными числовыми характеристиками рассеяния иногда используется **среднее абсолютное отклонение** $a_x = M(|X - m_x|)$ случайной величины, которое формируется из модулей отклонения. На основе этих модулей могут быть сформированы и другие числовые параметры рассеяния.

4.7. Числовые характеристики формы (асимметрия, эксцесс)

Среди числовых характеристик случайных величин имеется несколько параметров, которые могут быть условно названы характеристиками формы. Под термином «форма» здесь понимаются вид и особенности распределений вероятностей, например, вид многоугольника распределений для дискретных случайных величин, форма плотности распределения для непрерывных случайных величин. Среди законов распределений своеобразным «эталоном формы» признается нормальное распределение, упоминавшееся выше в связи с локальной теоремой Муавра—Лапласа (см. разд. 3.4). Оно относится к симметричным распределениям с характерной колоколообразной формой кривой плотности вероятностей, которая для случая нулевого математического ожидания и единичной дисперсии описывается выражением (3.30):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Для оценки особенностей формы распределения (несимметричности, острове́ршинности) применяются две числовые характеристики — коэффициенты асимметрии и эксцесса.

Коэффициентом асимметрии (или просто асимметрией) A_X называется отношение взвешенной суммы кубов отклонений случайной величины от ее математического ожидания к стандарту отклонений в кубе:

$$A_X = M[(X - m_X)^3] / \sigma^3(X). \quad (4.32)$$

Как следует из определения коэффициента (4.32), он является безразмерным и характеризует степень несимметричности распределения. Действительно, отклонения случайной величины слева от центра распределений будут отрицательными, справа — положительными. Поэтому для симметричных распределений $A_X = 0$, поскольку в этом случае взвешенные суммы кубов отклонений случайной величины справа и слева от центра распределения (математического ожидания) компенсируют друг друга в числителе A_X . В случае большей вытянутости распределения в левой части от центра распределения будут преобладать отрицательные отклонения, т. е. для таких распределений асимметрия будет отрицательная ($A_X < 0$). При большей вытянутости распределения в правой части от центра распределения $A_X > 0$.

Эксцессом случайной величины называют безразмерный коэффициент:

$$E_X = \{M[(X - m_X)^4] / \sigma^4(X)\} - 3. \quad (4.33)$$

Из (4.33) следует, что эксцесс определяется отношением взвешенной суммы четвертой степени отклонений случайной величины к квадрату дисперсии. Для нормального распределения это отношение равно трем, т. е. $M[(X - m_X)^4] / \sigma^4(X) = 3$ (см. разд. 4.9) и $E_X = 0$. Поэтому эксцесс позволяет оценить отличие формы распределения от нормального. При большей крутизне плотности распределения эксцесс $E_X > 0$.

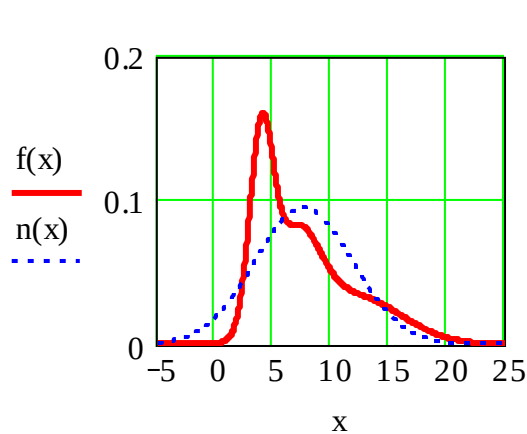
На рис. 4.7 приведены результаты вычисления параметров рассеяния и формы для случайной величины, плотность распределения которой обозначена $f(x)$ и представлена на графике сплошной линией.

Свойство плотности распределения подтверждает интеграл от $f(x)$ в диапазоне определения случайной величины, который равен единице. Для исследуемого распределения вычисляются математическое ожидание m , дисперсия d , стандарт отклонения σ . Взвешенные суммы k -ых степеней отклонений обозначены (см. рис. 4.7) через $\mu(k)$. Величина $\mu(k)$ при $k = 2$ соответствует дисперсии; $\mu(3)$ и $\mu(4)$, согласно выражениям (4.32) и (4.33), используются при вычислении асимметрии (A_X) и эксцесса (E_X).

Коэффициент асимметрии для исследуемого распределения получился положительным ($A_X = 0.966$), поскольку форма кривой $f(x)$ имеет более вытянутую часть справа от центра распределения ($m = 7.662$). Полученное значение эксцесса для данного примера свидетельствует, что по усредненной крутизне кривая $f(x)$ отличается от плотности вероятностей нормального распределения на 0.34. Для сравнения, пунктиром на графике (см. рис. 4.7) изображена плот-

ность вероятностей нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием $m = 7.662$ и дисперсией $d = 17.823$, т. е. с параметрами исследуемого распределения.

$$\int_{-5}^{25} f(x) dx = 1 \quad m := \int_{-5}^{25} x \cdot f(x) dx \quad \mu(k) := \int_{-5}^{25} (x - m)^k \cdot f(x) dx$$



$$d := \mu(2) \quad \sigma := \sqrt{d} \quad m = 7.662 \quad d = 17.823 \quad \sigma = 4.222$$

$$A_x := \frac{\mu(3)}{\sigma^3} \quad E_x := \frac{\mu(4)}{\sigma^4} - 3$$

$$A_x = 0.966$$

$$E_x = 0.34$$

Рис. 4.7. Характеристики рассеяния и формы

4.8. Теоретические моменты распределения

Ряд основных числовых характеристик объединяются понятием момента распределения. Термин «момент» хорошо известен и широко используется в механике для описания распределения масс. В теории вероятностей моменты применяются для введения базовых числовых характеристик случайных величин и свойств их распределений. Рассматриваемые ниже моменты распределения вероятностей назовем теоретическими; им будут соответствовать определенные аналитические выражения, оперирующие теоретическими вероятностями значений случайной величины и плотностями распределения. Это отличает рассматриваемые здесь моменты от так называемых эмпирических, которые имеют аналогичную сущность, но вычисляются по данным наблюдений (измерений) случайных величин. Эмпирические моменты распределения рассматриваются и используются во второй части для решения задач оценки параметров распределений по данным наблюдений.

Моменты распределения подразделяются по типам и порядкам. В практике вероятностного анализа применяются моменты распределения двух основных типов: начальные и центральные. Начальные моменты будем обозначать ν , центральные — μ . По порядкам моменты подразделяются на моменты первого, второго и т. д. порядков.

Начальным моментом k -го порядка случайной величины X называется математическое ожидание величины X^k :

$$v_k = M(X^k). \quad (4.34)$$

Центральные моменты опираются на операцию центрирования (см. разд. 4.6) и оперируют с центрированными случайными величинами $X^0 = X - m_x$ (4.23).

Центральным моментом k -го порядка случайной величины X называется математическое ожидание величины $(X - m_x)^k = (X^0)^k$:

$$\mu_k = M[(X - m_x)^k]. \quad (4.35)$$

Из определений следует, что формулы для вычисления моментов дискретных и непрерывных случайных величин могут быть получены путем непосредственного применения определения математического ожидания (4.18) и (4.20) к выражениям (4.34) и (4.35). Это означает, что для начальных и центральных моментов дискретных и непрерывных случайных величин справедливы следующие формулы:

- начальный момент k -го порядка дискретной случайной величины:

$$v_k = \sum_i (x_i)^k p_i; \quad (4.36)$$

- начальный момент k -го порядка непрерывной случайной величины:

$$v_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx; \quad (4.37)$$

- центральный момент k -го порядка дискретной случайной величины:

$$\mu_k = \sum_i (x_i - m_x)^k p_i; \quad (4.38)$$

- центральный момент k -го порядка непрерывной случайной величины:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k f(x) dx. \quad (4.39)$$

Сопоставление выражений (4.34)—(4.39) с ранее введенными числовыми характеристиками случайных величин показывает, что моменты распределения до четвертого порядка включительно были использованы нами ранее при определении математического ожидания, дисперсии, асимметрии и эксцесса. Действительно, начальный момент первого порядка — математическое ожидание (4.16) и (4.19), центральный момент второго порядка — дисперсия (4.25). В выражениях для асимметрии (4.32) и эксцесса (4.33) были использованы центральные моменты третьего и четвертого порядков соответственно. В выражении (4.24) вычислялся первый центральный момент. Таким образом, справедливы следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} 1) v_1 &= M(X) = m_x; \quad \mu_1 = 0; \\ 2) \mu_2 &= D(X) = \sigma^2(X), \quad \sigma(X) = \sqrt{\mu_2}; \\ 3) A_X &= \mu_3 / \sigma^3(X); \quad E_X = \{\mu_4 / \sigma^4(X)\} - 3. \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

Применение свойств математического ожидания (4.21) к центральным моментам позволяет выразить их через начальные моменты и наоборот. Ранее

аналогичным путем была получена формула (4.29) для дисперсии (второго центрального момента) через второй начальный момент и квадрат первого начального момента. Подобные формулы достаточно легко могут быть получены и для других центральных моментов. Справедливы следующие выражения, связывающие начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно:

$$\left. \begin{aligned} 1) \mu_2 &= v_2 - m_x^2 = v_2 - v_1^2; \\ 2) \mu_3 &= v_3 - 3v_1v_2 + 2v_1^3; \\ 3) \mu_4 &= v_4 - 4v_1v_3 + 6v_1^2v_2 - 3v_1^4. \end{aligned} \right\} \quad (4.41)$$

Моменты более высоких порядков применяются на практике весьма редко.

Завершая описание числовых характеристик случайных величин и способов определения их теоретических значений, отметим, что связанные с этой проблемой достаточно громоздкие вычисления резко облегчаются при использовании программных систем компьютерной математики. В качестве иллюстрации эффективности применения СКМ рассмотрим две типовые задачи определения числовых характеристик распределений случайных величин.

Пример 4.4. Даны значения $x_1 = -1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$ дискретной случайной величины. Заданы $v_1 = 0.1$; $v_2 = 0.9$. Определить: вероятности p_i значений x_i ($i = 1, 2, 3$) и дисперсию случайной величины.

□ Решение. Для определения вероятностей значений случайной величины необходимо составить систему трех уравнений. Первое уравнение формируется на основе выражения (4.1), согласно которому сумма вероятностей p_i возможных значений x_i должна быть равна единице. Два других уравнения составляем из выражений (4.36) для первого и второго начальных моментов, значения которых заданы по условию задачи.

Решая полученную систему линейных алгебраических уравнений (рис. 4.8), получаем искомые вероятности, для заданных исходных данных равные $p_1 = 0.4$, $p_2 = 0.1$, $p_3 = 0.5$.

На рис. 4.8 представлены результаты, полученные в системе Mathcad с иллюстрацией возможностей нескольких вариантов решения этой задачи.

В первом варианте сформированная система решается в вычислительном блоке, заключенном между ключевыми словами **given** и **find**. Особенность этих блоков заключается в том, что для получения числового результата необходимо предварительно задать начальные приближения искомых величин. В примере (см. рис. 4.8) они приняты нулевыми. Система вводится своими отдельными уравнениями. Знаки равенства в уравнениях при использовании вычислительных блоков — операторы соответствия (**<Ctrl> + <=>**). В результате функция **find** формирует вектор **P** искомых вероятностей.

Второй вариант основан на предварительном формировании символьной матрицы **A** и вектора **b** исследуемой системы алгебраических уравнений. Значения случайной величины представлены здесь в виде элементов вектора-столбца **X**, о чем свидетельствуют их подстрочные индексы. Для нумерации

элементов, начиная с единицы, системной переменной **ORIGIN**, которая ведет началом индексации, предварительно присваивается значение 1.

Вариант 1 $p1 := 0 \quad p2 := 0 \quad p3 := 0$

Given $p1 + p2 + p3 = 1 \quad -p1 + p3 = 0.1 \quad p1 + p3 = 0.9$

$P := \text{Find}(p1, p2, p3)$ $P^T = (0.4 \ 0.1 \ 0.5)$

Вариант 2 **ORIGIN = 1** $s := (-1 \ 0 \ 1)$ $x := s^T$

$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x1 & x2 & x3 \\ |x1|^2 & |x2|^2 & |x3|^2 \end{bmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $b := \begin{pmatrix} 1 \\ 0.1 \\ 0.9 \end{pmatrix}$

P1 := A⁻¹.b $P1^T = (0.4 \ 0.1 \ 0.5)$

P2 := Isolve(A, b) $P2^T = (0.4 \ 0.1 \ 0.5)$

Математическое ожидание: $s.P = 0.1$

$s0 := s - 0.1$ $s0 = (-1.1 \ -0.1 \ 0.9)$

Дисперсия: $\overrightarrow{(s0.s0)}.P = 0.89$

Рис. 4.8. Решение задачи 4.4

Для задания значений случайных величин используется вспомогательная строка **s**, после введения которой исходная символьная матрица **A** приобретает численные значения. Решение задачи по второму варианту получается обращением матрицы (результатирующий вектор **P1**) и с помощью встроенной функции **Isolve**, которая предназначена для решения систем линейных алгебраических уравнений (результатирующий вектор **P2**). В терминах второго варианта математическому ожиданию (4.16) соответствует скалярное произведение векторов **P** и **s**, которое вычисляется на рис. 4.8 для проверки.

При вычислении дисперсии осуществляется центрирование значений случайной величины (вектор **s0**). Значение дисперсии (4.26) получено в примере как результат скалярного произведения вектора **P** и вектора квадратов центрированных значений случайной величины. Этот вектор получен применением так называемой векторизации (стрелочка над произведением векторов **s0**), при которой для, например, произведения векторов результат получается также в виде вектора, элементы которого образованы произведениями одноименных элементов векторов-сомножителей. Дисперсия в данной задаче равна 0.89.

Принятая здесь процедура вычисления дисперсии по формуле (4.26) приведена лишь в качестве иллюстрации возможностей Mathcad. Условия данной задачи ($v_1 = 0.1$; $v_2 = 0.9$) позволяют упростить вычисления дисперсии, если использовать формулу (4.29): $v_2 - v_1^2 = 0.89$. ■

Пример 4.5. Пусть случайная величина X имеет плотность распределения $f(X) = A \exp [0.5 (-|x|)]$. Показать, что вторые начальный и центральный моменты равны. Найти параметр A , моменты v_1 и μ_2 , асимметрию и эксцесс.

□ Решение. На рис. 4.9 приведены результаты нахождения искомых параметров и числовых характеристик в системе Mathcad.

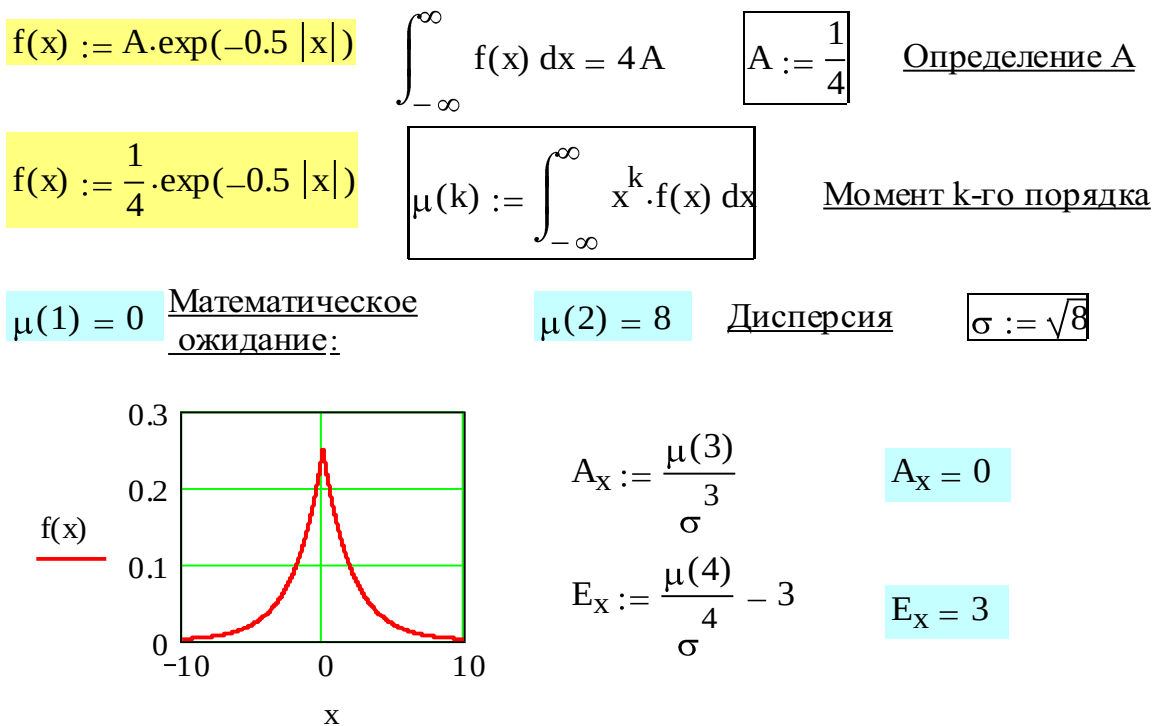


Рис. 4.9. Решение задачи 4.5

Ответ на первый вопрос очевиден. Заданное распределение симметрично, т. к. $f(x) = f(-x)$. Поэтому $M(X) = 0$ и, согласно (4.29), (4.37), (4.39), равны между собой как вторые, так и высшие центральные и начальные моменты. Кроме того, нулю равны все моменты данного распределения нечетных порядков.

Определение A осуществим, опираясь на основное свойство плотности вероятности (4.6). Интеграл от заданной плотности распределения в бесконечных пределах равен $4A$, откуда $A = 1/4$. После нахождения параметра A уточняем плотность и составляем выражение для k -го момента распределения μ_k . Дисперсия $\mu_2 = 8$, асимметрия и эксцесс, найденные по формулам (4.40), равны $A_x = 0$ и $E_x = 3$. ■

Задания к самостоятельной работе:

* Дискретная случайная величина X задана распределением вида $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $p_1 = q$; $p_2 = p$.

Определить математическое ожидание и дисперсию СВ X .

Ответ: $m_X = p$, $\sigma^2(X) = p(1 - p)$.

* Дискретная случайная величина X задана распределением, приведенным ниже в таблице. Известно также $m_X = 8$. Определить x_3 и p_3 .

$x_1 = 0.4$	$x_2 = 6$	x_3
$p_1 = 0.5$	$p_2 = 0,3$	p_3

Ответ: $x_3 = 30$, $p_3 = 0.2$.

* Дискретная случайная величина X принимает два значения: 3 и 5 с вероятностями 0.2 и 0.8 соответственно. Определить начальные и центральные моменты распределения первого и второго порядков.

Ответ: $\mu_1 = 4.6$, $\mu_2 = 21.8$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0.64$.

* Случайная величина X задана следующей плотностью распределения: $f(X) = 2X$ в интервале $(0; 1)$; вне этого интервала $f(X) = 0$. Найти m_X , $\sigma^2(X)$ и асимметрию A_X .

Ответ: $m_X = 2/3$; $\sigma^2(X) = 1/18$, $A_X = -2\sqrt{2}/5$.

* Плотность распределения $f(X) = C(X^2 + 2X)$ случайной величины X задана в интервале $(0; 1)$; вне этого интервала $f(X) = 0$. Найти: а) параметр C ; б) ν_1 ; в) ν_2 ; г) μ_2 .

Ответ: $C = 3/4$; $\nu_1 = 11/16$; $\nu_2 = 21/40$; $\mu_2 = 0.0523$.

* Производится 4 удара по футбольным воротам. Вероятность гола при каждом ударе равна 0.3. Считая случайной величиной X число голов, определить ее математическое ожидание, дисперсию и асимметрию.

Рекомендация. Предварительно составить ряд распределения X (табл. 3.1).

Ответ: $m_X = 1.2$, $\sigma^2(X) = 0.84$, $A_X = 0.436$.

4.9. Характеристические и производящие функции

Кроме ряда распределения для дискретных случайных величин, плотностей и функций распределения для непрерывных случайных величин, при решении вероятностных задач широко используются так называемые характеристические и производящие функции. Эти функции однозначно определяются законами распределения и во многих приложениях их использование более удобно, чем применение традиционного описания законов распределения.

4.9.1. Характеристические функции

Характеристические функции введены А. М. Ляпуновым и использованы им при доказательстве центральной предельной теоремы (см. разд. 6.5). В рамках этого подхода вводится вспомогательная функция $h(tX) = \exp(itX)$ слу-

чайной величины X , где: i — мнимая единица, t — действительная переменная с бесконечными пределами изменения.

Характеристической функцией $g_X(t)$ называется математическое ожидание вспомогательной функции $h(tX)$:

$$g_X(t) = M[h(tX)] = M[\exp(itX)]. \quad (4.42)$$

Согласно определению математического ожидания (см. разд. 4.5), для дискретных случайных величин X с возможными значениями x_k и их вероятностями p_k , характеристическая функция равна

$$g_X(t) = \sum_k \exp(it x_k) p_k. \quad (4.43)$$

Аналогично, для непрерывной случайной величины с плотностью вероятностей $f(x)$, для характеристической функции справедливо соотношение:

$$g_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(it x) f(x) dx. \quad (4.44)$$

Преобразование вида (4.44) носит название преобразования Фурье. Это преобразование широко используется при анализе случайных процессов и сигналов (см. разд. 8.4). В частности, это распределение связывает спектральную плотность и корреляционную функцию стационарного случайного процесса (см. разд. 8.4).

В данном случае преобразование (4.44) позволяет осуществить переход от плотности распределения $f(x)$ к характеристической функции $g_X(t)$. Обратный переход от характеристической функции $g_X(t)$ к плотности распределения $f(x)$ осуществляется с помощью так называемого обратного преобразования Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-it x) g(t) dt. \quad (4.45)$$

Это преобразование можно использовать для проверки правильности вычисления характеристических функций.

4.9.2. Свойства характеристических функций

Характеристическая функция линейной формы случайной величины X вида

$$Y = aX + b, \quad (4.46)$$

где a, b — неслучайные величины, определяется соотношением

$$g_Y(t) = \exp(bt) g_X(at). \quad (4.47)$$

Доказательство этого утверждения непосредственно следует из определения (4.42) характеристической функции.

Рассмотрим пример.

Пример 4.6. Случайная величина X имеет плотность распределения вида (нормированный нормальный закон распределения)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2 / 2). \quad (4.48)$$

Определить характеристическую функцию случайной величины X .

□ Решение. По формуле (4.44) находим:

$$g_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx - x^2/2} dx.$$

Для интеграла от экспоненты в последнем выражении можно воспользоваться следующей формулой:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ax^2 \pm 2Bx - C} dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{-\frac{AC - B^2}{A}}. \quad (4.49)$$

Применяя эту формулу к найденному выше выражению для $g_X(t)$ и учитывая, что $i^2 = -1$, получаем:

$$g_X(t) = \exp(-t^2 / 2). \quad (4.50)$$

На рис. 4.10 приведен фрагмент файла Mathcad с решением примера 4.6. При решении (см. рис. 4.10) использованы символьные функциональные преобразования.

$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$	$g(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i \cdot t \cdot x) \cdot f(x) dx$	<u>Характеристическая функция</u>
$g(t) \rightarrow \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot t^2\right)$	<u>Символьное вычисление интеграла</u>	
$f(x) \text{ fourier } ,x \rightarrow \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot \omega^2\right)$	<u>Преобразование Фурье</u>	
$\exp\left(\frac{-1}{2} \cdot \omega^2\right) \text{ invfourier } ,\omega \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot t^2\right)$	<u>Обратное преобразование Фурье</u>	

Рис. 4.10. Решение примера 4.6 в среде Mathcad

После введения исходной плотности вероятностей (4.48) решение получено двумя путями: с применением символьного оператора вывода (в виде горизонтальной стрелки) для интеграла (4.44) и с использованием символьного преобразования Фурье над функцией (4.48). В качестве проверки полученный результат подвергается обратному преобразованию Фурье в символьной форме, в результате чего получается выражение исходной плотности распределения. ■

4.9.3. Производящие функции моментов

Производящей функцией моментов $b_X(t)$ случайной величины X называется математическое ожидание вспомогательной функции $u(tX) = \exp(tX)$:

$$b_X(t) = M[u(tX)] = M[\exp(tX)]. \quad (4.51)$$

Для дискретных и непрерывных случайных величин X , аналогично (4.43) и (4.44), производящие функции моментов равны соответственно

$$b_X(t) = \sum_k \exp(t x_k) p_k; \quad (4.52)$$

$$b_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(t x) f(x) dx. \quad (4.53)$$

Нетрудно убедиться в том, что производящие функции имеют свойства, аналогичные свойствам (4.46), (4.47) характеристических функций. Приведем основные свойства производящих функций, следующие из их определения.

4.9.4. Свойства производящих функций моментов

1. Производящая функция моментов линейной формы

$$Y = aX + c \quad (4.54)$$

случайной величины X , где a, c — неслучайные величины, определяется соотношением

$$b_Y(t) = \exp(ct) b_X(at). \quad (4.55)$$

Еще одно, весьма важное, свойство производящих функций моментов касается возможности получения с их помощью начальных и центральных моментов распределений произвольного порядка. Применение с этой целью производящих функций во многих задачах резко упрощает получение моментов распределений. Это качество производящих функций опирается на следующие свойства.

2. Начальные моменты v_k распределения дискретной или непрерывной случайной величины X равны значениям k -ой производной от производящей функции моментов $b_X(t)$ в точке $t = 0$, т. е.:

$$v_k = \frac{d^k}{dt^k} b_X(t) \Big|_{t=0}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.56)$$

Докажем это свойство для дискретных случайных величин.

При любом x имеем $\frac{d^k}{dt^k} \exp(xt) = x^k \exp(xt)$, поэтому

$$\frac{d^k}{dt^k} b_X(t) = \sum_j (x_j)^k \exp(x_j t) p_j.$$

При $t = 0$ последнее равенство преобразуется в выражение (4.36) для начального момента k -ого порядка:

$$\sum_j (x_j)^k p_j = M(X^k) = v_k,$$

что и требовалось доказать.

Доказательство соотношения (4.56) для непрерывных случайных величин аналогично.

3. Центральные моменты μ_k распределения дискретной или непрерывной случайной величины X равны значениям k -ой производной от производящей функции моментов $b_{X0}(t)$ центрированной случайной величины $X^0 = X - m_X$ в точке $t = 0$:

$$\mu_k = \frac{d^k}{dt^k} b_{X0}(t) \Big|_{t=0}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.57)$$

Для доказательства выражения (4.57) воспользуемся свойством (4.55) производящих функций моментов. Согласно этому свойству, для центрированной случайной величины $X^0 = X - m_X$ имеем:

$$b_{X0}(t) = \exp(-m_X t) b_X(t) = M[\exp(t X^0)], \quad (4.58)$$

откуда, используя доказательство, аналогичное приведенному выше для (4.56), непосредственно следует справедливость (4.57).

Рассмотрим пример.

Пример 4.7. Случайная величина X имеет плотность распределения вида (нормальный закон распределения)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (4.59)$$

Определить производящую функцию моментов случайной величины X . Найти моменты распределения первого и второго порядков.

□ Решение. Из формулы (4.53) следует:

$$b_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[tX - \frac{(X-a)^2}{2\sigma^2}\right] dX.$$

Делаем подстановку вида $Z = (X - a)/\sigma$; $X = \sigma Z + a$; $dX = \sigma dz$. Получаем:

$$b_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[t(\sigma z + a) - z^2/2] dz.$$

Из формулы (4.49) для нашего случая получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[t(\sigma z + a) - z^2/2] dz = \sqrt{2\pi} \exp(at + \sigma^2 t^2/2), \text{ откуда следует, что про-}$$

изводящая функция моментов для плотности распределения (4.59) равна:

$$b_X(t) = \exp(at + \sigma^2 t^2/2). \quad (4.60)$$

Для получения моментов распределения воспользуемся свойством (4.57). Первые две производные от $b_X(t)$ (4.60) по t имеют вид:

$$\frac{d}{dt} b_X(t) = \exp(at + \sigma^2 t^2/2)(a + \sigma^2 t);$$

$$\frac{d^2}{dt^2} b_X(t) = \exp(at + \sigma^2 t^2/2)(t^2 \sigma^4 + 2at\sigma^2 + a^2 + \sigma^2),$$

откуда при $t = 0$ получаем первые два начальных момента:

$$v_1 = a; v_2 = a^2 + \sigma^2. \quad (4.61)$$

Из полученного результата следует, что математическое ожидание исследуемой случайной величины X равно параметру a плотности распределения (4.59). В силу свойства (4.29) из выражения для второго начального момента (4.61) непосредственно следует также, что дисперсия случайной величины X равна σ^2 . Ниже, при рассмотрении свойств нормального распределения (см. разд. 5.2), этот результат будет получен другим способом. ■

Продолжим пример, связанный с анализом свойств распределения (4.59). Свойства производящих функций моментов позволяют непосредственно получать и центральные моменты распределения. С этой целью, для случайной величины X с плотностью (4.59) используем в качестве вспомогательной случайную величину $Z = (X - a)/\sigma$, которая была применена нами при подстановке в примере 4.7. Опираясь на выражения (4.61), нетрудно убедиться в том, что Z имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию, равную единице. Этому случаю соответствует плотность распределения (4.48) и производящая функция моментов (4.60) вида:

$$b_Z(t) = \exp(t^2/2). \quad (4.62)$$

Кроме того, начальные и центральные моменты распределения Z равны между собой и определяются соотношениями

$$\mu_k^* = M[(X - a)/\sigma]^k = M[(X - a)^k]/\sigma^k = \mu_k / \sigma^k, \quad (4.63)$$

где μ_k — центральный момент распределения k -го порядка случайной величины X . Это соотношение позволяет получить центральные моменты μ_k как произведения моментов μ_k^* случайной величины Z на соответствующую степень среднего квадратического отклонения σ случайной величины X .

На основании свойства (4.57), моменты распределения μ_k^* случайной величины Z находятся последовательным дифференцированием производящей функции моментов (4.62) и наложением условия $t = 0$. Опуская несложные выкладки, приведем окончательный результат:

$$\mu_1^* = 0; \mu_2^* = 1; \mu_3^* = 0; \mu_4^* = 3; \mu_1 = 0; \mu_2 = \sigma^2; \mu_3 = 0; \mu_4 = 3\sigma^4. \quad (4.64)$$

Осуществляя необходимые преобразования, нетрудно убедиться в том, что все нечетные центральные моменты нормального распределения равны нулю, а четные — полностью определяются дисперсией случайной величины X .

Полученное значение $\mu_4^* = 3$ подтверждает приведенное выше утверждение, что эксцесс нормального распределения равен нулю.

На рис. 4.11 приведены результаты нахождения производящей функции моментов (4.62) и центрального момента четвертого порядка μ_4^* для нормированной плотности нормального распределения (4.48).

$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$	$b(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \exp(t \cdot x) \cdot f(x) \, dx$	<u>Производящая функция</u>
$b(t) \rightarrow \exp\left(\frac{1}{2} \cdot t^2\right)$	<u>Символьное вычисление интеграла</u>	
$t := 0 \quad \frac{d^4}{dt^4} b(t) = 3$	<u>Центральный момент четвертого порядка для нормированной нормальной плотности распределения</u>	

Рис. 4.11. Вычисление $b_Z(t)$ и μ_4^* для плотности вероятности (4.48)

Следует отметить, что получение начальных и центральных моментов произвольного порядка можно осуществить и на основе характеристической функции (4.42). При этом используются следующие выражения:

$$v_k = i^{-k} \frac{d^k}{dt^k} g_X(t) \Big|_{t=0}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.65)$$

$$\mu_k = i^{-k} \frac{d^k}{dt^k} g_{X_0}(t) \Big|_{t=0}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.66)$$

Доказательство (4.65), (4.66) полностью аналогично доказательству соотношений (4.56), (4.57).

Глава 5. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ИХ СВОЙСТВА

В этой главе будут рассмотрены наиболее часто встречающиеся в вероятностных приложениях законы распределения случайных величин. Выражение «наиболее часто встречающиеся», конечно, условно. Оно вынужденно предполагает наличие ограничения на множество исследуемых вероятностных задач, отсекая некоторых классов этих задач. Отнесем к последним, например, широкий круг задач оценки, проверки статистических гипотез. Эти задачи, при решении которых требуется привлечение ряда специальных законов распределений (хи-квадрат, Стьюдента, Фишера и т. д.), подробно рассматриваются во второй части. Поэтому в рамках настоящей главы проанализируем свойства лишь нескольких законов распределения таких, как равномерный, нормальный, экспоненциальный (показательный) для непрерывных случайных величин и биномиальный, пуассоновский и геометрический — для дискретных. Ряд из этих законов уже упоминался в предыдущих разделах; здесь будут выявлены их свойства, важные с практической точки зрения. В конце этой главы проведем анализ свойств распределения функций одного случайного аргумента.

5.1. Равномерное распределение

При анализе непрерывных случайных величин (н.с.в.) распространены случаи, когда попадание их значений в подынтервалы одинаковой длины равновероятно. В качестве примера рассмотрим измерение положения фиксированного радиуса OA симметричного колеса, которое приводится во вращение в вертикальной плоскости и останавливается затем вследствие трения. Значения угла α между вертикалью, проходящей через центр O колеса и радиусом OA после остановки колеса, равновероятны на интервале $[0, 2\pi]$.

Распределение непрерывной случайной величины X называют **равномерным**, если на интервале $[a, b]$, которому принадлежат значения X , плотность распределения постоянна, а вне его — равна нулю.

В силу основного свойства плотности распределения (см. (4.5)) интеграл от $f(x)$ в пределах определения X равен единице. Поэтому для равномерного распределения непрерывной случайной величины X на интервале $[a, b]$ имеем:

$$f(x) = 1/(b - a) \text{ при } X \in [a, b]; \quad f(x) = 0 \text{ при } X \notin [a, b]. \quad (5.1)$$

Определим вероятность попадания случайной величины X в интервал $[\alpha, \beta]$ внутри $[a, b]$. Согласно свойству (4.12), имеем:

$$P(\alpha \leq X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \frac{\beta - \alpha}{b - a}. \quad (5.2)$$

Функция распределения (4.6) случайной величины X со свойствами (5.1) представляет собой ломаную, удовлетворяющую соотношениям:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b; \\ 1, & x > b. \end{cases} \quad (5.3)$$

Из (5.2) следует, что вероятность попадания равномерно распределенной случайной величины в промежуток пропорциональна длине этого промежутка. Выражения (5.1)—(5.3) могут выступать в качестве вариантов определений закона равномерного распределения.

Полученные соотношения могут быть использованы для нахождения числовых характеристик равномерно распределенной случайной величины X . Математическое ожидание (4.19) и дисперсия (4.27), (4.29) для нашего случая равны соответственно:

$$M(X) = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{a+b}{2}; \quad (5.4)$$

$$D(X) = \frac{1}{b-a} \int_a^b [x - M(X)]^2 dx = \frac{(b-a)^2}{12}. \quad (5.5)$$

Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \quad (5.6)$$

Равномерное распределение относится к симметричным распределениям, поэтому центр распределения (математическое ожидание) получился равным среднеарифметическому значению границ отрезка определения X . По этой же причине асимметрия $A_X = 0$, в чем нетрудно убедиться путем вычисления третьего центрального момента по формуле (4.35). Вычисляя эксцесс по формуле (4.33), получим $E_X = \{M[(X - m_X)^4] / \sigma^4(X)\} - 3 = -1.2$.

Для часто используемого диапазона (0,1) определения возможных значений X величина $M(X) = 0.5$, $D(X) = 1/12$.

В среде Mathcad равномерному закону распределения соответствуют встроенные функции, в названии имеющие корневое слово **unif** (от uniformly — равномерный) и начинающиеся с символов d, p, q, r :

dunif(x, a, b) — выводит значения плотности распределения (5.1);

punif(x, a, b) — выводит значения функции распределения (5.3);

qunif(A, a, b) — выводит значение квантили распределения порядка A ;

runif(n, a, b) — выводит массив (вектор-столбец) из n значений равномерно распределенных независимых случайных чисел на интервале (a, b).

На рис. 5.1 приведен вид плотности $f(x)$ и функции $F(x)$ распределения равномерно распределенной на отрезке $(-5, 5)$ случайной величины, полученный с использованием Mathcad.

$$f(x) := \text{dunif}(x, -5, 5) \quad F(x) := \text{punif}(x, -5, 5)$$

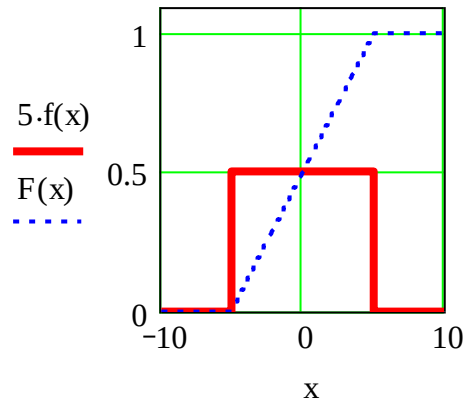


Рис 5.1. Плотность и функция равномерного распределения

В целях изображения двух функций в одних осях плотность распределения, в диапазоне $(-5, 5)$ равная 0.1, масштабирована (на график выведены значения в пять раз большие).

5.2. Нормальное распределение

Нормальным (гауссовским) называют распределение непрерывной случайной величины, характеризующееся плотностью вероятности вида

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (5.7)$$

Из этого выражения следует, что нормальное распределение определяется двумя параметрами: a и σ . Вероятностный смысл этих параметров будет раскрыт ниже. Принадлежность случайной величины X к нормальному распределению с параметрами a и σ будем обозначать $X \sim N(a, \sigma^2)$.

Получим функцию распределения нормального закона, используя определение (4.6):

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right] dt. \quad (5.8)$$

Преобразуем выражение (5.8), делая замену переменных вида:

$$z = (t-a)/\sigma; \quad t = \sigma z + a; \quad dt = \sigma dz. \quad (5.9)$$

При изменении t в диапазоне $t = (-\infty, x)$ переменная z будет изменяться в диапазоне $z = [-\infty, (x-a)/\sigma]$, следовательно

$$F(x) = \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(x-a)/\sigma} \exp(-z^2/2) dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^0 \exp(-z^2/2) dz + \int_0^{(x-a)/\sigma} \exp(-z^2/2) dz \right].$$

Первый интеграл в квадратных скобках представляет собой частный случай известного интеграла Эйлера—Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z^2/2) dz = \sqrt{2\pi} \quad (5.10)$$

и равен $0.5\sqrt{2\pi}$. Второе слагаемое в выражении $F(x)$ — функция Лапласа (3.32), которая использовалась нами в разд 3.4 при изучении интегральной теоремы Лапласа. Поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{(x-a)/\sigma} \exp(-z^2/2) dz = \Phi[(x-a)/\sigma],$$

откуда следует, что функция распределения для нормального закона может быть выражена через функцию Лапласа $\Phi[(x-a)/\sigma]$:

$$F(x) = 0.5 + \Phi[(x-a)/\sigma]. \quad (5.11)$$

Из (5.11) следует, что функцию Лапласа $\Phi(z)$ удобно находить путем вычитания 0.5 из функции $F(z)$ нормированного нормального распределения $N(0, 1)$. Нормировка значений случайной величины $X \in N(a, \sigma^2)$ осуществляется преобразованием вида $z = (x-a)/\sigma$; в результате $z \in N(0, 1)$.

Как отмечалось в разд.3.4, функция Лапласа табулирована и ее значения могут быть получены из специальных таблиц (прил. 1) или путем непосредственного вычисления интеграла в среде СКМ. Выражение (5.11) служит теоретической основой утверждения (3.33) интегральной теоремы Лапласа, которое было приведено в разд. 3.4 без доказательства.

Полученные выше соотношения позволяют использовать функцию Лапласа (3.32) и при определении вероятности попадания нормально распределенной случайной величины X в интервал. Действительно, вероятность попадания X в заданный интервал (α, β) на основании (4.11), (5.11) равна:

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \quad (5.12)$$

Это выражение, в свою очередь, служит теоретическим обоснованием формулы (3.34), которая была приведена в разд. 3.4 также без доказательства.

Определим теперь математическое ожидание и дисперсию нормально распределенной непрерывной случайной величины. На основании (4.19) имеем:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right] dx. \quad (5.13)$$

Для вычисления этого интеграла используем замену переменных, аналогичную (5.9):

$$z = (x-a)/\sigma; \quad x = \sigma z + a; \quad dx = \sigma dz. \quad (5.14)$$

Подставим (5.14) в (5.13):

$$M(X) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z \exp(-z^2/2) dz + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z^2/2) dz. \quad (5.15)$$

Первый интеграл в полученном выражении равен нулю, поскольку подынтегральная функция — нечетная, а пределы интегрирования — симметричные относительно начала координат. На рис. 5.2 представлен вид этой подынтегральной функции, обозначенной $d(z)$.

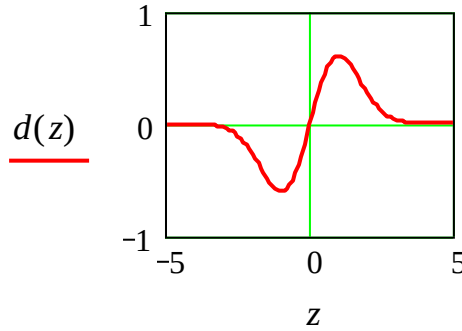


Рис. 5.2. Вид подынтегральной функции $d(z)$

Интеграл во втором слагаемом (5.15) — интеграл Эйлера—Пуассона (5.10). В результате анализа выражения (5.15) получаем, что математическое ожидание нормального распределения равно параметру a формулы (5.7):

$$M(x) = a. \quad (5.16)$$

Дисперсия нормально распределенной случайной величины, в силу определения (4.27), равна

$$D(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right] dx. \quad (5.17)$$

Осуществляя замену переменных (5.14), преобразуем (5.17) к виду:

$$D(X) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \exp(-z^2/2) dz. \quad (5.18)$$

Интегрируя (5.18) по частям при

$u = z$; $dv = z \exp(-z^2/2) dz$; $v = -\exp(-z^2/2)$; $du = dz$, получаем:

$$D(X) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \left. z \exp(-z^2/2) \right|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z^2/2) dz \right\}. \quad (5.19)$$

Первое слагаемое в выражении (5.19) равно нулю, т. к. экспонента в степени $(-z^2/2)$ при $z \rightarrow \infty$ убывает быстрее, чем возрастает любая степень z . Второе слагаемое в (5.19) содержит интеграл Эйлера—Пуассона (5.10). В результате выполненных преобразований получаем, что дисперсия нормально распределенной случайной величины определяется вторым параметром формулы (5.7):

$$D(X) = \sigma^2. \quad (5.20)$$

Таким образом, параметрами плотности нормального распределения (5.7) служат математическое ожидание (5.16) и дисперсия (5.20), т. е. первый на-

чальный и второй центральный моменты распределения. В общем случае моменты нормального распределения произвольных порядков определяются выражениями (4.37) и (4.39), где плотность вероятности удовлетворяет соотношению (5.7).

Замечательным свойством нормального распределения служит возможность выражения центральных моментов высших порядков через дисперсию, что было показано в разд. 4.9 (выражения (4.64)). Это объясняет, почему во многих приложениях (при анализе и синтезе стохастических систем, решении задач оценки и проч.) широко используются первые два момента нормального распределения.

Покажем, что для центральных моментов нормального распределения случайных величин справедливо следующее рекуррентное соотношение:

$$\mu_k = (k-1)\sigma^2 \mu_{k-2}; \quad k \geq 2, 3, 4, \dots \quad (5.21)$$

Центральный момент k -го порядка выражается формулой (4.39). После подстановки в эту формулу плотности распределения (5.7) получим:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m_x)^k f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^k \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right] dx.$$

Осуществляя подстановку вида $z=(x-a)/\sqrt{2\sigma^2}$, получим:

$$\mu_k = \frac{(\sigma\sqrt{2})^k}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^k \exp(-z^2) dz = \frac{(\sigma\sqrt{2})^k}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^{k-1} z \exp(-z^2) dz. \quad (5.22)$$

Применим к полученному выражению формулу интегрирования по частям при $u=z^{k-1}, v=-\frac{1}{2}\exp(-z^2)$:

$$\mu_k = \frac{(\sigma\sqrt{2})^k}{\sqrt{\pi}} \left\{ -\frac{1}{2} \exp(-z^2) z^{k-1} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{(k-1)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} z^{k-2} \exp(-z^2) dz \right\}.$$

Первое слагаемое внутри скобок равно нулю по тем же основаниям, которые приведены применительно к (5.19), поэтому k -ый центральный момент нормального распределения выражается следующим образом:

$$\mu_k = \frac{(k-1)(\sigma\sqrt{2})^k}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^{k-2} \exp(-z^2) dz. \quad (5.23)$$

Для выражения k -го центрального момента через $(k-2)$ -ой момент запишем μ_{k-2} с использованием формулы (5.22):

$$\mu_{k-2} = \frac{(\sigma\sqrt{2})^{k-2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^{k-2} \exp(-z^2) dz. \quad (5.24)$$

Сравнивая выражения (5.23) и (5.24), нетрудно заметить, что они отличаются лишь множителем $(k-1)\sigma^2$, что подтверждает справедливость формулы (5.21). С помощью этой формулы могут быть найдены центральные моменты нормального распределения любого порядка. Так, последовательно могут быть определены моменты четного порядка (момент нулевого порядка $\mu_0 = 0$):

$$\mu_2 = \sigma^2, \mu_4 = 3\sigma^4, \mu_6 = 15\sigma^6, \mu_8 = 105\sigma^8 \text{ и т.д.}$$

Из (5.21) также следует, что центральные моменты нечетных порядков равны нулю, т. е. $\mu_1 = \mu_3 = \mu_5 = \dots = 0$.

В среде Mathcad нормальному закону распределения соответствуют встроенные функции, в названии имеющие корневое слово **norm** и начинающиеся с символов d, p, q, r :

dnorm (x, a, σ) — выводит значения плотности распределения $f(x)$ (5.7);

pnorm (x, a, σ) — выводит значения функции распределения $F(x)$ (5.8);

qnorm (A, a, σ) — выводит значение квантили порядка A ;

rnorm (n, a, σ) — выводит массив (вектор-столбец) из n значений нормально распределенных независимых случайных чисел с математическим ожиданием a и стандартом отклонения σ .

Формы кривых плотности и функции нормального распределения приведены на рис. 5.3, а.

$$f1(x) := \text{dnorm } x, 2, 1$$

$$F(x) := \text{pnorm } x, 2, 1$$

$$f2(x) := \text{dnorm } x, 2, 0.5$$

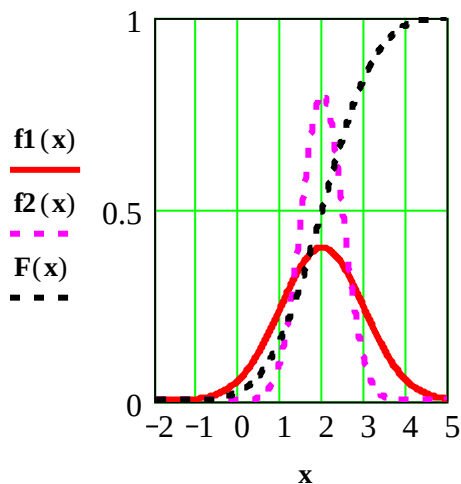


Рис. 5.3, а. Вид плотностей и функции нормального распределения

Плотность распределения $f1(x)$ и функция распределения $F(x)$ построены для $a = 2, \sigma = 1$. Плотность распределения $f2(x)$ имеет параметры $a = 2, \sigma = 0.5$. Сопоставляя кривые $f1(x)$ и $f2(x)$, можно заметить, что значение σ влияет на форму плотности нормального распределения следующим образом: при увеличении σ кривая $f(x)$ (5.7) становится более пологой, а ее максимальное значение, равное $1/\sigma\sqrt{2\pi}$, снижается. При уменьшении σ кривая $f(x)$ более компактно располагается вокруг центра распределения и приобретает более вытянутую острую вершину. Изменение значения математического ожидания a не влияет на форму кривой $f(x)$, поскольку при таком изменении меняется лишь положение оси симметрии $f(x)$.

Нормальное распределение относится к симметричным распределениям с центром распределения (математическим ожиданием), равным a . По этой при-

чине, а также вследствие равенства нулю центрального момента третьего порядка, асимметрия (4.32) нормального распределения $A_X = 0$. Вычисляя эксцесс по формуле (4.33), получим $E_X = \{\mu_4/\sigma^4(X)\} - 3 = 0$, поскольку, как отмечалось выше (см. разд. 4.9), четвертый центральный момент нормального распределения равен $3\sigma^4$.

Ниже (рис. 5.3, б) приведен пример вычисления функции распределения с использованием встроенных функций, реализующих формулы (5.8) и (5.11)

$$\begin{array}{ll} a := 1.5 & \sigma := 2 & x := 5 & z := \frac{x - a}{\sigma} \\ F(x) := \text{pnorm}(x, a, \sigma) & F0(z) := \text{pnorm}(z, 0, 1) \\ F(x) = 0.96 & F0(z) = 0.96 \\ \Phi(z) := F0(z) - 0.5 & \Phi(z) = 0.46 \end{array}$$

Рис. 5.3, б. Пример вычисления функции нормального распределения

В этом примере для $x = 5$ вычисляется функция распределения $F(x)$ нормального закона с параметрами $a = 1.5$ и $\sigma = 2$. Значение $F(5) = 0.96$ может быть найдено несколькими путями:

- $F(x)$ — по формуле (5.8) — как интеграл в диапазоне $(0, 5)$ от плотности вероятности (5.7) нормального распределения $x \sim N(a, \sigma^2)$. Эти операции осуществляет функция **pnorm**(x, a, σ);
- $F0(x)$ — по формуле (5.8) — как интеграл в диапазоне $(0, z)$ от плотности вероятности (5.7) нормированного нормального распределения $N(0, 1)$; вычисление осуществляет функция **pnorm**($z, 0, 1$), где $z \sim N(0, 1)$;
- с применением формулы (5.11), в которой функция Лапласа $\Phi(z) = 0.46$.

Завершая описание характерных свойств нормального распределения, остановимся на так называемом «правиле трех сигм». Для пояснения сущности этого правила рассмотрим пример на определение вероятности заданного отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

Пример 5.1. Определить вероятность того, что нормально распределенная случайная величина отклоняется от своего математического ожидания m не более чем на λ .

□ Решение. Неравенство $|X - a| \leq \lambda$ равносильно $-\lambda \leq X - a \leq \lambda$ или $a - \lambda \leq X \leq a + \lambda$. По формуле (5.12) вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в интервал $\pm\lambda$ относительно математического ожидания равна:

$$\begin{aligned} P(a - \lambda \leq X \leq a + \lambda) &= \Phi\left(\frac{a + \lambda - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \lambda - a}{\sigma}\right) = 2\Phi(\lambda/\sigma); \\ P(|X - a| \leq \lambda) &= 2\Phi(\lambda/\sigma). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Определим заданное отклонение в форме целого числа среднеквадратических отклонений $\lambda = s\sigma$. Тогда вероятность (5.25) равна:

$$P(|X - a| \leq s\sigma) = 2\Phi(s).$$

Полагая $s = 1, 2, 3, 4$, найдем вероятности отклонения нормально распределенной случайной величины от своего математического ожидания на $\sigma, 2\sigma, 3\sigma, 4\sigma$. Файл Mathcad с вычислениями приведен на рис. 5.3, в.

$F0(z) := \text{pnorm}(z, 0, 1)$	$\Phi(z) := F0(z) - 0.5$
$2 \cdot \Phi(1) = 0.6827$	$2 \cdot \Phi(2) = 0.9545$
$2 \cdot \Phi(3) = 0.9973$	$2 \cdot \Phi(4) = 0.99994$

Рис. 5.3, в. Вычисления вероятностей отклонений

Искомые вероятности отклонений нормально распределенной случайной величины X на $s\sigma$ от своего математического ожидания равны: $2\Phi(1) = 0.6827$; $2\Phi(2) = 0.9545$; $2\Phi(3) = 0.9973$; $2\Phi(4) = 0.99994$.

Из результатов решения примера 5.1, в частности, следует: вероятность того, что случайная величина X находится в диапазоне $\pm 3\sigma$ относительно своего математического ожидания $P(|X - a| \leq 3\sigma) = 0.9973$. Это означает, что практически все (в $\sim 99,7\%$ испытаний) значения нормально распределенной н.с.в. попадают в интервал $(m - 3\sigma, m + 3\sigma)$. Вероятность выхода значений такой случайной величины за пределы этого интервала $P(|X - a| > 3\sigma) = 0.0027$, которая настолько мала, что события $\{|X - a| > 3\sigma\}$ можно считать практически невозможными.

Вероятности $P(|X - a| \leq 3\sigma) = 0.9973$ при $a = 2, \sigma = 1$ соответствует площадь под кривой $f_1(x)$ (см. рис 5.3, а) в диапазоне от -1 до 5 . ■

5.3. Показательное распределение

Во многих теоретических и практических вероятностных задачах, связанных, например, с анализом надежности технических систем, исследовании случайных промежутков времени между редкими событиями и др., используется показательный (экспоненциальный) закон распределения.

Показательный закон распределения непрерывной случайной величины описывается плотностью вида

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (5.26)$$

Здесь $\lambda > 0$ — постоянный коэффициент, определяющий как начальное значение плотности вероятности $f(0) = \lambda$, так и темп изменения $f(x)$ в зоне определения аргумента.

В соответствии с определением (4.6) найдем функцию распределения показательного закона:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (5.27)$$

Функция распределения (5.27) имеет характер восходящей экспоненты, которая стремится к 1 при $x \rightarrow \infty$ и имеет нулевое начальное значение.

Вероятность попадания экспоненциально распределенной случайной величины X в заданный интервал (α, β) на основании (4.11), (5.27) равна:

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = e^{-\alpha\lambda} - e^{-\beta\lambda}. \quad (5.28)$$

Определим теперь числовые характеристики показательного распределения. На основании (4.19) математическое ожидание непрерывной случайной величины с плотностью (5.26) равно:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \lambda \int_0^{\infty} xe^{-\lambda x} dx. \quad (5.29)$$

Применяя к (5.29) интегрирование по частям при $u = \lambda$, $dv = e^{-\lambda x} dx$, получим:

$$m_x = M(X) = \lambda \left\{ -\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx \right\} = \frac{1}{\lambda}. \quad (5.30)$$

Для получения дисперсии воспользуемся выражением (4.29):

$$D(X) = M(X^2) - m_x^2 = \lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2}.$$

Интегрирование по частям позволяет преобразовать это выражение к виду:

$$D(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (5.31)$$

Таким образом, математическое ожидание и дисперсия экспоненциально распределенной случайной величины определяются обратной величиной и квадратом обратной величины параметра λ . При этом значения m_x и среднеквадратического отклонения $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 1/\lambda$ совпадают.

Легко убедиться в том, что и моменты высших порядков также являются функциями от $1/\lambda$. Выполненные преобразования позволяют записать выражения для следующих интегралов:

$$\int_0^{\infty} xe^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2}; \quad \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^3}; \quad \int_0^{\infty} x^3 e^{-\lambda x} dx = \frac{6}{\lambda^4}; \quad \int_0^{\infty} x^4 e^{-\lambda x} dx = \frac{24}{\lambda^5},$$

которые могут быть использованы для нахождения значений первых четырех начальных моментов показательного распределения. Согласно (4.37) эти значения равны:

$$v_1 = 1/\lambda; \quad v_2 = 2/\lambda^2; \quad v_3 = 6/\lambda^3; \quad v_4 = 24/\lambda^4. \quad (5.32)$$

Из (5.32) следует, что k -ый начальный момент показательного распределения есть отношение факториала k и k -ой степени λ .

Центральные моменты показательного распределения могут быть получены с помощью выражений (4.41), связывающих центральные и начальные моменты. Применяя (5.32) к (4.41), получим

$$\left. \begin{aligned} \mu_2 &= v_2 - v_1^2 = 1/\lambda^2; \\ \mu_3 &= v_3 - 3v_1v_2 + 2v_1^3 = 2/\lambda^3; \\ \mu_4 &= v_4 - 4v_1v_3 + 6v_1^2v_2 - 3v_1^4 = 9/\lambda^4. \end{aligned} \right\} \quad (5.33)$$

Значения центральных моментов (5.33) позволяют найти коэффициенты асимметрии (4.32) и эксцесса (4.33):

$$A_X = \mu_3/\sigma^3(X) = 2; \quad E_X = \{\mu_4/\sigma^4(X)\} - 3 = 6. \quad (5.34)$$

В среде Mathcad показательному закону распределения соответствуют встроенные функции, в названии имеющие корневое слово **exp** и начинающиеся с символов *d*, *p*, *q*, *r*:

dexp (*x*, λ) — выводит значения плотности распределения $f(x)$ (5.26);

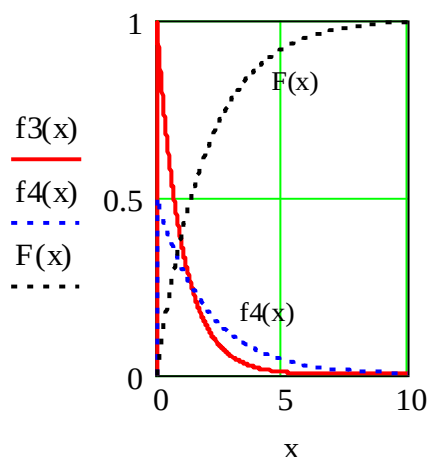
pexp (*x*, λ) — выводит значения функции распределения $F(x)$ (5.27);

qexp (*A*, λ) — выводит значение квантили порядка *A*;

rexp (*n*, λ) — выводит массив (вектор-столбец) из *n* значений экспоненциально распределенных независимых случайных чисел с параметром λ .

На рис. 5.4 приведены плотности и функции показательного распределения для $\lambda = 1$ (плотность $f3(x)$) и $\lambda = 0.5$ ($f4(x)$ и функция распределения $F(x)$).

$$f3(x) := \text{dexp}(x, 1) \quad F(x) := \text{pexp}(x, 0.5) \quad f4(x) := \text{dexp}(x, 0.5)$$



$$\lambda := 0.5$$

$$\text{dexp}\left(\frac{5}{\lambda}, 0.5\right) = 3.369 \times 10^{-3}$$

$$\text{pexp}\left(\frac{5}{\lambda}, 0.5\right) = 0.993$$

Рис. 5.4. Вид плотностей и функции показательного распределения

Плотность (5.26) имеет характер ниспадающей кривой (экспоненты), асимптотически приближающейся к оси *x*. Начальное значение $f(x)$ равно λ (см. рис. 5.4). В практических приложениях можно считать, что $\exp(-\lambda x)$ «достигает» установившегося значения (нуля) при $x \approx 5/\lambda$.

Функция $F(x)$ показательного распределения практически достигает установившегося значения (единицы) также при $x \approx 5/\lambda$; $F(5/\lambda) = 0.993$.

5.4. Биномиальное распределение

Биномиальный закон распределения дискретных случайных величин относится к схемам испытаний Бернулли, в которых каждое испытание имеет два независимых исхода (см. разд. 3.1). В качестве дискретной случайной величины при этом выступает число k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) появлений событий A в серии n испытаний. Вероятность появления k раз события A в n испытаниях определяется формулой Бернулли (3.3):

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad (5.35)$$

где p и q — вероятности появления события A и не появления этого события соответственно.

Таким образом, биномиальный закон распределения задается совокупностью значений дискретной случайной величины X и вероятностями этих значений, приведенной в табл. 5.1.

Таблица 5.1

X	0	1	2	...	k	...	n
$P_n(x)$	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	$C_n^n p^n q^0$

Название «биномиальный закон распределения» объясняется связью основных соотношений, касающихся числа реализаций и сумм вероятностей $P_n(k)$ (5.35) при $k = 0 \dots n$ с биномом Ньютона (см. (3.4)—(3.7)). В сумме эти вероятности равны единице. Другие свойства вероятностей $P_n(k)$ достаточно подробно рассмотрены в разд. 3.3. Определим основные числовые характеристики биномиального распределения.

Математическое ожидание числа k появлений событий в схеме Бернулли в соответствии с (4.16) может быть выражено следующим соотношением:

$$M(X) = \sum_{k=0}^n k C_n^k p^k q^{n-k}. \quad (5.36)$$

Выразим математическое ожидание (5.36) в явном виде через исходные вероятности появления события и число испытаний. Для этого рассмотрим формулу Ньютона для двух аргументов a и b :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Для приведения формулы Ньютона к виду (5.36) продифференцируем ее по a :

$$n(a + b)^{n-1} = \sum_{k=0}^n k C_n^k a^{k-1} b^{n-k}.$$

Домножим левую и правую части полученного равенства на a :

$$an(a+b)^{n-1} = \sum_{k=0}^n k C_n^k a^k b^{n-k}. \quad (5.37)$$

Сопоставляя последнее соотношение с (5.36), заметим, что $a = p$ и $b = q$, причем $(a + b) = 1$. Учитывая это, получаем, что математическое ожидание (5.36) биномиального распределения равно произведению числа испытаний n на вероятность p появления события A в каждом из них:

$$M(X) = M(k) = np. \quad (5.38)$$

Для нахождения дисперсии биномиального распределения воспользуемся формулой (4.29), связывающей два первых начальных момента распределения

$$D(X) = M(X^2) - M(X)^2 = \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k p^k q^{n-k} - (np)^2. \quad (5.39)$$

Выразим дисперсию (5.39) через исходные параметры распределения, воспользовавшись приемом, который был использован при получении (5.38).

Дифференцируя (5.37) по a и умножая на a полученное соотношение, имеем:

$$a^2 n(n-1)(a+b)^{n-2} + an(a+b)^{n-1} = \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k a^k b^{n-k}. \quad (5.40)$$

Подставляя (5.40) в (5.39) и учитывая $a = p$ и $b = q$, $(a + b) = 1$, после несложных преобразований получим:

$$D(X) = p^2 n(n-1) + pn - (np)^2 = np(1-p) = npq.$$

Таким образом, дисперсия биномиального распределения численно равна результату произведения числа испытаний и вероятностей появления и не появления события в каждом испытании:

$$D(X) = D(k) = npq. \quad (5.41)$$

Анализ биномиального распределения удобно проводить в среде Mathcad с использованием специальных встроенных функций. В *разд. 3.1* уже использовались некоторые из них. Перечислим эти функции, относящиеся к биномиальному закону распределения:

dbinom (k, n, p) — выводит значения вероятностей (5.35);

pbinom (k, n, p) — выводит значения кумулятивных вероятностей (3.8);

qbinom (A, n, p) — выводит значение квантили порядка A ;

rbinom (m, n, p) — выводит массив (вектор-столбец) из m значений независимых случайных чисел, распределенных по биномиальному закону с параметрами n и p .

На рис. 5.5 приведены кривые вероятностей (5.35) и соответствующих кумулятивных вероятностей (3.8), полученные в среде Mathcad для двух совокупностей параметров биномиального распределения ($n = 15$, $p = 0.2$; $n = 100$, $p = 0.2$), для которых значения математических ожиданий равны 3 и 20 соответственно. На рис. 5.5 использованы те же обозначения, которые применялись в примере, рассмотренном в *разд. 3.1* (см. рис. 3.2). Вероятности (5.35) на

рис. 5.5 увеличены вдвое с целью обеспечения возможности представления всех результатов на одном графике.

```

D(x,n) := dbinom(x,n,0.2)      P(x,n) := pbinom(x,n,0.2)
k := 0..50                     yk := D(k,15)    y1k := D(k,100)
f(k) := dnorm(k,20,4)          zk := P(k,15)    z1k := P(k,100)

```

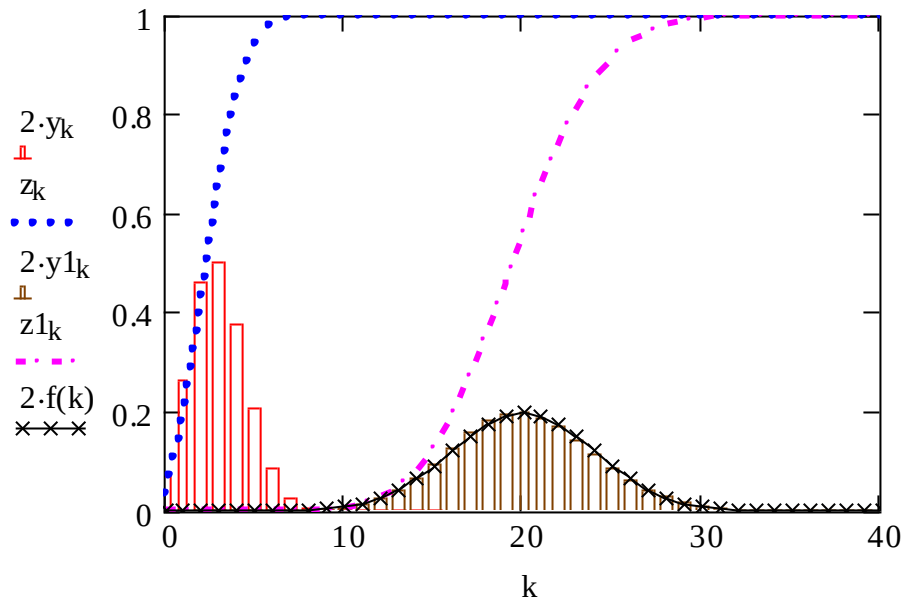


Рис. 5.5. Характеристики биномиального закона распределения

Анализируя результаты, представленные на рис. 3.2 и 5.5, можно заметить, что с ростом числа испытаний n биномиальное распределение по форме приближается к нормальному распределению. Для иллюстрации этого факта на графике (см. рис. 5.5) приведена плотность нормального распределения $f(k)$ с параметрами, равными числовым характеристикам второго варианта биномиального распределения (математическое ожидание равно 20, дисперсия равна 16). Эта плотность распределения (отмечена «крестиками» на рис. 5.5) практически не отличается от кривой, соответствующей вероятностям (5.35) для значений $n = 100$, $p = 0.2$. Отмеченная близость биномиального распределения при больших значениях n к соответствующему нормальному закону распределения служит косвенным основанием применения асимптотических выражений (3.30)—(3.34), следующих из локальной теоремы Муавра—Лапласа и интегральной теоремы Лапласа (см. разд. 3.4).

5.5. Распределение Пуассона

Распределение Пуассона упоминалось нами в разд. 3.4 при анализе асимптотического поведения закона распределения Бернулли. Было показано (см. разд. 3.4), что при неограниченном возрастании числа испытаний n и уменьшении вероятности p появления событий в каждом испытании так, что произ-

ведение $np = \lambda$ остается постоянной величиной, вероятность появления ровно $k = 0, 1, 2, \dots$ событий может вычисляться по формуле Пуассона:

$$\pi_{\lambda}(k) = (\lambda^k e^{-\lambda}) / k!. \quad (5.42)$$

Дискретные случайные величины (возможные значения k) относятся к бесконечной последовательности целых чисел, вероятности которых равны $\pi_{\lambda}(k)$, что в совокупности образует распределение Пуассона. Аналогично (3.8) могут вычисляться и кумулятивные вероятности распределения Пуассона, т. е. вероятности того, что в испытаниях с параметрами $np = \lambda = \text{const}$ событие произойдет не более k раз:

$$\mathcal{P}_{\lambda}(k) = \sum_{i=0}^k \pi_{\lambda}(i). \quad (5.43)$$

Таким образом, закон распределения Пуассона задается совокупностью значений дискретной случайной величины X и вероятностями этих значений, приведенной в табл. 5.2.

Таблица 5.2

X	0	1	2	...	k	...
$\pi_{\lambda}(x)$	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\lambda^2 e^{-\lambda} / 2$	...	$(\lambda^k e^{-\lambda}) / k!$	...

В силу исходных предположений, при увеличении числа испытаний и уменьшающейся вероятности появления событий в каждом из них, о распределении Пуассона говорят как о распределении «редких событий».

Найдем математическое ожидание и дисперсию распределения Пуассона.

Математическое ожидание, в соответствии с (4.16) и (5.42), может быть выражено следующим соотношением:

$$M(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \quad (5.44)$$

Вынесем в (5.44) за знак суммы произведение $\lambda e^{-\lambda}$ и, обозначая $k - 1 = a$, получим:

$$M(X) = \lambda e^{-\lambda} \sum_{a=0}^{\infty} \frac{\lambda^a}{a!} \cong \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda. \quad (5.45)$$

Определим дисперсию распределения Пуассона с использованием выражения (4.29) и обозначения $k - 1 = a$:

$$D(X) = M(X^2) - M(X)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} - \lambda^2 = \lambda e^{-\lambda} \sum_{a=0}^{\infty} k \frac{\lambda^a}{a!} - \lambda^2. \quad (5.46)$$

Преобразуем первое слагаемое, представляя k в виде суммы $k = [(k - 1) + 1]$ и вводя обозначение $k - 2 = b$:

$$\lambda e^{-\lambda} \sum_{a=0}^{\infty} k \frac{\lambda^a}{a!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{b=0}^{\infty} k \frac{\lambda^b}{b!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{a=0}^{\infty} \frac{\lambda^a}{a!} \cong \lambda^2 + \lambda.$$

Подставляя полученное выражение в (5.46), окончательно получаем

$$D(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda. \quad (5.47)$$

Таким образом, математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона, равны между собой. Этот факт часто используется на практике в качестве одного из критериев при проверке гипотезы о том, что исследуемая случайная величина распределена по закону Пуассона. С этой целью определяют численные значения математического ожидания и дисперсии случайной величины. Если эти значения близки между собой, то имеются основания полагать, что выдвинутая гипотеза истинна. При резком различии полученных значений гипотеза может быть отвергнута.

В среде Mathcad закону распределения Пуассона соответствуют встроенные функции, в названии имеющие корневое слово **pois**:

dpois (x, λ) — выводит значения вероятностей (5.42);

ppois (x, λ) — выводит значения вероятностей (5.43);

qpois (A, λ) — выводит значение квантили порядка A ;

rpois (n, λ) — выводит массив (вектор-столбец) из n значений независимых случайных чисел, распределенных по закону Пуассона с параметром λ .

На рис. 5.6 приведены значения вероятностей (5.42) и (5.43) распределения Пуассона для $\lambda = 10$ (левая часть графика на рис. 5.6) и $\lambda = 25$ (правая часть), полученные в среде Mathcad с использованием двух первых встроенных функций из приведенного выше списка. Значения вероятностей (5.42) увеличены вдвое в целях наглядности.

При увеличении значения вероятности p успеха математическое ожидание $\lambda = np$ увеличивается, центр распределения Пуассона (см. рис. 5.6) смещается вправо. Это сопровождается увеличением дисперсии и соответствующим «растеканием» зависимости вероятностей (5.42) от числа успехов x . Заметна близость форм полученных кривых к соответствующим кривым нормального распределения.

Сплошными кривыми представлены вероятности, полученные по формуле Бернулли (5.35). Из полученных результатов следует, что отличие закона Пуассона, который служит асимптотическим приближением для (5.35), от биномиального закона растет с увеличением значений вероятности успеха p .

С распределением Пуассона связано понятие так называемого простейшего потока, которое широко используется при вероятностном анализе систем массового обслуживания, изучении законов распределений вызовов абонентов на телефонных станциях, обращений к справочным службам, поступления заявок на железнодорожные билеты и проч.

Под потоком событий в теории вероятностей понимается последовательность событий, распределенных во времени, поступающих последовательно в случайные моменты времени. Кроме приведенных примеров, потоки событий могут быть образованы последовательным подключением потребителей к энергосети, последовательностью отказов элементов радиосхем, последовательностью поступления заявок на обслуживание в ЭВМ и т. д. Понятие потока событий близко к понятию случайной последовательности — дискретному

аналогу случайного процесса (см. разд. 8). Пример анализа состояний технической системы на основе понятия простейшего потока приведен в прил. 2.

$x := 0..50$ $n := 50$

$d(x, n) := \text{dpois}(x, n \cdot 0.2)$ $p(x, n) := \text{ppois}(x, n \cdot 0.2)$
 $d1(x, n) := \text{dpois}(x, n \cdot 0.5)$ $p1(x, n) := \text{ppois}(x, n \cdot 0.5)$
 $b(x, n) := \text{dbinom}(x, n, 0.2)$ $b1(x, n) := \text{dbinom}(x, n, 0.5)$

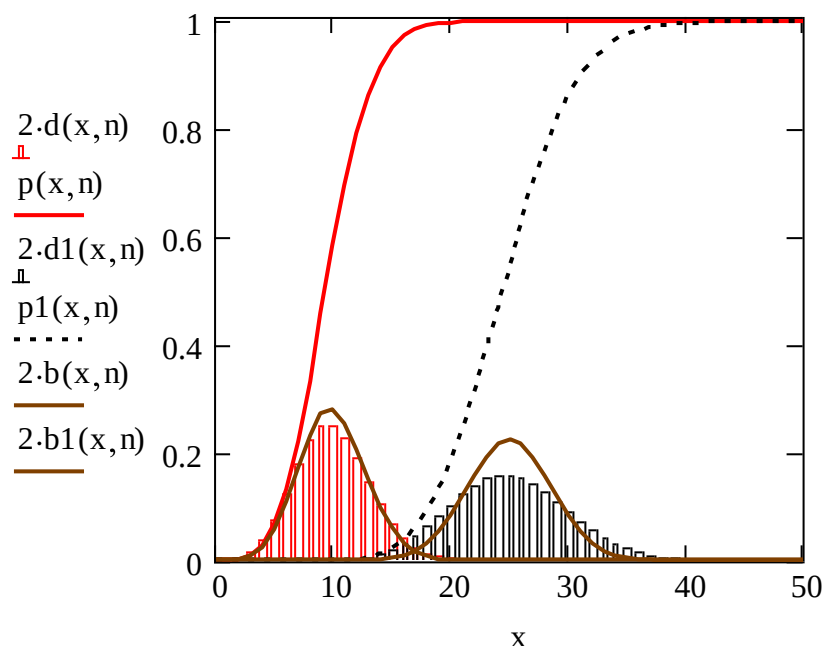


Рис. 5.6. Характеристики распределения Пуассона

Потоки событий обладают рядом свойств, среди которых выделим здесь свойства однородности, отсутствия последствия и ординарности.

Сущность **однородности потока** событий заключается в том, что вероятность появления k событий в течение произвольного промежутка времени Δt зависит только от k и Δt и не зависит от момента начала отсчета этого промежутка времени. Другими словами, указанная вероятность $P_{\Delta t}(k)$ не зависит от места расположения промежутка Δt на оси времени.

Отсутствие последствия означает, что вероятность $P_{\Delta t}(k)$ появления k событий в течение произвольного промежутка времени Δt не зависит от того, появлялись или нет события в моменты времени, предшествующие началу рассматриваемого промежутка времени. Это означает, что числа появлений событий на непересекающихся промежутках времени представляют независимые события.

Ординарность потока заключается в том, что вероятность появления двух и более событий на малом промежутке времени Δt пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления только одного события. Иными словами,

совместное появление двух или более событий — практически невозможное событие.

Поток событий, который обладает свойствами однородности, отсутствия последействия и ординарности, называют **простейшим** (пуассоновским).

Вероятностные свойства простейшего потока хорошо представляет формула Пуассона (5.42) вида:

$$P_{\Delta t}(k) = (\lambda \Delta t)^k e^{-\lambda \Delta t} / k!,$$

которая, в данном случае, представляет вероятность появления k событий на промежутке времени Δt . В этой формуле λ отражает среднее число появления событий в единицу времени; $\lambda \Delta t$ — среднее число событий на промежутке Δt .

Приведенная формула адекватно передает все свойства простейшего потока. Действительно, значения $P_{\Delta t}(k)$ не зависят от момента начала отсчета промежутка времени Δt и места его расположения на оси времени. Формула не использует данные о предыстории потока, о предшествующих событиях.

Для подтверждения ординарности потока с вероятностью $P_{\Delta t}(k)$ сопоставим вероятности появления одного и нескольких событий. Вероятность появления одного события равна:

$$P_{\Delta t}(1) = \lambda \Delta t e^{-\lambda \Delta t}.$$

Вероятность появления более одного события (см. разд. 3.1) определится как

$$P_{\Delta t}(k > 1) = 1 - [P_{\Delta t}(0) + P_{\Delta t}(1)] = 1 - (e^{-\lambda \Delta t} + \lambda \Delta t e^{-\lambda \Delta t}).$$

Заменяя экспоненты разложением в ряд с точностью до членов второго порядка

$$e^{-\lambda \Delta t} = 1 - \lambda \Delta t + \frac{(\lambda \Delta t)^2}{2} + \dots$$

и вычисляя $P_{\Delta t}(k > 1)$, после несложных преобразований получим:

$$P_{\Delta t}(k > 1) = \frac{(\lambda \Delta t)^2}{2} - \frac{(\lambda \Delta t)^3}{2} + \dots$$

Сопоставление выражений для $P_{\Delta t}(k > 1)$ и $P_{\Delta t}(1)$ показывает, что при малых Δt вероятность $P_{\Delta t}(k > 1)$ определяется величинами второго и более порядков малости, т. е. пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления на промежутке Δt одного события.

Таким образом, формулу Пуассона можно считать математической моделью вероятностных свойств простейшего потока.

5.6. Геометрическое распределение

Рассмотрим одну из типовых вероятностных задач. Пусть серия из независимых испытаний проводится до первого появления события A (первого успеха, например). Предполагая вероятность появления события A в каждом испы-

тании равной p , необходимо построить распределение числа опытов в рассматриваемой схеме испытаний.

Согласно условию задачи, в качестве случайной величины X выступает число произведенных опытов. Возможные значения дискретной случайной величины X составляют множество: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, \dots, x_k = k, \dots$, где x_k — k произведенных опытов. Запишем вероятности возможных значений X , вводя обозначение $q = 1 - p$:

$p_1 = p$ — вероятность появления события A в первом опыте;

$p_2 = qp$ — вероятность появления события A во втором опыте;

$p_k = q^{k-1}p$ — вероятность появления события A в k -ом опыте.

Из приведенных вероятностей следует, что ряд распределения случайной величины X в данном случае подчиняется формуле геометрической прогрессии с первым членом p и знаменателем q ($0 < q < 1$). Поэтому распределение

$$p_k = q^{k-1}p = (1-p)^{k-1}p \quad (5.48)$$

носит название **геометрического распределения**.

Легко убедиться в том, что ряд распределения вида $p, qp, q^2p, q^3p, \dots, q^{k-1}p, \dots$ сходится и сумма его равна единице. Действительно, сумма этого ряда как сумма убывающей геометрической прогрессии равна $p/(1-q) = 1$.

На рис. 5.7 приведены ряды геометрического распределения (5.48), обозначенные $f(k, p)$ и соответствующие им кумулятивные вероятности $P(k, p)$ для двух значений вероятностей появления события в одиночном испытании $p = 0.25$ и $p = 0.5$.

$$f(k, p) := \text{dgeom}(k, p) \quad P(k, p) := \text{pgeom}(k, p) \quad k := 1..20$$

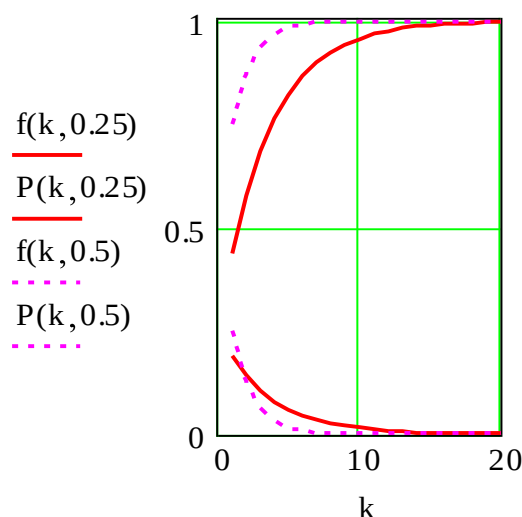


Рис. 5.7. Характеристики геометрического распределения

Из графиков (Mathcad) видно, что вероятности (5.48) при росте k имеют убывающий характер. При этом скорость убывания вероятностей успеха растет с увеличением значения p . Характер нарастания кумулятивных вероятностей геометрического распределения при росте k также определяется величиной p .

Определим математическое ожидание и дисперсию случайной величины, имеющей геометрическое распределение.

Математическое ожидание случайной величины X , возможные значения которой представляют собой натуральный ряд, а вероятности этих значений определяются выражением (5.48), в соответствии с (4.16), может быть выражено следующим соотношением:

$$M(X) = 1p + 2qp + 3q^2p + \dots + k q^{k-1}p + \dots = \\ = p(1 + 2q + 3q^2 + \dots + k q^{k-1} + \dots).$$

Бесконечный степенной ряд, заключенный в скобки, имеет сумму

$$(1 + 2q + 3q^2 + \dots + k q^{k-1} + \dots) = 1/(1 - q)^2, \quad (5.49)$$

поэтому математическое ожидание геометрического распределения равно

$$M(X) = 1/p. \quad (5.50)$$

Для определения дисперсии случайной величины X со свойствами (5.48), (5.50) воспользуемся выражением (4.29):

$$D(X) = M(X^2) - M(X)^2 = p(1^2 + 2^2q + 3^2q^2 + \dots + k^2 q^{k-1} + \dots) - 1/p^2. \quad (5.51)$$

Определим сумму ряда, заключенного в скобки выражения (5.51), путем преобразования ряда (5.49). Домножим обе части равенства (5.49) на q :

$$q + 2q^2 + 3q^3 + \dots + k q^k + \dots = q/(1 - q)^2.$$

Продифференцируем полученное выражение по q :

$$1 + 2^2q + 3^2q^2 + \dots + k^2 q^{k-1} + \dots = \frac{d}{dq} \frac{q}{(1 - q)^2} = \frac{1+q}{(1 - q)^3}.$$

Подставляя это выражение в скобки соотношения (5.51) для дисперсии и учитывая, что $p = 1 - q$, после несложных преобразований получим:

$$D(X) = \frac{1+q}{(1 - q)^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}. \quad (5.52)$$

5.7. Распределение функции одного случайного аргумента

Функции случайных аргументов упоминались нами в *главе 4* при анализе числовых характеристик распределений случайных величин. Там было отмечено, что выражения для моментов распределения случайной величины в общем случае справедливы и для произвольных функций этой величины. Рассмотренные ранее соотношения для математического ожидания (4.18), (4.20), дисперсии (4.26), (4.27) и других числовых характеристик функций случайного аргумента $Y = \varphi(X)$ не требовали знания законов распределения Y и позволяли определять теоретические моменты распределения достаточно простым путем.

В ряде вероятностных задач, некоторые из которых рассматриваются в настоящей главе, требуется знание законов распределения Y , т. е. знание того, как трансформируется закон распределения случайной величины X при ее функциональном преобразовании в случайную величину $Y = \varphi(X)$. Определение закона распределения Y позволяет использовать альтернативные выраже-

ния для моментов распределения случайной величины Y , которые могут быть записаны через возможные значения этой величины, вероятности этих значений или плотности распределения Y аналогично (4.34), (4.35).

При анализе задачи влияния функционального преобразования случайных величин на закон распределения результата этого преобразования возникает ряд частных случаев. Эти случаи учитывают, что функция $\varphi(X)$ может быть монотонной (возрастающей или убывающей) или немонотонной, а случайная величина X может быть дискретной или непрерывной. Анализ начнем с наиболее простого случая дискретного аргумента.

5.7.1. Аргумент X — дискретная случайная величина

Для дискретного случайного аргумента имеют место следующие простые правила, определяющие законы распределения функции $Y = \varphi(X)$.

Пусть случайная величина — дискретная, а функция $\varphi(X)$ — монотонная, т. е. каждому возможному значению $Y = \varphi(X)$ соответствует одно возможное значение функции $Y = \varphi(X)$. Тогда, в случае, если различным значениям x_i соответствуют различные значения y_i , вероятности $P(X = x_i)$ и $P(Y = y_i)$ равны между собой. Это утверждение не требует доказательства, поскольку использует очевидную связь между событиями $\{X = x_i\}$ и $\{Y = \varphi(x_i)\}$.

Пример 5.2. Найти распределение функции $Y = X^2$ и ее математическое ожидание, если случайная величина X задана распределением

x_i	1	2	3
$p(x_i)$	0.2	0.4	0.4

□ Решение. Различным значениям X соответствуют различные значения Y , поэтому распределение Y имеет вид:

y_i	1	4	9
$p(y_i)$	0.2	0.4	0.4

Математическое ожидание заданной функции может быть определено с использованием данных этих двух распределений. По формуле (4.18) имеем:

$$M[\varphi(X)] = \sum_i (x_i)^2 p(x_i) = 1 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.4 + 9 \cdot 0.4 = 5.4.$$

По формуле (4.16) для распределения Y имеем:

$$M[Y] = \sum_i y_i p(y_i) = 1 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.4 + 9 \cdot 0.4 = 5.4. \blacksquare$$

Если различным значениям X соответствуют значения Y , среди которых есть равные между собой, то вероятности этих равных значений Y складываются как вероятности несовместных событий.

Пример 5.3. Найти распределение функции $Y = X^2$ и ее математическое ожидание, если случайная величина X задана распределением

x_i	-1	1	2	3
$p(x_i)$	0.1	0.2	0.4	0.3

□ Решение. В этом случае распределение Y примет вид:

y_i	1	4	9
$p(y_i)$	0.3	0.4	0.3

По формуле (4.18) имеем:

$$M[\varphi(X)] = \sum_i (x_i)^2 p(x_i) = 1 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.4 + 9 \cdot 0.3 = 4.6.$$

По формуле (4.16) для распределения Y имеем:

$$M[Y] = \sum_i y_i p(y_i) = 1 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0.4 + 9 \cdot 0.3 = 4.6. \blacksquare$$

Таким образом, наряду с выражениями типа (4.18), которые не требуют данных о распределении функции, математическое ожидание функции дискретного аргумента может быть получено с помощью обычного выражения типа (4.16) для распределения функции $Y = \varphi(X)$:

$$M[Y] = \sum_i y_i p(y_i).$$

Знание закона распределения функции $Y = \varphi(X)$ позволяет вычислять и другие числовые характеристики Y по данным найденного распределения.

5.7.2. Аргумент X — непрерывная случайная величина

Рассмотрим функцию $Y = \varphi(X)$ непрерывного случайного аргумента X , плотность распределения $f_x(x)$ которого известна. Случайная величина X может иметь произвольную область возможных значений — ограниченную или бесконечную. Получим выражения, позволяющие определять плотность вероятностей $f_y(y)$ функции Y .

При определении $f_y(y)$ необходимо учитывать характер изменения функции $\varphi(X)$ в области определения аргумента. Рассмотрим вначале случай монотонных функций $\varphi(X)$, два варианта которых приведены на рис. 5.8.

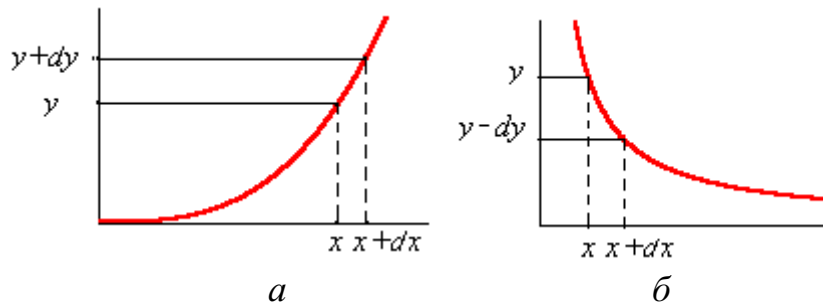


Рис. 5.8. Монотонные функции $Y = \varphi(X)$

Пусть $\varphi(X)$ монотонно возрастает. Рассмотрим элементарный участок dx , непосредственно примыкающий к точке x . Изменению аргумента X в диапазоне $(x, x + dx)$ соответствует изменение функции в диапазоне $(y, y + dy)$. При этом вероятность попадания случайной величины X в промежуток шириной dx будет равна вероятности попадания случайной величины Y на участок шириной dy (см. рис. 5.8, а). На основании (4.3) отсюда следует, что

$$\int_x^{x+dx} f_x(t)dt = \int_y^{y+dy} f_y(z)dz, \quad (5.53)$$

т. е. площади соответствующих полос шириной dx и dy под кривыми $f_x(x)$ и $f_y(y)$ равны между собой.

Используя понятие элемента вероятности, введенное в разд. 4.3, заметим, что вероятность попадания значений н.с.в. X на элементарный отрезок dx , примыкающий к точке x , равна $f_x(x)dx$. Аналогично, вероятность попадания значений н.с.в. Y на элементарный отрезок dy , примыкающий к точке y , равна $f_y(y)dy$. Из равенства этих вероятностей следует:

$$f_y(y) = f_x(x) \cdot \frac{dx}{dy}. \quad (5.54)$$

Легко убедиться в том, что для монотонно убывающей функции $\varphi(X)$ (см. рис. 5.8, б) результат определения $f_y(y)$ будет аналогичным, однако знак производной будет обратным:

$$f_y(y) = -f_x(x) \cdot \frac{dx}{dy}. \quad (5.55)$$

Учитывая неотрицательность плотности распределения, случаи (5.54) и (5.55) могут быть объединены следующим соотношением:

$$f_y(y) = f_x(x) \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right| = f_x[\Psi(y)] \cdot \left| \frac{d[\Psi(y)]}{dy} \right|, \quad (5.56)$$

где $\Psi(y)$ — обозначение функции обратного преобразования $X = \Psi(Y)$ по отношению к функции $Y = \varphi(X)$.

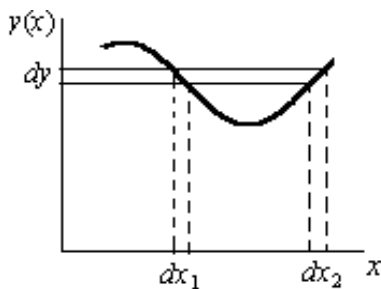


Рис. 5.9. Немонотонная функция $Y = \varphi(X)$

В случае немонотонной функции $Y = \varphi(X)$ (см. рис. 5.9) событию A , которое состоит в том, что случайная величина Y попадет на участок шириной dy , соответствует несколько несовместных событий A_i ($i = 1, 2, \dots$) — попаданий случайной величины X на один из участков dx_1 или dx_2 , или dx_3 , или и т. д., причем безразлично на какой.

Поэтому вероятность попадания Y на участок dy будет равна сумме вероятностей событий A_i : $f_y(y)dy = P\{x_1 \leq X \leq x_1 + dx_1, \text{ или } x_2 \leq X \leq x_2 + dx_2, \text{ или}$

...}. Это выражение, учитывая (5.56), дает общую формулу для нахождения плотности вероятности немонотонной функции $Y = \varphi(X)$:

$$F_y(y) = \sum_i f_x(x_i) \cdot \left| \frac{dx_i}{dy} \right| = \sum_i f_x[\Psi_i(y)] \left| \frac{d[\Psi_i(y)]}{dy} \right|. \quad (5.57)$$

Пример 5.4. Найти плотность $f(y)$ распределения функции $Y = X^2$ и $M(Y)$, если н.с.в. X имеет нормальное распределение $N(0, 1)$.

□ Решение. В данном случае значения $y = x^2 = (-x)^2$, т. е. имеются два значения $x_1 = \sqrt{y} = \Psi_1(y)$ и $x_2 = -\sqrt{y} = \Psi_2(y)$, при которых получаем одно и то же значение y . Поэтому для определения $f(y)$ необходимо воспользоваться формулой (5.57):

$$d\Psi_1(y)/dy = 1/(2\sqrt{y}), \quad d\Psi_2(y)/dy = -1/(2\sqrt{y}), \quad f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2);$$

$$f_y(y) = f_x(\sqrt{y})|1/(2\sqrt{y})| + f_x(-\sqrt{y})|-1/(2\sqrt{y})| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2).$$

На рис. 5.10 приведен график плотности $f_y(y)$; справа от него приведены результаты вычислений $M(Y)$ с использованием: а) полученной плотности $f_y(y)$; б) исходной плотности $f_x(x)$. Результаты, конечно, совпадают: $M(Y) = 1$. ■

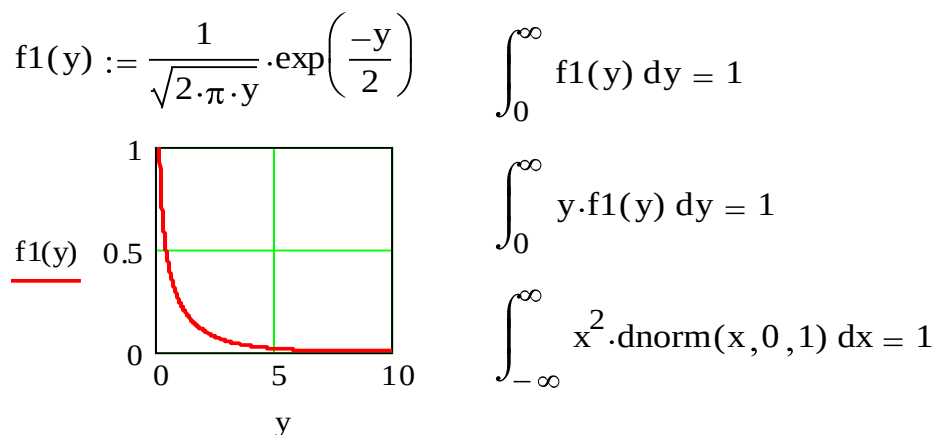


Рис. 5.10. Анализ результатов, полученных в примере 5.4

Полученные выражения позволяют решать широкий диапазон практических вероятностных задач, связанных с анализом законов распределения функций непрерывных случайных величин.

Так, в ряде задач исследования систем различных классов необходимо имитировать (генерировать) случайные воздействия с заданными законами распределения. Однако эти задачи выходят за рамки настоящей работы, поскольку для их решения необходимо привлекать элементы теории динамических систем, углубление в которую в рамках работы, посвященной общей теории вероятностей, нецелесообразно. Поэтому здесь будут даны лишь основные

аспекты решения задачи генерации случайных чисел с заданным законом распределения на основе выражения (5.56).

Типовая задача имитации случайного воздействия заключается в следующем. Пусть $Y = \varphi(X)$, причем случайная величина X имеет равномерное распределение в диапазоне $(0, 1)$, а функция $\varphi(X)$ — монотонно возрастающая. Пусть также имеется совокупность равномерно распределенных случайных чисел x^* с указанными свойствами. Требуется получить совокупность случайных чисел y^* с заданной плотностью распределения $f_y(y^*)$.

Для указанных условий выражение (5.56) примет вид:

$$f_y(y) = \frac{d[\Psi(y)]}{dy}, \quad (5.58)$$

откуда следует, что $\Psi(y)$ — первообразная для $f_y(y)$, а $\Psi(y^*)$ — первообразная для $f_y(y^*)$. Тогда, на основании теоремы Лейбница—Ньютона о первообразных, можно записать простое уравнение связи случайных чисел y^* с параметрами требуемого распределения $f_y(y^*)$ и значениями x^* случайной величины X :

$$x^* = \int_{-\infty}^{y^*} f_y(y) dy, \quad x^* = \Psi(y^*). \quad (5.59)$$

Из (5.59) следует, что искомые значения y^* (верхний предел интегрирования) — квантили заданного распределения с плотностью $f_y(y^*)$, а равномерно распределенные на интервале $(0, 1)$ числа x^* — значения функции этого распределения (4.7). В общем случае выражение (5.59) может служить основой итерационной процедуры нахождения верхнего предела интегрирования по известным значениям интеграла и заданной подынтегральной функции.

При использовании СКМ проблема практического получения значений случайных чисел y^* в указанной постановке резко упрощается. Так, в системах Mathcad для вычисления квантилей предусмотрены упоминавшиеся выше (см. разд. 4.5, 5.1—5.6) встроенные функции, первый символ которых — латинская буква q . Аргументами этих функций служат значения функции распределения (в нашем случае — значения x^* , порядок квантили) и параметры заданного закона распределения.

Пример 5.5. Сформировать с использованием (5.59) n независимых случайных чисел, распределенных по показательному закону с $\lambda = 1$.

□ Решение. Примем объем реализации $n = 1000$. На рис. 5.11 приведены результаты применения формулы (5.59) для получения в среде Mathcad случайных чисел y^* с заданным распределением. Исходная равномерно распределенная на интервале $(0, 1)$ последовательность независимых случайных чисел x^* формируется в примере в виде вектора **a** с использованием встроенной функции **runif**($n, 0, 1$).

Искомые значения случайных чисел y^* с показательным распределением (5.26) при $\lambda = 1$ определяется в первой же строке mcd-файла (см. рис. 5.11) как элементы w_i вектора **w** квантилей показательного распределения для значе-

ний a_i вектора $\mathbf{a}$ ($i = 0, n - 1$). Для этого используется встроенная функция $\text{qexp}(a_i, \lambda)$.

$n := 1000$ $\mathbf{a} := \text{runif}(n, 0, 1)$ $i := 0..n - 1$ $w_i := \text{qexp}(a_i, 1)$

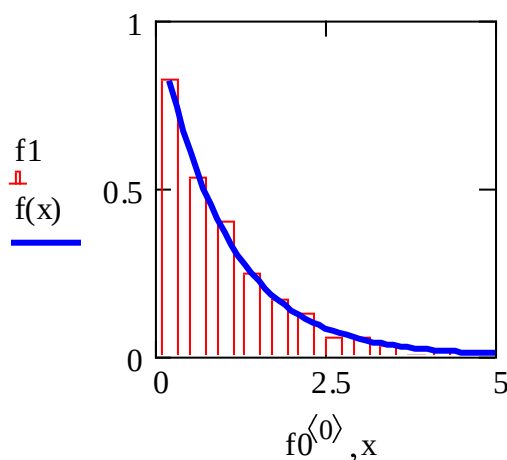
$l := \text{floor}(\min(w))$ $l = 0$ $u := \text{ceil}(\max(w))$ $u = 8$ $b := 20$

$m := \text{length}(w)$ $m = 1000$ $h := \frac{u - l}{b}$ $h = 0.4$

$\mathbf{f0} := \text{histogram}(b, w)$

$f(x) := \text{dexp}(x, 1)$ $f1 := \frac{f0^{(1)}}{m \cdot h}$ Масштабирование гистограммы

$x := 0.2, 0.3 .. 5$



$$\sum_{k=0}^{b-1} f0^{(1)}_k = 1000$$

$$\sum_{k=0}^{b-1} f1_k \cdot h = 1$$

$f0 =$

	0	1
0	0.2	329
1	0.6	214
2	1	160
3	1.4	100
4	1.8	67
5	2.2	52
6	2.6	23
7	3	22
8	3.4	13
9	3.8	2
10	4.2	7
11	4.6	3
12	5	0
13	5.4	3
14	5.8	3
15	6.2	0

Рис. 5.11. Пример получения случайных чисел

Остальные вычисления носят вспомогательный характер и связаны с построением гистограммы относительных частот полученных случайных чисел y^* , их сопоставлением с теоретической плотностью показательного распределения и графической иллюстрацией результатов.

Общая методика построения гистограмм будет рассмотрена в *разд. 1.4* (ч. II), поэтому на рис. 5.11 гистограмма строится в среде Mathcad пока без подробных пояснений отдельных деталей. С помощью встроенных функций **ceil** и **floor** определяются целые значения границ диапазона y^* ; этот диапазон разбивается на $b = 20$ промежутков шириной h каждый. При построении гистограммы используется встроенная функция **histogram**(b, w), которая выводит результат в виде двухстолбцовой матрицы **f0** с числом строк, равным числу промежутков. Первый столбец результирующей матрицы **f0** содержит средние точки каждого из промежутков; во втором столбце располагаются абсолютные частоты попаданий в промежутки. После масштабирования второго столбца матрицы **f0** гистограмма может сопоставляться со значениями теоре-

тической плотности распределения $f(y)$, которая вычисляется (см. рис. 5.11) с помощью встроенной функции **dexp**. ■

Завершая краткое обсуждение проблемы генерации случайных чисел, отметим, что для ряда распределений применение формулы (5.59) позволяет получить аналитическое выражение для пересчета исходных случайных чисел с равномерным распределением на интервале (0, 1) в случайные числа с заданным законом распределения. К таким распределениям, допускающим аналитическое решение проблемы генерации, относится и рассмотренное в примере (см. рис. 5.11) показательное распределение. Действительно, для этого распределения на основании (5.59) и (5.26) можно записать:

$$x^* = \int_0^{y^*} f_y(y) dy = 1 - e^{-\lambda y^*}; \quad \ln(1 - x^*) = -\lambda y^*; \quad y^* = -\ln(1 - x^*) / \lambda. \quad (5.60)$$

Результаты рассмотренного выше (см. рис. 5.11) примера могут быть получены и с применением простого выражения (5.60), без использования численных методов решения уравнений (5.59).

Глава 6. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ

6.1. Основные положения

В главе 1, при введении понятия вероятность, в качестве одного из возможных было использовано так называемое статистическое определение. Это определение использует факт устойчивости относительной частоты появления событий при повторении достаточно большого числа однородных испытаний. Относительные частоты группируются вокруг некоторого значения тем более тесно, чем больше число испытаний. В этой главе свойства устойчивости вероятностных характеристик случайной величины при неограниченном увеличении числа испытаний, т. е. при $n \rightarrow \infty$, рассматриваются более подробно.

Предельные теоремы теории вероятности определяют закономерности, которым подчинены вероятностные характеристики случайной величины при $n \rightarrow \infty$. Совокупность предельных теорем рассматривает связи между теоретическими и эмпирическими описаниями характеристик случайных величин при $n \rightarrow \infty$ и объединяются термином «**закон больших чисел**». Таким образом, «закон больших чисел» не имеет одной локальной формулировки. Он представляет собой объединение ряда предельных теорем теории вероятности. Для этой группы предельных теорем важным служит понятие сходимости по вероятности.

Определение. Последовательность случайных величин X_n , $n = 1, 2, \dots$ **сходится по вероятности** к случайной или неслучайной величине x , если для любого $\varepsilon > 0$ предел вероятности того, что X_n отличается от x не более, чем на ε , равен 1, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|X_n - x| < \varepsilon\} = 1. \quad (6.1)$$

Предел вероятности противоположного неравенства равен нулю.

Применительно к той группе предельных теорем теории вероятности, которые опираются на сходимость по вероятности и формулу (6.1), следует отметить, что для этой группы не важно, какой закон распределения имеют случайные величины. Утверждения, приведенные ниже в форме предельных теорем этой группы, справедливы при произвольных законах распределения и в этом смысле являются независимыми от конкретного их вида.

Другая группа предельных теорем, наоборот, тесно связана с законами распределения случайной величины и определяет свойства законов (композиций законов) распределения при стремлении числа испытаний к бесконечности. Эта группа предельных теорем опирается на так называемую центральную предельную теорему.

Ниже основные предельные теоремы рассматриваются более подробно. Вначале приведем предельные теоремы, относящиеся к закону больших чисел.

6.2. Неравенство Чебышева

Пусть непрерывная или дискретная случайная величина X имеет конечные математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$. Согласно неравенству Чебышева, при любом $\varepsilon > 0$ вероятность того, что случайная величина X отклонится от своего математического ожидания $M(X)$ меньше, чем на ε , ограничена снизу величиной $1 - D(X)/\varepsilon^2$:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) > 1 - D(X)/\varepsilon^2. \quad (6.2)$$

Поскольку события $A_1 = \{|X - M(X)| < \varepsilon\}$ и $A_2 = \{|X - M(X)| \geq \varepsilon\}$ противоположные, то $A_1 + A_2 = \Omega$, где Ω — пространство элементарных событий; A_1 и A_2 составляют полную группу событий. Отсюда следует другая формулировка неравенства Чебышева:

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq D(X)/\varepsilon^2. \quad (6.3)$$

Доказательство неравенства Чебышева может быть осуществлено в равной степени как для выражения (6.2), так и применительно к (6.3) для непрерывных или дискретных случайных величин. Приведем доказательство выражения (6.3) для дискретных случайных величин.

▷ Пусть дискретная случайная величина имеет закон распределения вида (4.1) с математическим ожиданием (4.16) и дисперсией (4.26)

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i; \quad D(X) = \sum_{i=1}^n [x_i - M(X)]^2 p_i; \quad \sum_i p_i = 1.$$

Событие, вероятность которого оценивается неравенством (6.2), противоположно событию $|X - M(X)| \geq \varepsilon$, т. е. они несовместны. В силу (2.14), сумма вероятностей этих событий равна 1, т. е.

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) + P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) = 1$$

и вероятность события $|X - M(X)| < \varepsilon$ может быть выражена как $P(|X - M(X)| < \varepsilon) = 1 - P(|X - M(X)| \geq \varepsilon)$.

Оценим вероятность $P(|X - M(X)| \geq \varepsilon)$, для чего обратимся к выражению (4.26) для дисперсии $D(X)$. В составе слагаемых, которые составляют

$D(X) = \sum_{i=1}^n [x_i - M(X)]^2 p_i$, выделим две группы: $d_1(X)$ и $d_2(X)$, причем $D(X) = d_1(X) + d_2(X)$. Отнесем к $d_1(X)$ те слагаемые, для которых

$|X - M(X)| < \varepsilon$, а к $d_2(X)$ — слагаемые, для которых $|x_i - M(X)| \geq \varepsilon$. При этом очевидно, что $d_2(X) \leq D(X)$.

Учитывая произвольность порядка перечисления слагаемых в выражении для дисперсии $D(X)$, для определенности будем считать, что $i = 1, 2, \dots, k$ и $j = k + 1, k + 2, \dots, n$, т. е.

$$d_2(X) = \sum_{j=k+1}^n [x_j - M(X)]^2 p_j \leq D(X). \quad (*)$$

Обращаясь к неравенству $|x_i - M(X)| \geq \varepsilon$, ($\varepsilon > 0$), заметим, что обе части неравенства положительны. Это позволяет возвести их в квадрат без нарушений неравенства, т.е. $|x_i - M(X)|^2 \geq \varepsilon^2$.

В свою очередь, полученное выражение позволяет в сумме (*) подставить вместо величины $|x_i - M(X)|$ число ε^2 . Поскольку такая подстановка приведет лишь к усилению неравенства (*), в результате получим:

$$D(X) \geq \varepsilon^2 \sum_{j=k+1}^n p_j. \quad (**)$$

Сомножитель $\sum_{j=k+1}^n p_j$ правой части выражения (**) определяет вероятность суммы событий x_j ($j = k + 1, k + 2, \dots, k + n$), т. е. вероятность события, заключающегося в том, что случайная величина X примет одно, безразлично какое, значение из ряда $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$. Однако для каждого значения из этого ряда справедливо неравенство $|x_i - M(X)| \geq \varepsilon$, поэтому $\sum_{j=k+1}^n p_j$ определяет вероятность события $P(|x_i - M(X)| \geq \varepsilon)$. Перепишем неравенство (**) с учетом последнего результата:

$$D(X) \geq \varepsilon^2 \cdot P(|x_i - M(X)| \geq \varepsilon).$$

Таким образом, можно записать $P(|x_i - M(X)| \geq \varepsilon) \leq D(X) / \varepsilon^2$, что определяет справедливость неравенства (6.3). Отсюда непосредственно следует и справедливость неравенства (6.2). ◀

Рассмотрим типовой пример, решение которого находится с применением неравенства Чебышева.

Пример 6.1. Анализ качества изделий, выпускаемых инструментальным цехом, показал, что 75% изделий в среднем укладывается в поле допуска. Оценить нижнюю границу вероятности того, что среди 2000 деталей в поле допуска окажутся от 1450 до 1550 деталей.

□ Решение. Согласно условию задачи, рассматриваемая схема испытаний может быть определена как схема испытаний Бернулли — композиция незави-

симых испытаний с одинаковой вероятностью появления события (кондиционного изделия), равной $p = 0.75$. Число событий k , обнаруженных в серии $n = 2000$ испытаний, имеет, таким образом, биномиальное распределение. Математическое ожидание и дисперсия числа событий определяются выражениями (5.38) и (5.41) соответственно, в нашем случае равны: $v(k) = np = 2000 \cdot 0.75 = 1500$; $D(k) = npq = 2000 \cdot 0.75 \cdot 0.25 = 375$.

Замечаем, что границы заданного промежутка для числа кондиционных изделий симметричны относительно математического ожидания. Это позволяет заменить двустороннее неравенство $1450 < k < 1550$ односторонним, вида $|k - M(k)| < 50$ и, в силу неравенств (6.2), (6.3), определить $\varepsilon = 50$.

Тогда, в соответствии с неравенством Чебышева (6.2), получаем

$$P(|k - M(k)| < 50) > \left(1 - \frac{375}{50^2} \approx 0.85\right).$$

Таким образом, искомая вероятность равна 0.85. ■

6.3. Теорема Бернулли

Теорема Бернулли представляет собой простейшую форму «закона больших чисел». Рассмотрим схему испытаний Бернулли — совокупность независимых испытаний с двумя исходами и одинаковыми вероятностями успеха в каждом элементарном испытании.

В разд. 3.1 и 5.4 было показано, что случайная величина (число k появления событий при n независимых испытаниях) имеет биномиальное распределения с вероятностями $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, причем математическое ожидание $M(k) = np$, а дисперсия $D(k) = npq$.

Пусть в серии из n испытаний событие появилось ровно k раз. Тогда относительная частота появления события

$$\rho = k / n. \quad (6.4)$$

Согласно общим свойствам математического ожидания и дисперсии (см. разд. 4.5, 4.6) для относительной частоты имеем:

$$\begin{aligned} M(\rho) &= \frac{1}{n} M(k) = \frac{1}{n} np = p; \\ D(\rho) &= \frac{1}{n^2} D(k) = \frac{1}{n^2} npq = pq / n. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Применяя к рассмотренному случаю неравенство Чебышева в формах (6.2) и (6.3) и учитывая (6.5), получаем

$$\begin{aligned} P(|\rho - p| < \varepsilon) &> 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}; \\ P(|\rho - p| \geq \varepsilon) &\leq \frac{pq}{n\varepsilon^2}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

На основании выражений (6.6) теорема Бернулли утверждает, что относительная частота появления событий в серии из n независимых испытаний с одинаковой вероятностью p появления события в каждом испытании, сходится по вероятности к величине вероятности появления события в каждом испытании:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\rho - p| < \varepsilon) = 1, \quad \varepsilon > 0. \quad (6.7)$$

В тоже время, при неограниченном росте числа испытаний вероятность того, что отклонение ρ от p выйдет за пределы $\varepsilon > 0$, равна нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\rho - p| \geq \varepsilon) = 0. \quad (6.8)$$

Доказательство (6.7) и (6.8) прямо следует из неравенств (6.6).

Из утверждений теоремы Бернулли (6.7), (6.8) вовсе не следует равенство между относительной частотой появления событий и вероятностью появления событий в одиночных испытаниях, однако сколь угодно малое отклонение ρ от p будет тем ближе к нулю, чем больше n .

Задание к самостоятельной работе:

* Стрелок выполняет стрельбу по одиночным целям. Опыт показывает, что в среднем в каждой серии выстрелов получается 30 % попаданий. Найти нижнюю границу вероятности того, что в серии из 10 000 выстрелов отклонение относительной частоты попаданий от их вероятности не превысит 0.01.

Ответ: Искомая нижняя граница вероятности составляет 0.79.

6.4. Теорема Чебышева

Теорема Чебышева представляет «закон больших чисел» в общей форме и служит обобщением теоремы Бернулли на случай произвольно распределенных случайных величин X .

Пусть над случайной величиной X с ограниченными (конечными) математическим ожиданием и дисперсией производится n независимых испытаний с фиксацией значений случайной величины X в каждом i -ом испытании ($i = 1, 2, \dots, n$). Предполагается также, что при переходе от одного испытания к другому закон распределения случайной величины меняется, т. е. может быть рассмотрена последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n$, каждый элемент X_i которой имеет математическое ожидание $M(X_i) = m_i$ и дисперсию $D(X_i)$. Пусть $D(X_i) \leq C$.

Теорема Чебышева утверждает, что среднее арифметическое наблюдаемых значений $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n$ сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i| < \varepsilon) = 1;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i| \geq \varepsilon) = 0. \quad (6.9)$$

▷ Доказательство следует из неравенства Чебышева (6.2), (6.3). Действительно, обозначая среднее арифметическое случайной величины X_i через Y и учитывая независимость X_i , согласно свойствам математического ожидания (4.21) и дисперсии (4.30), для математического ожидания и дисперсии случайной величины Y имеем:

$$Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i; m_Y = M(Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i;$$

$$D(Y) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X_i) \leq (\frac{1}{n^2} nC = \frac{1}{n} C). \quad (6.10)$$

Применяя к (6.10) неравенство Чебышева (6.2), (6.3), получим:

$$P(|Y - m_Y| \geq \varepsilon) \leq \frac{C}{n\varepsilon^2};$$

$$P(|Y - m_Y| < \varepsilon) > (1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}), \quad (6.11)$$

откуда непосредственно следует (6.9). В выражениях (6.11) дисперсия заменена своим верхним граничным значением C/n , отчего неравенства не нарушаются, а только усиливаются. ◀

Выражения (6.9), (6.11) позволяют рассмотреть более простой, часто встречающийся в приложениях, случай, когда случайная величина X также имеет ограниченное математическое ожидание m_x и дисперсию $D(X)$, но закон ее распределения от опыта к опыту не меняется. Это означает, что законы распределения наблюдаемых значений случайной величины X_i совпадают с законом распределения случайной величины X , т. е. $M(X_i) = m_x$, $D(X_i) = D(X)$.

Тогда, для математического ожидания и дисперсии случайной величины Y , согласно свойствам математического ожидания (4.21) и дисперсии (4.30), имеем:

$$Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i; m_Y = M(Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i = \frac{1}{n} n m_x = m_x;$$

$$D(Y) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X_i) = \frac{1}{n^2} n D_x = \frac{1}{n} D_x; \quad (6.12)$$

и выражения (6.11), (6.9) могут быть представлены в виде:

$$P(|Y - m_Y| \geq \varepsilon) \leq \frac{D_X}{n\varepsilon^2}; \quad (6.13)$$

$$P(|Y - m_Y| < \varepsilon) > (1 - \frac{D_X}{n\varepsilon^2});$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y - m_Y| \geq \varepsilon) = 0;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y - m_Y| < \varepsilon) = 1. \quad (6.14)$$

Таким образом, в случае, когда закон распределения исследуемой случайной величины в процессе испытаний не меняется, т. е. числовые характеристики наблюдаемых значений остаются одинаковыми, среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины сходится по вероятности к ее математическому ожиданию.

Из выражений (6.12)—(6.14) следует, что математическое ожидание случайной величины Y в рассматриваемом частном случае не зависит от числа опытов, равно математическому ожиданию случайной величины X и имеет дисперсию, значение которой обратно пропорционально n . Это позволяет утверждать, что среднее арифметическое случайных величин при увеличении числа испытаний проявляет себя почти как неслучайная (детерминированная) величина и может быть заменено математическим ожиданием. Эта замена сопровождается абсолютной погрешностью, которая с увеличением n становится все менее вероятной.

Ниже, в *разд. 2.2 II части*, будет показано, что среднее арифметическое может быть с успехом использовано в качестве приближенного значения математического ожидания, определенного по данным наблюдений случайной величины в процессе проведения испытаний.

Задание к самостоятельной работе.

* Среднее квадратическое отклонение каждой из 2500 независимых случайных величин не превосходит величины 3.0. Найти нижнюю границу вероятности того, что среднее арифметическое этих случайных величин отклоняется от среднего арифметического их математических ожиданий не более, чем на 0,3.

Ответ: Искомая вероятность равна 0.96.

6.5. Центральная предельная теорема

Рассмотренные выше предельные теоремы, характеризующие «закон больших чисел», устанавливают факт сходимости по вероятности тех или иных случайных величин к определенным постоянным. При этом выявленные свойства не опираются на определенность законов распределения. Наряду с группой рассмотренных предельных теорем, как отмечалось, имеет место другая группа, в которой устанавливаются предельные свойства распределений. Все предельные теоремы, относящиеся к этой группе, рассматривают условия,

совокупность которых становится причиной появления нормально распределенных случайных величин. Эти условия весьма часто выполняются при анализе прикладных задач теории вероятностей, поэтому нормальный закон является самым распространенным законом распределения.

Ранее, в разд. 3.4, были рассмотрены некоторые свойства схемы испытаний Бернулли при устремлении числа n испытаний к бесконечности. Для этого случая были введены формулы Пуассона (3.28), а также формулы (3.31) и (3.34), вытекающие из локальной теоремы Муавра—Лапласа и интегральной теоремы Лапласа. Все эти выражения касались проблемы вычисления вероятностей появления событий при неограниченном числе испытаний.

Другой, не менее важной для множества приложений, проблемой служит анализ совокупного влияния некоторого числа случайных величин, имеющих произвольные законы распределения. Подобная ситуация характерна для широкого диапазона практических вероятностных задач. Например: при моделировании и анализе состояний технических систем, подверженных воздействию разнородных случайных возмущений; при анализе поведения измерительных систем и формировании моделей измеряемых сигналов; в задачах оценки параметров технических систем по косвенным наблюдениям, множестве навигационных задач и задач оптимального стохастического управления и т. д. Даже из перечисленного неполного ряда подобных задач ясно, насколько широко распространены задачи анализа результатов воздействия совокупности разнородных случайных величин на некоторый объект или систему. Центральная предельная теорема при достаточно общих допущениях определяет предельные свойства суммы независимых случайных величин X_i :

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_i + \dots + X_n. \quad (6.15)$$

Приведем центральную предельную теорему, опуская доказательство.

Пусть дана последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n$, для которых известны математические ожидания и дисперсии:

$$M(X_i) = m_i; \quad D(X_i) = \sigma_i^2. \quad (6.16)$$

Введем обозначения:

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i; \quad M(S_n) = \sum_{i=1}^n m_i; \quad D(S_n) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2. \quad (6.17)$$

Пусть также выполняются условия для относительного центрального момента третьего порядка (условие симметрии):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum \mu_3^a(i)}{\left(\sqrt{D(S_n)}\right)^3} = \frac{\sum \mu_3^a(i)}{\left(\sum \sigma_i^2\right)^{3/2}} = 0, \quad (6.18)$$

где $\mu_3^a(i) = M\left[(X_i - m_i)^3\right]$ — центральный момент третьего порядка.

Центральная предельная теорема в этих условиях утверждает, что при $n \rightarrow \infty$ закон распределения S_n (6.17) сходится к нормальному распределению. Для нормированной суммы случайных величин S_n получаем:

$$t = S_n^* = \frac{S_n - M(S_n)}{\sqrt{D(S_n)}}; M(t) = 0; D(t) = 1; t \sim N(0, 1). \quad (6.19)$$

Функция распределения нормированной суммы t (6.19) имеет вид:

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (6.20)$$

Следует отметить, что в формулировке центральной предельной теоремы нигде не используется вид или характеристики конкретного закона распределения X . Центральная предельная теорема, таким образом, устанавливает, что при некоторых, достаточно общих условиях, аддитивная совокупность произвольно распределенных случайных величин в пределе может быть аппроксимирована одной случайной величиной с нормальным законом распределения. Это определяет высокое значение центральной предельной теоремы при решении широкого круга практических задач, связанных с анализом влияния разнородных случайных воздействий на технические системы, с синтезом оптимальных измерительных и управляющих систем, анализом и синтезом стохастических систем различного назначения.

Поскольку нормальный закон распределения, в силу его распространенности, весьма хорошо изучен, применение центральной предельной теоремы в задачах указанного класса резко упрощает исследование систем, способствует созданию образцов новой техники и получению новых научных и практических результатов применительно к системам различных классов.

Глава 7. ВЕКТОРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

В *главе 4* были рассмотрены характеристики скалярных случайных величин. Однако при решении практических вероятностных задач, весьма распространен случай, когда необходимо проанализировать несколько случайных величин совместно. При этом принято говорить о системе случайных величин или, используя представление точки в n -мерном пространстве как вектора значений ее отдельных координат, говорят о случайном векторе или векторной случайной величине (ВСВ).

Понятие векторной случайной величины используется при исследовании нескольких случайных величин совместно по результатам испытаний, при анализе свойств нескольких параметров изучаемой технической системы, анализе состояний в стохастических системах — динамических системах со случайными воздействиями и т. д.

Векторные случайные величины необходимо учитывать, например, при коррекции прицела на стендовых стрельбах, когда оцениваются вертикальные и горизонтальные смещения попаданий относительно центра мишени; при определении силы и направления ветра, воздействующих на летательный аппарат; при оценке координат подвижного объекта в пространстве и проч.

В любом из подобных случаев исходам испытаний может быть поставлена в соответствие система случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_j, \dots, X_n$ или n -мерный случайный вектор

$$\mathbf{X} = | X_1, X_2, \dots, X_j, \dots, X_n |^T, \quad (7.1)$$

где надстрочный индекс T обозначает операцию транспонирования.

Случайный вектор (7.1) в качестве своих составляющих (координат, элементов) содержит случайные величины X_j ($j = 1, 2, \dots, n$), которые с вероятностной точки зрения должны рассматриваться вместе, в совокупности. Для каждой из случайных величин, входящих в случайный вектор (7.1), остаются справедливыми их локальные свойства, которые были рассмотрены в *главе 4*. Однако, как будет показано ниже, анализ системы случайных величин X_j требует введения большого числа новых понятий и терминов для описания свойств совокупности случайных величин в целом.

Рассматривая в *главе 4* случайные величины, мы подразделяли их на дискретные и непрерывные. Отмечалось, что дискретная случайная величина задается совокупностью возможных значений и вероятностями каждого из них. Для полного задания непрерывной случайной величины необходимо задать ее плотность распределения. Эти положения остаются в силе применительно к отдельным элементам случайного вектора (7.1). В то же время задание случайного вектора требует соответствующего обобщения, в котором, однако, будет прослеживаться формальная аналогия со скалярным случаем. Эта аналогия будет касаться описания, основных форм задания и

терминов (функция распределения, плотность вероятности, числовые характеристики и проч.), которые, при рассмотрении векторных случайных величин приобретут расширенное толкование, вследствие чего — и новые свойства.

7.1. Дискретные случайные векторы

Дискретным случайным вектором (дискретной векторной случайной величиной) будем называть такую векторную случайную величину (7.1), составляющие которой — дискретные случайные величины.

В отличие от скалярной случайной величины, для задания дискретного случайного вектора должны быть заданы все возможные комбинации значений его элементов и вероятности появления этих комбинаций. Покажем это на примере двумерного дискретного случайного вектора.

Пусть случайный вектор $\mathbf{X}$ содержит два элемента X_1 и X_2 , т. е.: $\mathbf{X} = [X_1, X_2]^T$. Значения каждого из элементов такого случайного вектора определим множествами:

$$X_1 = [x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1i_1}, \dots, x_{1k}]; \quad X_2 = [x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2i_2}, \dots, x_{2m}]. \quad (7.2)$$

Число возможных значений пар элементов рассматриваемого двумерного вектора определяется произведением $(k \times m)$. Для элементов такого вектора $\mathbf{X}$ должны быть заданы вероятности $p(i_1, i_2)$, означающие вероятности событий, состоящих в том, что элементами вектора $\mathbf{X}$ служат: x_{1i_1} для первой составляющей и x_{2i_2} для второй:

$$p(i_1, i_2) = P[(X_1 = x_{1i_1}) \cdot (X_2 = x_{2i_2})]; \quad i_1 = (\overline{1, k}), \quad i_2 = (\overline{1, m}). \quad (7.3)$$

Закон распределения двумерного дискретного случайного вектора удобно представлять в виде таблицы, в которую по горизонтали записываются возможные значения первого элемента (7.2), по вертикали — второго элемента, а в теле таблицы указываются вероятности $p(i_1, i_2)$ (7.3). Вариант задания двумерного дискретного случайного вектора приведён в табл. 7.1.

Эта таблица обладает рядом свойств.

Свойство 1. Сумма всех значений вероятностей, расположенных в теле табл. 7.1, равна единице. Это следует из того, что события, означающие совместное выполнение равенств $(X_1 = x_{1i_1}, X_2 = x_{2i_2}), i_1 = (\overline{1, k}), i_2 = (\overline{1, m})$, несовместны и составляют полную группу. Таким образом

$$\sum_{i_1} \sum_{i_2} p(i_1, i_2) = 1. \quad (7.4)$$

Свойство 2. Из двумерного закона распределения могут быть найдены законы распределения вероятностей отдельных составляющих.

Таблица 7.1

$x_2 \backslash x_1$	x_{11}	x_{12}	...	x_{1i_1}	...	x_{1k}
x_{21}	$p(1, 1)$	$p(2, 1)$	...	$p(i_1, 1)$	...	$p(k, 1)$
x_{22}	$p(1, 2)$	$p(2, 2)$	...	$p(i_1, 2)$	...	$p(k, 2)$
...	...	...	...	...	...	...
x_{2i_2}	$p(1, i_2)$	$p(2, i_2)$	...	$p(i_1, i_2)$	...	$p(k, i_2)$
...	...	...	...	...	...	...
x_{2m}	$p(1, m)$	$p(2, m)$	...	$p(i_1, m)$	...	$p(k, m)$

Определим, например, закон распределения первого элемента вектора (7.2). Для этого необходимо задать возможные значения X_1 (по условию будем считать их заданными) и определить вероятности этих значений, т. е. вероятности появления событий $X_1 = x_{i_1}$, $i_1 = (\overline{1, k})$, $i_2 = (\overline{1, m})$ при любых значениях X_2 . Например, вероятность появления событий заключающихся в том, что $X_1 = x_{11}$ при произвольных значениях $X_2 = x_{2i_2}$, $i_2 = (\overline{1, m})$, будет равна сумме вероятностей, расположенных в первом столбце табл. 7.1:

$$P(x_{11}) = P\{[(X_1 = x_{11})(X_2 = x_{21})] \dots [(X_1 = x_{11})(X_2 = x_{2m})]\} = \\ = p(1, 1) + p(1, 2) + \dots + p(1, m) = \sum_{i_2} p(1, i_2). \quad (7.5)$$

Выражение (7.5) следует из несовместности i_2 указанных событий, вероятность суммы которых определяется по теореме сложения вероятностей (2.2) как сумма вероятностей. Подобное выражение может быть составлено для любого значения $X_1 = x_{i_1}$. Поэтому вероятности событий $X_1 = x_{i_1}$ могут быть найдены суммированием строк табл. 7.1:

$$P(i_1) = P(X_1 = x_{i_1}) = \sum_{i_2} p(i_1, i_2). \quad (7.6)$$

Вероятности распределения случайной величины X_2 (второго элемента вектора $\mathbf{X}$) будут результатом суммирования столбцов табл. 7.1:

$$P(X_2 = x_{2,i_2}) = \sum_{i_1} p(i_1, i_2). \quad (7.7)$$

Выражения (7.6), (7.7) обобщаются следующим правилом — для получения вероятностей ряда распределения (4.1) одной из составляющих двумерного вектора (7.2) необходимо просуммировать вероятности совместного появления событий $X_1 = x_{i_1}$ и $X_2 = x_{2i_2}$ по другой составляющей. Рассмотренное правило может быть обобщено на случай n -мерного случайного вектора.

Свойство 3. Для получения вероятностей ряда распределения (4.1) одной из составляющих n -мерного случайного вектора необходимо просуммировать вероятности совместного появления различных комбинаций значений элементов случайного вектора по остальным составляющим.

Это означает, что, например, для трехмерного вектора (7.1) с элементами X_1, X_2, X_3 , значения которых заданы множествами $x_{1i_1}, x_{2i_2}, x_{3i_3}, i_1 = (\overline{1, k}), i_2 = (\overline{1, m}), i_3 = (\overline{1, l})$, получается совокупность из $g = kml$ комбинаций этих значений с таким же числом вероятностей $p(i_1, i_2, i_3)$ для каждого из них, причём

$$\begin{aligned} \sum_{i_1} \sum_{i_2} \sum_{i_3} p(i_1, i_2, i_3) &= 1; & \sum_{i_2} \sum_{i_3} p(i_1, i_2, i_3) &= P(i_1); \\ \sum_{i_1} \sum_{i_3} p(i_1, i_2, i_3) &= P(i_2); & \sum_{i_1} \sum_{i_2} p(i_1, i_2, i_3) &= P(i_3). \end{aligned} \quad (7.8)$$

Задание n -мерного распределения дискретного случайного вектора (7.1) позволяет обобщить понятия кумулятивной вероятности (4.2) и вероятности попадания случайной величины в диапазон. Рассмотрим это на примере двумерного случайного вектора (7.2).

Предположим, что возможные значения элементов X_1 и X_2 случайного вектора перечислены в возрастающем порядке, т. е. множества $\{x_{1,i_1}\}$ и $\{x_{2,i_2}\}$ ранжированы по возрастанию:

$$\left. \begin{aligned} x_{11} \leq x_{12} \leq \dots \leq x_{1k}; \\ x_{21} \leq x_{22} \leq \dots \leq x_{2m}. \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

Тогда вероятность попадания двумерного случайного вектора (случайной точки на плоскости) в зону, соответствующую неравенствам $X_1 \leq x_{16}, X_2 \leq x_{24}$, выразится двойной суммой

$$P[(X_1 \leq x_{16})(X_2 \leq x_{24})] = \sum_{i_1=1}^6 \sum_{i_2=1}^4 p(i_1, i_2), \quad (7.10)$$

т. е. суммой значений той части табл. 7.1, которая ограничена ее элементами x_{16} и x_{24} . Геометрически это означает вероятность попадания случайной точки в зону, изображенную на рис. 7.1, а.

Аналогично может быть выражена вероятность попадания случайной точки в зону, ограниченную, например, двусторонними неравенствами $x_{13} \leq X_1 \leq x_{15}; x_{22} \leq X_2 \leq x_{26}$ (см. рис. 7.1, б):

$$P[(x_{13} \leq X_1 \leq x_{15})(x_{22} \leq X_2 \leq x_{26})] = \sum_{i_1=3}^5 \sum_{i_2=2}^6 p(i_1, i_2).$$

При $n > 2$ может быть решена задача о вероятности попадания случайной точки в подобные зоны — объемы в n -мерном пространстве.

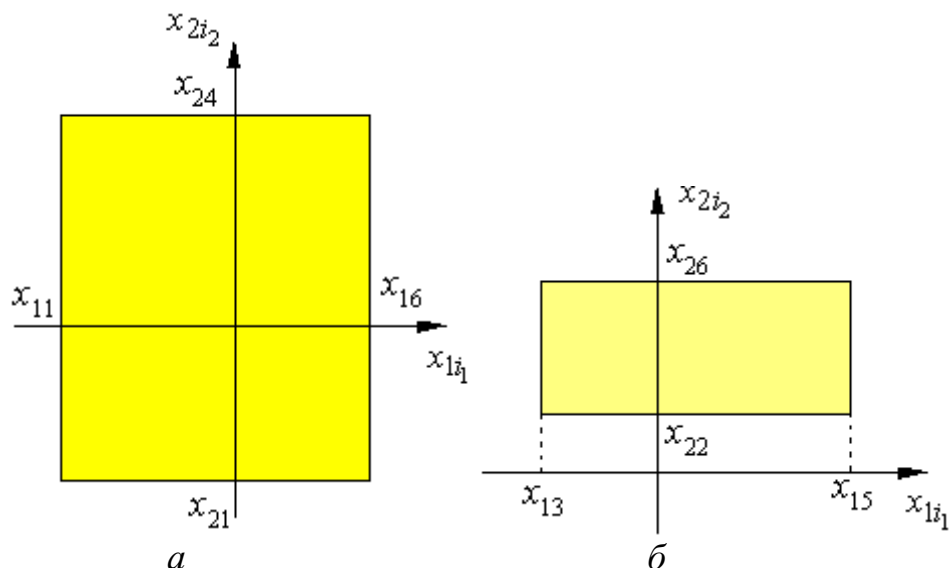


Рис. 7.1. Области определения двумерной случайной величины

Пример 7.1. Найти распределения составляющих X и Y двумерной дискретной векторной случайной величины, заданной следующей таблицей:

$Y \setminus X$	x_1	x_2	x_3
y_1	0.18	0.22	0.16
y_2	0.08	0.16	0.20

□ **Решение.** На основании выражений (7.4)—(7.7), суммируя данные таблицы по строкам и столбцам, получаем единицу. Суммирование по строкам дает одномерное распределение составляющей X :

x_1	x_2	x_3
$P(X = x_1) = 0.26$	$P(X = x_2) = 0.38$	$P(X = x_3) = 0.36$

Аналогично, суммирование данных таблицы по столбцам дает одномерное распределение составляющей Y :

y_1	y_2
$P(Y = y_1) = 0.56$	$P(Y = y_2) = 0.44$

Нетрудно убедиться в том, что суммы полученных вероятностей для каждой из последних таблиц также равны единице. ■

Выражения типа (7.10) с небольшими изменениями, которые касаются правых границ области определения составляющих случайного вектора, вводят понятие функции распределения векторных случайных величин.

7.2. Функция распределения векторной случайной величины (ВСВ)

Рассмотрим векторную случайную величину,

$$\mathbf{X} = |X_1, X_2, \dots, X_n|^T, \quad (7.11)$$

образованную случайными величинами X_j ($j = \overline{1, n}$), которые в общем случае имеют неограниченный диапазон возможных значений x_j .

Функцией распределения векторной случайной величины $\mathbf{X}$ называется вероятность совместного появления событий $(X_1 < x_1), (X_2 < x_2), \dots, (X_n < x_n)$, т. е. вероятность сложного события

$$\Theta = [(X_1 < x_1) \cdot (X_2 < x_2) \dots (X_n < x_n)], \quad (7.12)$$

где x_j , ($j = \overline{1, n}$) — значения случайных величин, в общем случае переменные.

Функция распределения ВСВ (7.11), в силу данного определения, равна:

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = F_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P[(X_1 < x_1) \cdot \dots \cdot (X_n < x_n)] = P(\Theta). \quad (7.13)$$

Учитывая сложность интерпретации многомерной функции распределения, далее, по мере необходимости, будем обращаться к двумерному распределению, обобщая получаемые результаты на многомерный случай.

Для случая $n = 2$ функция распределения (7.13) записывается как

$$F_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = P[(X_1 < x_1) \cdot (X_2 < x_2)]. \quad (7.14)$$

Геометрически $F_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ (7.14) означает вероятность попадания случайной точки с координатами (X_1, X_2) в бесконечный квадрант (рис. 7.2) на плоскости $X_1 \circ X_2$, расположенный ниже и левее вершины с координатами (x_1, x_2) . Существенно то, что указанный квадрант не включает правые граничные значения составляющих вектора (7.11).

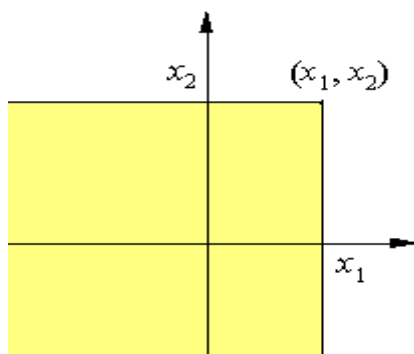


Рис. 7.2. Геометрическая интерпретация двумерной функции распределения

Функция распределения векторной случайной величины имеет ряд свойств, обобщающих ранее рассмотренные свойства одномерной функции распределения (см. главу 4). Приведем свойства функции распределения векторной случайной величины для случая $n = 2$.

7.2.1. Свойства двумерной функции распределения

1. Значения $F_{X_1X_2}(x_1, x_2)$ удовлетворяет двойному неравенству:

$$0 \leq F_{X_1X_2}(x_1, x_2) \leq 1. \quad (7.15)$$

Выражение (7.15) следует из определения функции распределения как вероятности.

2. Функция распределения $F_{X_1X_2}(x_1, x_2)$ — неубывающая функция каждого из аргументов:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } a > x_1, \quad F_{X_1X_2}(a, x_2) &\geq F_{X_1X_2}(x_1, x_2); \\ \text{при } b > x_2, \quad F_{X_1X_2}(x_1, b) &\geq F_{X_1X_2}(x_1, x_2); \\ \text{при } a > x_1; b > x_2, F_{X_1X_2}(a, b) &\geq F_{X_1X_2}(x_1, x_2). \end{aligned} \right\} \quad (7.16)$$

Доказательства выражений (7.16) очевидны, если обратиться к геометрической интерпретацией функции распределения (см. рис. 7.2). Сдвигая вправо границу квадранта до значения $X_1 = a$, получаем новый квадрант, вероятность попадания случайной точки в который не может уменьшиться. Аналогично можно убедиться в неубывании вероятности попадания случайной точки в новые квадранты при расширении границы $X_2 = b$ или при увеличении значений двух аргументов $F_{X_1X_2}(x_1, x_2)$.

3. Имеют место следующие предельные соотношения:

$$F_{X_1X_2}(-\infty, x_2) = F_{X_1X_2}(x_1, -\infty) = F_{X_1X_2}(-\infty, -\infty) = 0; \quad (7.17)$$

$$\left. \begin{aligned} F_{X_1X_2}(x_1, \infty) &= P(X_1 < x_1) = F_{X_1}(x_1) \\ F_{X_1X_2}(\infty, x_2) &= P(X_2 < x_2) = F_{X_2}(x_2) \end{aligned} \right\}; \quad (7.18)$$

$$F_{X_1X_2}(\infty, \infty) = 1. \quad (7.19)$$

Выражение (7.17) утверждает, что если хоть один из аргументов стремится к $(-\infty)$, то функция распределения $F_{X_1X_2}(x_1, x_2)$ равна 0. Убедиться в справедливости этого свойства функции распределения можно, рассмотрев ее геометрическую интерпретацию и опираясь на определение (7.13).

Поскольку событие $(X_1 < -\infty)$ — невозможное, то невозможным будет и пересечение событий $(X_1 < -\infty)$ и $(X_2 < x_2)$. Вероятность невозможного события равна нулю, поэтому $F_{X_1X_2}(-\infty, x_2) = 0$. Аналогично доказываются и другие составляющие равенства (7.17).

Выражение (7.18) свидетельствует о том, что если хотя бы один из аргументов $F_{X_1X_2}(x_1, x_2)$ стремится к бесконечности, то в результате получаем одномерную функцию распределения другого аргумента. Действительно, поскольку событие например, $(X_1 < \infty)$ — достоверное, то пересечение (совместное наступление) событий $(X_1 < \infty)$ и $(X_2 < x_2)$ есть событие $(X_2 < x_2)$, поэтому $F_{X_1X_2}(\infty, x_2) = P(X_2 < x_2) = F_{X_2}(x_2)$.

Пересечение двух достоверных событий дает также достоверное событие, вероятность появления которого равна единице, что подтверждает справедливость свойства (7.19).

Рассмотренные свойства (7.15)—(7.19) обобщаются на случай $n > 2$. При этом свойства (7.15)—(7.17), (7.19) остаются справедливыми для многомерных функций распределения, а свойства (7.18) формулируются так.

При равенстве бесконечности одного из аргументов многомерной функции ($n > 2$) распределения «мерность» распределения уменьшается на единицу. Так, например, для $n = 3$:

$$F_{X_1 X_2 X_3}(x_1, x_2, \infty) = F_{X_1 X_2}(x_1, x_2); F_{X_1 X_2 X_3}(x_1, \infty, x_3) = F_{X_1 X_3}(x_1, x_3). \quad (7.20)$$

В более общей трактовке можно сказать, что размерность функции распределения понижается на число ее аргументов, равных бесконечности:

$$F_{X_1 X_2 X_3}(x_1, \infty, \infty) = F_{X_1}(x_1); F_{X_1, X_2, X_3}(\infty, x_2, \infty) = F_{X_2}(x_2). \quad (7.21)$$

С использованием понятия функции распределения векторной случайной величины могут быть решены многие прикладные задачи анализа многомерных распределений, например, задачи определения вероятности доставки летательным аппаратом груза в заданную область, задачи стрельбы по целям и проч. Рассмотрим простой пример.

Пример 7.2. Определить вероятность попадания случайной точки в области: а) $b \leq X_1 < a; X_2 < x_2$; б) $X_1 < x_1; d \leq X_2 < c$; в) $b \leq X_1 < a; d \leq X_2 < c$.

□ Решение. Заданные зоны представлены на рис. 7.3.

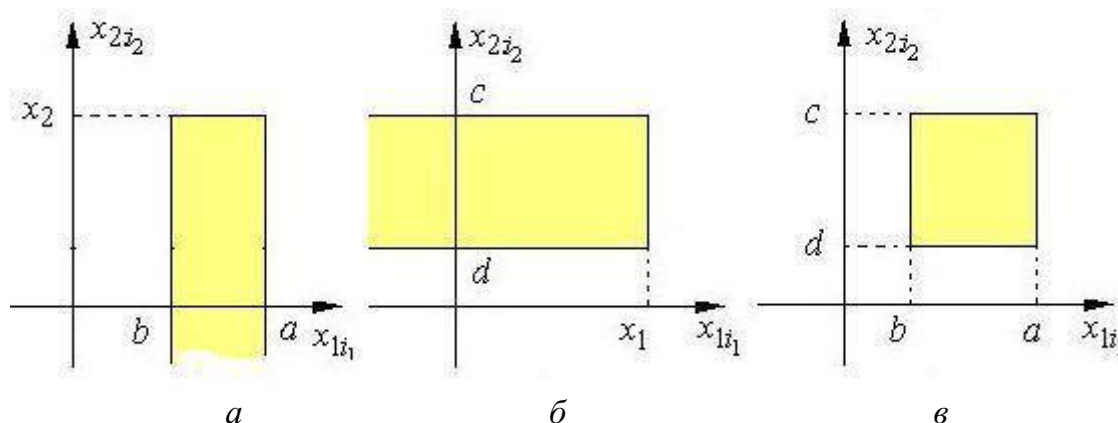


Рис. 7.3. Области определения случайной точки (пример 7.2)

Полуполоса (а) может быть получена вычитанием квадранта с вершинами (b, x_2) из квадранта с вершинами (a, x_2) (см. рис. 7.3, а). Поэтому

$$P(b \leq X_1 < a; X_2 < x_2) = F_{X_1 X_2}(a, x_2) - F_{X_1 X_2}(b, x_2).$$

Аналогично, для полуполосы (б):

$$P(X_1 < x_1; d \leq X_2 < c) = F_{X_1 X_2}(x_1, c) - F_{X_1 X_2}(x_1, d).$$

Прямоугольник (см. рис. 7.3, в) получим вычитанием из полуполосы $b \leq X_1 < a$; $X_2 < c$ полуполосы $b \leq X_1 < a$; $X_2 < d$: $P(b \leq X_1 < a; d \leq X_2 < c) = F_{X_1 X_2}(a, c) - F_{X_1 X_2}(b, c) - [F_{X_1 X_2}(a, d) - F_{X_1 X_2}(b, d)]$. ■

7.3. Непрерывные случайные векторы. Плотность вероятностей векторной случайной величины

Непрерывным случайным вектором называют вектор (7.11), элементы которого X_j ($j = \overline{1, n}$) — непрерывные случайные величины.

Пусть непрерывный $(n \times 1)$ -вектор $\mathbf{X}$ имеет функцию распределения $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ (7.13), которая также непрерывна и имеет непрерывные частные производные n -го порядка. Аналогично скалярной случайной величине ($n = 1$), функция распределения которой служит исчерпывающей характеристикой (см. разд. 4.3), n -мерная функция распределения $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ также максимально полно характеризует случайный вектор. Как и в скалярном случае, задание непрерывной векторной случайной величины осуществляется также и с помощью плотности вероятности, которая в этом случае ($n > 1$) становится многомерной.

Плотностью распределения векторной случайной величины (7.11) называют смешанную частную производную n -го порядка от n -мерной функции распределения $F(\mathbf{x})$ (7.13) по всем элементам случайного вектора:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \cdot \partial x_2 \cdot \dots \cdot \partial x_n}. \quad (7.22)$$

Плотность распределения скалярной случайной величины геометрически соответствовала плоской кривой (см., например, рис. 4.2). Многомерную плотность распределения (7.22) как функцию n аргументов, можно представить поверхностью в n -мерном пространстве. В дальнейшем мы достаточно часто будем обращаться к одномерному распределению как к частному случаю многомерного распределения, подчеркивая формальную аналогию ряда параметров и определений, характерных для скалярной и векторной случайной величины. Так, аналогией (7.22) для скалярной случайной величины служит выражение (4.13). Функция распределения для скалярной случайной величины и ее плотность вероятностей связаны соотношением (4.6).

В многомерном случае функция распределения (7.13) и плотность распределения (7.22) связаны соотношением вида:

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = F_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \dots \int_{-\infty}^{x_1} f_{\mathbf{X}}(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n. \quad (7.23)$$

В силу ранее данного определения многомерной функции распределения выражение (7.23) определяет вероятность попадания случайной точки в

некоторый n -мерный объем. Используя примененный ранее прием, обратимся к двумерному непрерывному случайному вектору и рассмотрим свойства его распределения. Ряд из этих свойств обобщим на многомерный случай.

Двумерная плотность вероятности, согласно (7.22), по определению равна:

$$f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F_{X_1 X_2}(x_1, x_2)}{\partial x_1 \cdot \partial x_2}. \quad (7.24)$$

Аналогично элементу вероятности, введенному в главе 4 для случая скалярной случайной величины, который определяет вероятность попадания случайной величины на участок dx , прилегающий к точке x , введем понятие элемента вероятности для двумерного случайного вектора.

Пусть (x_1, x_2) — случайная точка с координатами x_1 и x_2 , а dx_1 и dx_2 — элементарные отклонения. Тогда, **элементом вероятности** в рассматриваемом случае ($n = 2$) будем называть произведение

$$f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (7.25)$$

которое соответствуют вероятности попадания случайной точки в элементарный прямоугольник $dx_1 dx_2$.

В одномерном случае элемент вероятности $f(x)dx$ равен площади прямоугольника, опирающегося на элементарный отрезок dx , непосредственно примыкающий к точке x и ограниченный сверху кривой $f(x)$ (см. главу 4).

В рассматриваемом двумерном случае элемент вероятности (7.25) численно равен объему параллелепипеда, опирающегося на элементарный прямоугольник $dx_1 dx_2$ и ограниченный сверху поверхностью $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$. Суммируя (интегрируя) элементы вероятностей (7.25) по некоторой произвольной области S , можно получить вероятность попадания случайной точки в эту область:

$$P[(x_1, x_2) < s] = \iint_S f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (7.26)$$

Формула (7.26) справедлива для произвольной области. Применяя эту формулу к рассмотренному ранее примеру 7.2, можно получить выражения для вероятностей попадания в полуполосы и прямоугольник (см. рис. 7.3), выраженные через двумерную плотность вероятностей:

$$\text{случай } a: \quad \int_{-\infty}^{x_2} \int_b^a f_{X_1 X_2}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 ;$$

$$\text{случай } b: \quad \int_d^c \int_{-\infty}^{x_1} f_{X_1 X_2}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 ;$$

$$\text{случай } c: \quad \int_d^c \int_b^a f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 .$$

Воспользуемся формулой (7.26) для получения двумерной функции распределения $F_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$.

Как отмечалось, функция $F_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$ есть вероятность попадания в бесконечный квадрант, ограниченный справа и сверху значениями x_1 и x_2 . Поэтому функция распределения $F_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$, согласно (7.23), равна

$$F_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_2} \int_{-\infty}^{x_1} f_{X_1 X_2}(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \quad (7.27)$$

Выражение (7.27), связывающее функцию распределения с плотностью вероятности двумерного случайного вектора, представляет частный случай соотношения (7.23). Соотношения (7.22)—(7.27) позволяют установить свойства многомерной плотности распределения вероятностей и получить новую интерпретацию свойств многомерных функций распределения.

Для рассматриваемого двумерного случая к свойствам (7.24), (7.27), (7.26) можно добавить еще несколько очевидных соотношений:

$$f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) \geq 0; \quad (7.28)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1; \quad (7.29)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) dx_2 = f(x_1); \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) dx_1 = f(x_2) \quad (7.30)$$

Свойство (7.28) неотрицательности плотности двумерной плотности (7.24) следует из того, что, как было показано ранее (см. выражения (7.16)), функция распределения $F_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$ — неубывающая функция своих аргументов. Аналогичное свойство справедливо для произвольной размерности ($n > 2$) случайного вектора:

$$f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \geq 0. \quad (7.31)$$

Выражение (7.29) определяет вероятность попадания случайной точки в неограниченную область, т.е. — вероятность достоверного события, равная единице. Это свойство непосредственно вытекает из (7.19) и справедливо для случайного вектора (7.1) произвольной размерности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1. \quad (7.32)$$

Выражение (7.32) приведено в предположении, что области определения составляющих случайного вектора бесконечны. Как и ранее, в частных случаях, когда области определения элементов случайного вектора конечны, кратный интеграл по всей ограниченной области определения $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ также будет равен единице как вероятность достоверного события. При этом бесконечные пределы интегрирования по каждой составляющей заменяются границами ее диапазона изменения.

Свойства (7.30) позволяют однократным интегрированием двумерной плотности вероятностей по одному из ее аргументов в бесконечных пределах получить одномерную плотность вероятности другого аргумента. Эти свойства следуют из рассмотренных ранее свойств (7.18) функций распределения двумерного вектора. Покажем это.

▷ Поскольку, в силу (7.27), $\int_{-\infty}^{x_2} \int_{-\infty}^{x_1} f_{X_1 X_2}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = F_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$, то

функцию распределения $F(x_1)$ первого элемента вектора (7.1) можно выразить с использованием выражения $F(x_1) = F(x_1, \infty)$ (7.18) как

$$F_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} \int_{-\infty}^{x_1} f_{X_1 X_2}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1 X_2}(t_1, t_2) dt_2. \quad (7.33)$$

Но функция распределения $F(x_1)$ первого элемента вектора (7.1) равна

$F_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f_{X_1}(t_1) dt_1$, поэтому из (7.33) следует:

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) dx_2. \quad (7.34)$$

Аналогично доказывается и выражение для $f_{X_2}(x_2)$ свойства (7.30).

Другим способом свойство (7.30) можно доказать, используя дифференцирование выражения (7.33) по x_1 . Действительно, в силу (4.13), для $f_{X_1}(x_1)$ имеем: $f_{X_1}(x_1) = dF_{X_1}(x_1)/dx_1$, поэтому, дифференцируя обе части равенства (7.33) по x_1 , получаем (7.34). ◀

При задании некоторой замкнутой области определения составляющих случайного вектора бесконечные пределы в выражениях (7.30) заменяются границами диапазона изменения их значений. Так, например, при задании двумерной плотности распределения в области $b \leq x_1 \leq a$; $d \leq x_2 \leq c$ (вне этой области, плотность распределения предполагается равной нулю) выражения (7.30) примут вид:

$$f_{X_1}(x_1) = \int_d^c f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) dx_2; \quad f_{X_2}(x_2) = \int_b^a f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) dx_1. \quad (7.35)$$

Свойства (7.28)—(7.35), рассмотренные для двумерного случайного вектора, распространяются и на общий случай $n > 2$. Так, однократное интегрирование n -мерной плотности распределения по одному из аргументов в диапазоне его определения дает в результате $(n - 1)$ -мерную плотность распределения остальных составляющих n -мерного случайного вектора:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 = f(x_2, x_3, \dots, x_n). \quad (7.36)$$

Таким образом, для получения одномерной плотности распределения какой-либо составляющей в многомерном случае необходимо осуществить

$(n - 1)$ -кратное интегрирование n -мерной плотности по всем остальным составляющим в пределах их определения.

Например:

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1 \dots x_n) dx_2 dx_3 \dots dx_n. \quad (7.37)$$

Из изложенного следует, что, в общем случае каждое однократное интегрирование многомерной плотности распределения по одной из составляющей n -мерного вектора в пределах ее определения снижает «мерность» плотности на единицу.

Рассмотрим типовой пример.

Пример 7.3. Задана плотность распределения двумерного случайного вектора:

$$f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} C(x_1^2 + x_2), & 0 \leq x_1 \leq 1; -5 \leq x_2 \leq 5; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Требуется найти значение параметра C и плотность распределения составляющей x_2 .

□ Решение. Замкнутая область D определения составляющих двумерного вектора задана неравенствами: $0 \leq x_1 \leq 1$; $-5 \leq x_2 \leq 5$.

В силу свойства (7.29) двумерных плотностей распределения, двойной интеграл от $f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$ по области D в рассматриваемом случае представляет собой вероятность достоверного события, поскольку вне этой области возможных значений x_1 и x_2 нет. Поэтому

$$\iint_D C \cdot (x_1^2 + x_2) dx_1 dx_2 = 1.$$

Конкретизируя пределы интегрирования для заданной области D , после несложных выкладок получаем: $10C/3 = 1$, откуда $C = 0.3$. Фрагмент mcd-файла с вычислением двойного интеграла приведен ниже.

$$\int_{-5}^5 \int_0^1 C \cdot (x_1^2 + x_2) dx_1 dx_2 \rightarrow \frac{10}{3} \cdot C \quad \boxed{C = 0.3}$$

Отсюда следует, что внутри области D $f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = 0.3(x_1^2 + x_2)$. Плотность распределения составляющей x_2 , согласно (7.35), равна:

$$\int_0^1 0.3 \cdot (x_1^2 + x_2) dx_1 \text{ float } ,3 \rightarrow .100 + .300 \cdot x_2$$

Таким образом, искомая плотность распределения $f_{X_2}(x_2) = 0.1 + 0.3 x_2$. Плотность распределения x_1 в этом примере может быть получена аналогично:

$f_{X_1}(x_1) = 3(x_1)^2$. Легко убедиться в том, что найденные плотности $f_{X_1}(x_1)$ и $f_{X_2}(x_2)$ удовлетворяют основному свойству плотностей распределений. При вычислениях в Mathcad использованы операторы символьных вычислений. ■

7.4. Числовые характеристики ВСВ. Зависимость и независимость случайных величин

В главе 4 были введены числовые характеристики скалярных случайных величин, использующие понятия начальных и центральных моментов соответствующих порядков. Эти же числовые характеристики могут быть использованы для описания отдельных составляющих случайного вектора. При этом можно говорить об определенном обобщении введенных ранее числовых характеристик в векторном случае. Ниже будет показано, что математическое ожидание случайной величины переходит для случайного вектора в вектор математических ожиданий, дисперсия — в матрицу вторых центральных моментов или ковариационную матрицу. Однако переход от скалярных случайных величин к векторным сопровождается не только отмеченным увеличением совокупности одноименных числовых характеристик распределений. Появляются дополнительные параметры, устанавливающие степень взаимообусловленности (взаимосвязи, взаимозависимости) отдельных элементов случайного вектора, так называемые корреляционные моменты и коэффициенты корреляции. Как и ранее, все числовые характеристики векторных случайных величин — не случайны.

Более детально числовые характеристики векторных случайных величин (ВСВ) рассматриваются в следующих разделах. Здесь дадим лишь определение моментов распределения первого и второго порядков векторных случайных величин, которые наиболее широко используются в практике анализа многомерных распределений, и рассмотрим понятия зависимости и независимости случайных величин — элементов случайного вектора.

Аналогично скалярному случаю, применительно к векторной случайной величине различают начальный и центральный моменты

$$\mathbf{X} = |X_1, X_2, \dots, X_n|^T. \quad (7.38)$$

Пусть $\mathbf{x}$ — произвольный $(n \times 1)$ -вектор.

Начальным моментом первого порядка для n -мерной векторной случайной величины (7.38) называют n -мерный вектор $M(\mathbf{X}) = \mathbf{m}_x$, удовлетворяющий соотношениям

$$M(\mathbf{X}) = \mathbf{m}_x = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x} f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n; \quad (7.39)$$

$$M(\mathbf{X}) = \mathbf{m}_x = \sum_{i_1} \dots \sum_{i_n} \mathbf{x} p(x_1, \dots, x_n); \quad (7.40)$$

для непрерывного и дискретного случайных векторов соответственно. Здесь и далее предполагается, что все интегралы и суммы существуют и сходятся абсолютно, поэтому порядок интегрирования (суммирования) можно менять без изменения результата.

Моменты (7.39) и (7.40) называются **математическим ожиданием** непрерывного и дискретного случайных векторов.

Так же, как и для случайной величины, при определении центральных моментов вектора (7.38) используется операция центрирования (см. разд. 4.6).

Центрированным случайным вектором называют вектор

$$\mathbf{X}^0 = \mathbf{X} - \mathbf{m}_x. \quad (7.41)$$

Аналогично (7.39), (7.40), вводится центральный момент первого порядка для n -мерной векторной случайной величины (7.41), т. е. математическое ожидание вектора (7.41):

$$M(\mathbf{X}^0) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}^0 f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n; \quad \mathbf{x}^0 = \mathbf{x} - \mathbf{m}_x;$$

$$M(\mathbf{X}^0) = \sum_{i_1} \dots \sum_{i_n} \mathbf{x}^0 p(x_1, \dots, x_n).$$

В разд. 7.5 будет показано, что, аналогично скалярному случаю, центральный момент первого порядка для n -мерной векторной случайной величины равен нулю (нулевому вектору).

Матрицей начальных моментов второго порядка случайного вектора $\mathbf{X}$ (7.38) называют математическое ожидание произведения векторов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{X}^T$:

$$\mathbf{P}_H = M[\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^T], \quad (7.42)$$

где надстрочный символ T обозначает операцию транспонирования.

Матрицей центральных моментов второго порядка случайного вектора $\mathbf{X}$ (7.38) называют матрицу, образованную математическим ожиданием произведения центрированных случайных векторов (7.41):

$$\mathbf{P} = M\left[\mathbf{X}^0 (\mathbf{X}^0)^T\right] = M\left[(\mathbf{X} - \mathbf{m}_x)(\mathbf{X} - \mathbf{m}_x)^T\right]. \quad (7.43)$$

Матрица $\mathbf{P}$ носит название **ковариационной матрицы**. Нетрудно видеть, что матрицы (7.42) и (7.43) — квадратные, порядка n .

При анализе взаимного влияния элементов двух случайных векторов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ также могут быть введены выражения для начальных и центральных моментов второго порядка. Однако для этого предварительно определим функцию и плотность их совместного распределения.

Пусть $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ — $(n \times 1)$ - и $(m \times 1)$ -непрерывные случайные векторы, $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — произвольные векторы размерностью $(n \times 1)$ и $(m \times 1)$.

Совместной функцией распределения $F_{XY}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ векторов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ называется вероятность совместного появления событий $(X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n; Y_1 < y_1, \dots, Y_m < y_m)$

$$F_{XY}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = P(X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n; Y_1 < y_1, \dots, Y_m < y_m). \quad (7.44^*)$$

Совместная плотность распределения векторов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ определяется как:

$$f_{XY}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_{XY}(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m) = \frac{\partial^{n+m} F_{XY}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_1 \dots \partial x_n \partial y_1 \dots \partial y_m}. \quad (7.44^{**})$$

Матрицы начальных и центральных смешанных моментов векторов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, определяющие степень взаимозависимости элементов этих векторов между собой, имеют размерность $(n \times m)$ и равны:

$$\mathbf{K}_H(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{xy}^T f_{XY}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} = M(\mathbf{XY}^T), \quad (7.44)$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = M \left[\mathbf{X}^0 (\mathbf{Y}^0)^T \right], \quad \mathbf{X}^0 = \mathbf{X} - \mathbf{m}_X, \quad \mathbf{Y}^0 = \mathbf{Y} - \mathbf{m}_Y. \quad (7.45)$$

Матрица (7.45) носит название **взаимной ковариационной матрицы** случайных векторов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$. В (7.44), как и ранее (см., например, (7.22)) введены упрощающие обозначения

$$f_{XY}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_{X_1 \dots X_n Y_1 \dots Y_m}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m); \quad d\mathbf{x} = dx_1 \dots dx_n; \quad d\mathbf{y} = dy_1 \dots dy_m.$$

Интеграл в выражении (7.44) — $(n + m)$ -кратный. Свойства моментов (7.39)—(7.45) рассматриваются в *разд. 7.5* и *7.6*.

Для совокупности случайных величин, составляющих случайный вектор (7.38), существенны такие понятия как взаимообусловленность, зависимость, степень зависимости или независимости. Рассматривая, например, пару случайных величин в процессе проведения испытаний, можно в одном случае, зная значение одной из случайных величин, достаточно точно предсказать значение другой. В другом случае взаимообусловленность может быть менее сильной, при которой предсказать значения одной случайной величины по значению другой практически невозможно. Количественная характеристика степени взаимной обусловленности случайных величин будет дана в *разд. 7.6*.

При отсутствии связи между случайными величинами говорят о их независимости. Полностью понятия степени взаимозависимости, взаимообусловленности будут раскрыты ниже, при обсуждении свойств моментов (7.42)—(7.45) второго порядка. Здесь дадим лишь базовое определение независимости случайных величин. Это определение опирается на понятие независимости в совокупности, рассмотренное ранее (см. *разд. 2.2*).

Случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ называют (взаимно) **независимыми**, если независимы в совокупности события $X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n$, т. е.

$$P[(X_1 < x_1) \cdot (X_2 < x_2) \dots (X_n < x_n)] = P(X_1 < x_1) P(X_2 < x_2) \dots P(X_n < x_n) \quad (7.46)$$

для произвольного набора действительных чисел $(x_1, \dots, x_n)$.

Необходимые и достаточные условия независимости случайных величин определяются следующей теоремой.

Теорема 7.1. Для независимости случайных величин $X_1, \dots, X_n$ необходимо и достаточно, чтобы функция распределения $F_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n)$ была равна произведению функций распределения отдельных случайных величин:

$$F_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdot F_2(x_2) \cdot \dots \cdot F_n(x_n). \quad (7.47)$$

▷ Доказательство.

а) *Необходимость.* Пусть случайные величины $X_1, \dots, X_n$ — независимы. Тогда события $X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n$ независимы в совокупности и вероятность их совместного появления, в силу (2.15), равна произведению их вероятностей:

$$P(X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n) = P(X_1 < x_1) \cdot P(X_2 < x_2) \cdot \dots \cdot P(X_n < x_n)$$

или, в соответствии с определениями функций распределения (7.13) и (4.6),

$$F_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdot F_2(x_2) \cdot \dots \cdot F_n(x_n).$$

б) *Достаточность.* Пусть справедливо выражение (7.47). Тогда вероятность совмещения событий $X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n$ равна произведению вероятностей отдельных событий $X_i < x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), т.е. справедливо соотношение (7.46). Следовательно, в силу определения независимости случайных величин, случайные величины $X_1, \dots, X_n$ — независимы. ◀

Из приведенных определений вытекает ряд следствий.

Следствие 1. Для независимости непрерывных случайных величин $X_1, \dots, X_n$ необходимо и достаточно, чтобы их совместная плотность распределения была равна произведению плотностей распределения отдельных случайных величин:

$$f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \dots \cdot f_n(x_n). \quad (7.48)$$

Доказательство необходимости и достаточности выражения (7.48) следует из выражений (7.22) и (7.23). Так, дифференцируя (7.47) по $x_1, \dots, x_n$ поочередно, получаем (7.48) (необходимость). Интегрируя (7.48) по $x_1, \dots, x_n$ в пределах от $-\infty$ до x_i ($i = 1, 2, \dots, n$), получаем (7.47) (достаточность).

Следствие 2. Для независимости дискретных случайных величин $X_1, \dots, X_n$ необходимо и достаточно, чтобы вероятность совместного появления событий $X_i = x_i$ ($i = 1, n$) была равна произведению вероятностей каждого из событий в отдельности:

$$P[(X_1 = x_1) \cdot (X_2 = x_2) \cdot \dots \cdot (X_n = x_n)] = P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2) \cdot \dots \cdot P(X_n = x_n). \quad (7.49)$$

Доказательство следствия 2 проводится аналогично доказательству теоремы о необходимости и достаточности условий независимости случайных величин.

Анализ необходимых и достаточных условий независимости случайных величин позволяет дать и другие определения независимости, опираясь на выражения (7.47), (7.48) и (7.49). Приведем их.

1. Случайные величины $X_1, \dots, X_n$ называются независимыми, если функция их совместного распределения равна произведению функций распределения каждой из случайных величин:

$$F_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdot F_2(x_2) \cdot \dots \cdot F_n(x_n).$$

2. Непрерывные случайные величины $X_1, \dots, X_n$ называются независимыми, если плотность их совместного распределения равна произведению плотностей распределения каждой из случайных величин:

$$f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \dots \cdot f_n(x_n).$$

3. Дискретные случайные величины $X_1, \dots, X_n$ называются независимыми, если вероятность совместного появления событий $X_i = x_i$ ($i = \overline{1, n}$) равна произведению вероятностей каждого из событий $X_i = x_i$ в отдельности:

$$P[(X_1 = x_1) \cdot (X_2 = x_2) \cdot \dots \cdot (X_n = x_n)] = P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2) \cdot \dots \cdot P(X_n = x_n).$$

4. Случайные величины $X_1, \dots, X_n$ называются независимыми, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какие значения принимают другие.

Понятия независимости скалярных величин, введенные выше, могут быть распространены и на векторный случай.

Случайные векторы $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ будем называть **независимыми**, если функция их совместного распределения равна произведению функций распределения каждого из векторов в отдельности:

$$F_{\mathbf{XY}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})F_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}), \quad (7.50)$$

где $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ и $F_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$ — функции распределения (7.13) векторов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$.

Определение (7.50) справедливо для непрерывных и дискретных ВСВ.

Для непрерывных случайных векторов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ определение независимости может быть дано так же и на основе плотности совместного их распределения $f_{\mathbf{XY}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, введенной выше.

Непрерывные случайные векторы $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ называются независимыми, если плотность их совместного распределения $f_{\mathbf{XY}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ равна произведению плотностей распределения каждого из векторов в отдельности:

$$f_{\mathbf{XY}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}). \quad (7.51)$$

Здесь $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ и $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$ — плотности распределения (7.22) векторов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$.

Определения (7.50), (7.51) могут быть распространены на произвольное число случайных векторов.

Ниже, в разд. 7.6, будет показано, что для вектора $\mathbf{X}$, состоящего из независимых элементов (см. условия (7.47), (7.48)), ковариационная матрица $\mathbf{P}$ — диагональная. Там же показано, что для случайных векторов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, удовлетворяющих условиям независимости (7.50), (7.51), взаимная ковариационная матрица $\mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ (7.45) — нулевая матрица.

7.5. Математическое ожидание векторной случайной величины

Рассмотрим свойства математического ожидания векторной случайной величины (ВСВ). Они касаются структуры вектора математического ожидания ВСВ, а также основных операций с ним.

Теорема 7.2. Математическое ожидание векторной случайной величины $\mathbf{X}$ есть неслучайный вектор, состоящий из математических ожиданий ее отдельных составляющих.

$$M(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} M(X_1) \\ \vdots \\ M(X_n) \end{pmatrix} = \mathbf{m}_X = \begin{pmatrix} m_{x1} \\ \vdots \\ m_{xn} \end{pmatrix}. \quad (7.52)$$

▷ Доказательство. Проведем доказательство для непрерывного случайного вектора (7.38). По определению (7.39) математическое ожидание непрерывного случайного вектора есть вектор, каждый элемент которого есть n -кратный интеграл в бесконечных пределах от произведения соответствующего элемента вектора на n -мерную плотность распределения. Так, для первого элемента вектора $M(\mathbf{X})$ имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n.$$

В правой части полученного выражения имеем $(n - 1)$ -кратный интеграл от n -мерной плотности распределения по составляющим $x_2, x_3, \dots, x_n$. В силу свойства (7.37) n -мерной плотности распределения, такой интеграл дает в результате плотность распределения $f_1(x_1)$ первой составляющей вектора, откуда

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1 dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_{X_1}(x_1) dx_1 = M(X_1) = m_{x1}.$$

Таким образом, первый элемент вектора $M(\mathbf{X})$ — математическое ожидание составляющей X_1 случайного вектора. Аналогично показывается, что и остальные элементы вектора $M(\mathbf{X})$ — математические ожидания соответствующих составляющих случайного вектора. Для дискретной векторной случайной величины доказательство аналогично. Здесь, как и ранее, предполагается, что все интегралы и суммы существуют и сходятся абсолютно, поэтому порядок интегрирования (суммирования) можно менять без изменения результата. ◀

Среди числовых характеристик ВСВ есть такие, в которых оператор математического ожидания применяется к случайным матрицам (см., например, (7.42)—(7.45)). Для этого может быть рассмотрено следствие теоремы 7.2.

Следствие. Математическое ожидание случайной матрицы есть матрица, каждый ij -ый элемент которой — математическое ожидание элемента a_{ij} матрицы $\mathbf{A}$ ($i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}$).

$$M(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} M(a_{11}) & \dots & M(a_{1m}) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ M(a_{n1}) & \dots & M(a_{nm}) \end{vmatrix}. \quad (7.53)$$

Доказательство этого следствия аналогично приведенному доказательству теоремы о математическом ожидании векторной случайной величины.

Математическое ожидание ВСВ имеет ряд практических важных свойств, которые в определенной мере обобщают свойства (4.21) случайной величины.

7.5.1. Свойства математического ожидания ВСВ

Рассмотрим основные свойства математического ожидания случайного вектора, имея в виду, что эти свойства будут справедливы и для случайных матриц. Это расширение очевидно и, как правило, не будет отдельно оговариваться ниже.

1. Если $\mathbf{A}$ — неслучайная матрица (в частном случае — вектор), то

$$M(\mathbf{A}) = \mathbf{A}. \quad (7.54)$$

2. Если $\mathbf{A}$ — неслучайная матрица, $\mathbf{X}$ — случайный вектор (матрица), и размерности $\mathbf{A}$ и $\mathbf{X}$ согласованы, то

$$M(\mathbf{AX}) = \mathbf{A}M(\mathbf{X}); M[(\mathbf{AX})^T] = M(\mathbf{X}^T \mathbf{A}^T) = M(\mathbf{X}^T) \mathbf{A}^T. \quad (7.55)$$

3. Если $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ — случайные векторы (матрицы), то

$$M(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = M(\mathbf{X}) + M(\mathbf{Y}). \quad (7.56)$$

4. Если $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ — неслучайные матрицы, $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ — случайные векторы (матрицы) согласованной размерности, то

$$M(\mathbf{AX} + \mathbf{BY}) = \mathbf{A}M(\mathbf{X}) + \mathbf{B}M(\mathbf{Y}). \quad (7.57)$$

5. Математическое ожидание произведения произвольного числа независимых случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ равно произведению их математических ожиданий

$$M(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \dots \cdot M(X_n). \quad (7.58)$$

Первые четыре свойства просто доказываются путем прямой подстановки соответствующих выражений в формулы (7.39) и (7.40) для математического ожидания векторной случайной величины. Свойство (7.54) утверждает, что математическое ожидание от неслучайного вектора (матрицы) равно самому вектору (матрице). Второе свойство показывает, что неслучайные элементы любого выражения могут быть вынесены за пределы оператора математического ожидания влево или вправо, в соответствии с правилами линейной алгебры. Свойства (7.56) и (7.57) устанавливают правила применения операции математического ожидания к линейным формам случайных векторов (матриц). В справедливости свойства (7.58) можно убедиться, применяя определения (7.39), (7.40) к произведению независимых случайных величин, которые удов-

летворяют соотношениям (7.48) и (7.49). Так, для непрерывных независимых случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ имеем:

$$\begin{aligned} M[X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n] &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_{X_1}(x_1) dx_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_{X_2}(x_2) dx_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_n f_{X_n}(x_n) dx_n = M[X_1] \cdot \dots \cdot M[X_n]. \end{aligned} \quad (7.59)$$

Аналогично доказывается справедливость (7.58) и для дискретных случайных векторов.

Из основных свойств математического ожидания случайного вектора непосредственно следует, что математическое ожидание центрированного вектора (7.41) равно нулю:

$$M[\mathbf{X}^0] = M[\mathbf{X} - \mathbf{m}_X] = M[\mathbf{X}] - \mathbf{m}_X = 0. \quad (7.60)$$

7.6. Вторые моменты ВСВ. Коэффициент корреляции. Ковариационные и корреляционные матрицы

Так же, как и для скалярного случая, вторые моменты векторных случайных величин подразделяются на начальные и центральные. Начальные моменты образуются операциями над случайными векторами $\mathbf{X}$ (7.35); центральные моменты используют центрированные векторы $\mathbf{X}^0$ (7.41).

В разд. 7.4 были введены матрицы (7.42)—(7.45) вторых начальных и центральных моментов, среди которых наибольший практический интерес вызывают ковариационные $\mathbf{P}$ (7.43) и взаимно ковариационные $\mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ (7.45) матрицы. Рассмотрим более подробно матрицы вторых начальных и центральных моментов, их структурные особенности и вероятностный смысл отдельных элементов.

Матрицы вторых начальных моментов $\mathbf{P}_H$ и ковариационная матрица $\mathbf{P}$ векторной случайной величины:

$$\mathbf{P}_H = M[\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^T]; \mathbf{P} = M[\mathbf{X}^0 (\mathbf{X}^0)^T]; \mathbf{P}_H = \mathbf{P}_H^T; \mathbf{P} = \mathbf{P}^T \quad (7.61)$$

имеют одинаковую структуру: они — квадратные и симметричные.

Элементами матрицы $\mathbf{P}_H$ служат вторые начальные моменты составляющих случайного вектора: $P_{Hii} = M(X_i^2)$; $P_{Hij} = M(X_i X_j)$.

При этом **вторые начальные моменты** P_{Hii} элементов случайного вектора расположены на главной диагонали. Недиагональные элементы P_{Hij} матрицы $\mathbf{P}_H$ называют **смешанными начальными моментами**.

Весьма большое значение в прикладном анализе вероятностных характеристик векторных случайных величин имеет ковариационная матрица

$\mathbf{P} = M \left[\mathbf{X}^0 (\mathbf{X}^0)^T \right]$ (7.61), которая содержит вторые центральные моменты: дисперсии P_{ii} , расположенные на ее главной диагонали

$$P_{ii} = M \left[(X_i - m_i)^2 \right] \quad (7.62)$$

и смешанные центральные моменты — недиагональные элементы $\mathbf{P}$

$$P_{ij} = M \left[(X_i - m_i)(X_j - m_j) \right]. \quad (7.63)$$

Матрица $\mathbf{P}$ часто обозначается как

$$\text{cov}(\mathbf{X}) = \mathbf{P} = M \left[(\mathbf{X} - \mathbf{m}_X)(\mathbf{X} - \mathbf{m}_X)^T \right]. \quad (7.64)$$

Обозначение $\text{cov}(\mathbf{X})$ читается как «ковариационная матрица случайного вектора $\mathbf{X}$ ». Определитель ковариационной матрицы $\text{Det}(\mathbf{P})$ называется **обобщенной дисперсией** случайного вектора $\mathbf{X}$; квадратный корень $\sqrt{\text{Det}(\mathbf{P})}$ из определителя ковариационной матрицы носит название **обобщенного коэффициента разброса**.

Центральные смешанные моменты (7.63) — недиагональные элементы матрицы $\mathbf{P}$ — определяют степень взаимосвязи i -го и j -го элементов случайного вектора $\mathbf{X}$. Эти моменты обычно имеют особое обозначение

$$K_{ij} = M \left[(X_i - m_{xi})(X_j - m_{xj}) \right] \quad (7.65)$$

и называются **корреляционными моментами** случайных величин X_i и X_j .

Таким образом, структура матрицы $\mathbf{P}$ включает дисперсии составляющих случайного вектора на диагонали и корреляционные моменты на недиагональных позициях:

$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{12} & \sigma_2^2 & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{1n} & K_{2n} & \dots & \sigma_n^2 \end{vmatrix}. \quad (7.66)$$

Симметричность матрицы $\mathbf{P}$ означает, что она содержит $n(n+1)/2$ различных элементов: n дисперсий и $n(n-1)/2$ корреляционных моментов.

Установим связь между матрицами $\mathbf{P}_H$ и $\mathbf{P}$ (7.61). Легко показать, что

$$\mathbf{P}_H = \mathbf{P} + \mathbf{m}_X \mathbf{m}_X^T. \quad (7.67)$$

Действительно, на основании (7.42), (7.43) (7.54)—(7.57) имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_H &= M \left[(\mathbf{X}^0 + \mathbf{m}_X)(\mathbf{X}^0 + \mathbf{m}_X)^T \right] = M \left[\mathbf{X}^0 (\mathbf{X}^0)^T \right] + M \left[\mathbf{X}^0 \mathbf{m}_X^T \right] + M \left[\mathbf{m}_X (\mathbf{X}^0)^T \right] + \\ &+ M \left[\mathbf{m}_X \mathbf{m}_X^T \right] = M \left[\mathbf{X}^0 (\mathbf{X}^0)^T \right] + M \left(\mathbf{X}^0 \right) \mathbf{m}_X^T + \mathbf{m}_X M \left(\mathbf{X}^0 \right)^T + \mathbf{m}_X \mathbf{m}_X^T, \end{aligned}$$

откуда, учитывая, что математическое ожидание (7.60) центрированного вектора равно нулевому вектору, получаем соотношение (7.67).

Таким образом, матрица вторых начальных моментов $\mathbf{P}_H$ равна ковариационной матрице плюс внешнее произведение векторов математического ожидания случайного вектора $\mathbf{X}$.

Из выражения (7.67) следует, что вторые начальные моменты P_{Hii} и вторые смешанные начальные моменты P_{Hij} элементов вектора $\mathbf{X}$ могут быть найдены как сумма соответствующего центрального момента и произведений математических ожиданий:

$$P_{Hii} = M(X_i^2) = P_{ii} + m_i^2 = \sigma_i^2 + m_{xi}^2; \quad (7.68)$$

$$P_{Hij} = M(X_i X_j) = K_{ij} + m_{xi} m_{xj}, \quad (7.69)$$

где σ_i^2 — дисперсия i -го элемента вектора $\mathbf{X}$; K_{ij} — корреляционный момент случайных величин X_i и X_j (i -го и j -го элементов вектора $\mathbf{X}$); m_{xi} , m_{xj} — математические ожидания i -го и j -го элементов вектора $\mathbf{X}$; $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$.

Соотношение (7.68) было получено ранее, в разд. 4.5, при анализе теоретических моментов распределений (см. выражение (4.41)).

Рассмотрим теперь матрицы (7.44) $\mathbf{K}_H(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = M[\mathbf{X} \mathbf{Y}^T]$ начальных смешанных моментов и взаимно ковариационные матрицы (7.45) $\mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = M[\mathbf{X}^0 (\mathbf{Y}^0)^T]$ случайных векторов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$. Они образованы математическими ожиданиями от произведения случайного вектора $\mathbf{X}$ на случайную вектор-строку $\mathbf{Y}^T$, имеют схожие структуры и, в общем случае, прямоугольные. Элементами этих матриц служат:

$$\begin{aligned} K(X, Y)_{Hii} &= M[X_i \cdot Y_i]; \quad K(X, Y)_{Hij} = M[X_i \cdot Y_j]; \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}; \\ K(X, Y)_{ii} &= M[(X_i - m_i)(Y_i - m_i)]; \quad K(X, Y)_{ij} = M[(X_i - m_i)(Y_j - m_j)]. \end{aligned} \quad (7.70)$$

Элементы взаимной ковариационной матрицы $\mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ (7.45) — вторые смешанные центральные моменты случайных величин X_i и Y_j соответственно, т. е. корреляционные моменты случайных величин X_i и Y_j .

Легко убедиться в справедливости следующих свойств матриц (7.44) и (7.45):

$$\mathbf{K}_H(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = [\mathbf{K}_H(\mathbf{Y}, \mathbf{X})]^T; \quad \mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = [\mathbf{K}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})]^T. \quad (7.71)$$

Используя прием, принятый при выводе (7.67), можно показать что матрицы (7.44) и (7.45) начальных и центральных смешанных моментов связаны соотношением, аналогичным выражению (7.67):

$$\mathbf{K}_H(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \mathbf{m}_X \mathbf{m}_Y^T. \quad (7.72)$$

Полученное выражение означает, что, аналогично (7.68) и (7.69), для смешанных начальных и корреляционных моментов составляющих случайных векторов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ можно записать:

$$K(X, Y)_{Hii} = M[X_i \cdot Y_i] = K(X, Y)_{ii} + m_{xi} m_{yi};$$

$$K(X, Y)_{Hij} = M[X_i \cdot Y_j] = K(X, Y)_{ij} + m_{xi} m_{yj},$$

где корреляционные моменты $K(X, Y)_{ii}$ и $K(X, Y)_{ij}$ определяются выражениями (7.70); m_{xi} , m_{yi} , m_{yj} — математические ожидания элементов векторов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$. Доказательство этих свойств предоставляем выполнить читателю.

Корреляционные моменты служат предметом исследования во многих прикладных вероятностных задачах. К ним относятся, например, задачи оценки взаимного влияния случайных величин, регрессионного анализа, построения математических моделей наблюдаемых процессов и проч. Ввиду важности места, которое занимают корреляционные моменты в теории вероятностей и математической статистике, рассмотрим этот класс моментов многомерных распределений несколько более подробно. При этом остановимся лишь на корреляционных моментах (7.65), которые входят в состав ковариационной матрицы $\mathbf{P}$ (7.66) и определяют степень взаимообусловленности различных составляющих случайного вектора $\mathbf{X}$. Это не ведет к потере общности, поскольку другие корреляционные моменты, например, входящие в состав взаимной ковариационной матрицы (7.45), отличаются от корреляционных моментов (7.65) лишь тем, что устанавливают связь между элементами случайных векторов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$. Поэтому все выводы, которые будут сделаны относительно свойств моментов (7.65), будут в полной мере справедливы и для других корреляционных моментов.

Корреляционный момент

$$K_{ij} = M(X_i^0 X_j^0); i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n}, \quad (7.73)$$

где $X_i^0 = X_i - m_{xi}$ — i -ый элемент центрированного вектора (7.41), имеет размерность, равную произведению размерностей случайных величин X_i и X_j . Если первая, например, представляет напряжение в вольтах, а вторая — ток в амперах, то K_{ij} будет иметь размерность вольт-ампер. Но напряжение можно измерять в милливольт-амперах или в киловольт-амперах, ток — в миллиамперах, килоамперах. Поэтому K_{ij} будет иметь различные размерности в зависимости от того, в каких единицах измеряются составляющие вектора $\mathbf{X}$. Это затрудняет сравнение степени связи различных пар случайных величин, входящих в состав случайных векторов. Поэтому на практике обычно вводят безразмерную числовую характеристику степени связи — коэффициент корреляции.

Коэффициентом корреляции случайных величин X_i и X_j называют отношение корреляционного момента к произведению средних квадратических отклонений этих случайных величин:

$$r_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}, \quad (7.74)$$

где σ_i и σ_j — средние квадратические отклонения случайных величин X_i и X_j (квадратные корни из соответствующих диагональных элементов ковариационной матрицы (7.66)).

Основные свойства корреляционных моментов и коэффициентов корреляции устанавливают следующие две теоремы и их следствия.

Теорема 7.3. Корреляционные моменты попарно независимых случайных величин, составляющих случайный вектор, равны нулю.

▷ Доказательство. Пусть $\mathbf{X}$ — $(n \times 1)$ -случайный вектор. Поскольку его элементы X_i и X_j ($i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$) — независимы, то независимы и их центрированные значения X_i^0 и X_j^0 . Математические ожидания случайных величин X_i^0 и X_j^0 равны нулю (7.60). Согласно свойству (7.58), математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий. Отсюда следует утверждение теоремы:

$$K_{ij} = M(X_i^0 X_j^0) = M(X_i^0)M(X_j^0) = 0. \blacktriangleleft \quad (7.75)$$

Следствие 1. Коэффициенты корреляции независимых случайных величин равны нулю:

$$r_{ij} = 0. \quad (7.76)$$

Следствие 2. Ковариационная матрица $\mathbf{P}$ (7.64), (7.66) случайного вектора $\mathbf{X}$, элементы которого — независимые случайные величины, — диагональная.

Доказательства следствий 1 и 2 непосредственно вытекают из выражений (7.74), (7.75), (7.66).

Теорема 7.4. Абсолютная величина корреляционного момента K_{ij} случайных величин X_i и X_j ($i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$) не превышает произведения их средних квадратических отклонений:

$$|K_{ij}| \leq \sigma_i \sigma_j. \quad (7.77)$$

▷ Доказательство. Рассмотрим вспомогательную величину $z_1 = \sigma_j x_i - \sigma_i x_j$ и определим ее дисперсию:

$$\sigma_{z_1}^2 = M[(z_1 - m_{z_1})^2] = M[(\sigma_j X_i^0 - \sigma_i X_j^0)^2] = 2\sigma_i^2 \sigma_j^2 - 2\sigma_i \sigma_j K_{ij}.$$

Для новой вспомогательной величины $z_2 = \sigma_j x_i + \sigma_i x_j$ аналогичными преобразованиями получим:

$$\sigma_{z_2}^2 = M[(z_2 - m_{z_2})^2] = M[(\sigma_j X_i^0 + \sigma_i X_j^0)^2] = 2\sigma_i^2 \sigma_j^2 + 2\sigma_i \sigma_j K_{ij}.$$

Ввиду не отрицательности дисперсий из последних соотношений следуют два очевидных неравенства: $K_{ij} \leq \sigma_i \sigma_j$ и $K_{ij} \geq -\sigma_i \sigma_j$. Объединяя эти неравенства двусторонним неравенством $-\sigma_i \sigma_j \leq K_{ij} \leq \sigma_i \sigma_j$, окончательно получаем $|K_{ij}| \leq \sigma_i \sigma_j$. ◀

Следствие. Абсолютная величина коэффициента корреляции r_{ij} случайных величин X_i и X_j ($i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$) не превышает единицы:

$$|r_{ij}| \leq 1. \quad (7.78)$$

Утверждение (7.78) непосредственно следует из (7.77) и (7.74).

Таким образом, коэффициент корреляции (7.74), в силу безразмерности, позволяет осуществлять сопоставление степени взаимосвязи различных пар случайных величин и в результате соответствующего анализа приобретает значение в диапазоне от (-1) до $(+1)$. При этом, если $1 > r_{ij} > 0$, говорят о положительной корреляции между случайными величинами X_i и X_j ; при $-1 < r_{ij} < 0$ — об отрицательной корреляции.

Предельные значения $|r_{ij}| = 1$ соответствуют линейной связи между случайными величинами X_i и X_j (a и b — не случайные):

$$X_j = a X_i + b, \quad (7.79)$$

Ниже (см. пример 7.4) это свойство коэффициента корреляции подтверждается аналитически. В выражении (7.79) a и b — неслучайные коэффициенты, причем при $a > 0$, значение $r_{ij} = 1$; при $a < 0$, $r_{ij} = -1$. Это означает, что совокупность точек в координатах (X_i, X_j) располагается на соответствующих линиях.

При постепенном отдалении значений r_{ij} от граничных совокупность точек постепенно рассеивается, группируясь вокруг соответствующих линий. При положительной корреляции возрастание случайной величины X_i сопровождается возрастанием в среднем величины X_j и наоборот. При отрицательной корреляции возрастание случайной величины X_i сопровождается убыванием в среднем величины X_j и наоборот. При $r_{ij} = 0$ говорят о некоррелированности случайных величин X_i и X_j . Рисунок 7.4 содержат результаты решения в среде Mathcad несложных примеров, иллюстрирующих отмеченные свойства коэффициента корреляции.

На рис. 7.4, a представлены варианты линейной связи случайных величин X_1 и X_2 . Множество значений случайной величины X_1 содержит 15 чисел, полученных от генератора нормально распределенных чисел с помощью встроенной функции **rnorm**. Параметры нормального распределения были приняты следующими: математическое ожидание $\nu_1 = 0$, среднее квадратическое откло-

нение $\sigma_1 = 1$. Параметр a линейной связи (7.79) имел значение $a = 2$ ($r = 1$, левый график рис. 7.4, а) и $a = -2$ ($r = -1$, правый график рис. 7.4, а).

Из приведенных результатов хорошо видно, что точки в координатах (X_1, X_2) располагаются точно на соответствующих линиях, представленных на графиках. Рассматривая другие варианты исходных данных, в частности, увеличение значения σ_1 , можно наблюдать соответствующее увеличение разброса точек вдоль линий относительно выбранного математического ожидания.

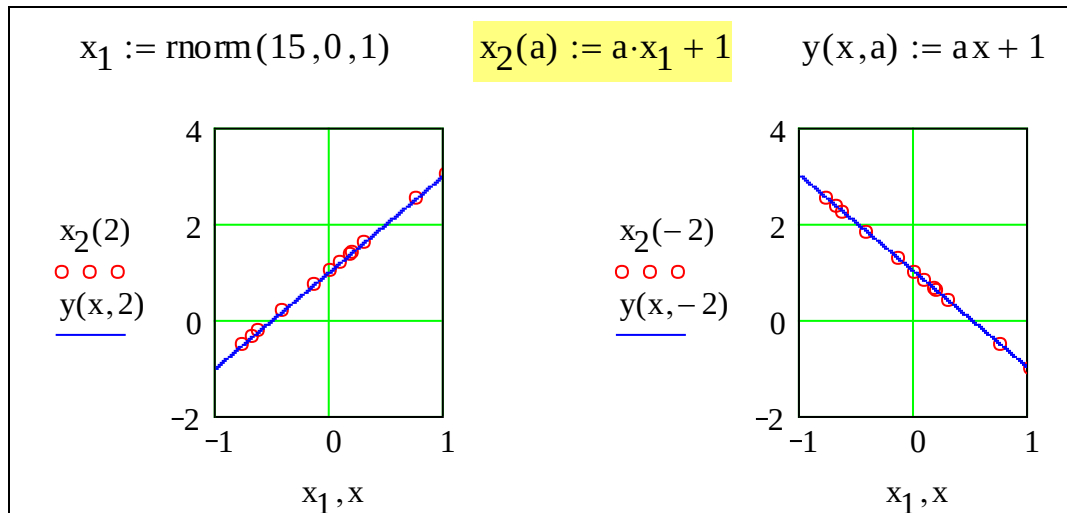


Рис. 7.4, а. Линейная связь случайных величин ($|r| = 1$)

На рис. 7.4, б приведены примеры формирования соответствующих множеств точек для случаев положительной ($1 > r > 0$, левый график рис. 7.4, б) и отрицательной ($-1 < r < 0$, правый график рис. 7.4, б) корреляции случайных величин.

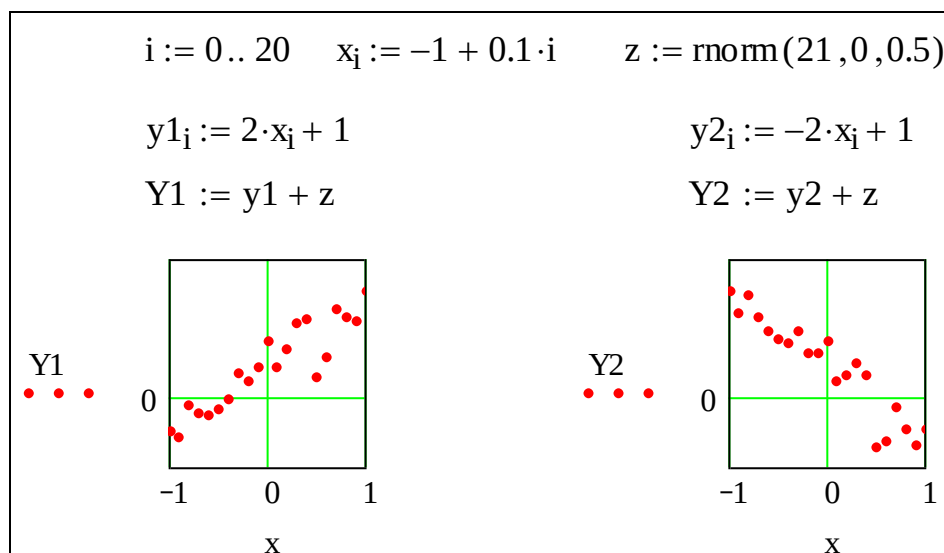


Рис. 7.4, б. Положительная и отрицательная корреляционные связи

С этой целью был сформирован (21×1) -вектор $\mathbf{z}$ нормально распределенных чисел с параметрами $\nu_1 = 0$, $\sigma_1 = 0.5$. Значения элементов этого вектора добавлялись к (21×1) -вектору $\mathbf{y1}$, элементы которого рассчитывались по уравнению прямой линии (7.79) с параметрами $a = 2$ и $a = -2$; элементы вектора $\mathbf{x}$ изменялись в диапазоне ± 1 . Другие варианты имитации корреляционных связей могут быть получены при использовании других исходных данных в этой простой программной структуре.

Вариант некоррелированности ($r = 0$) случайных величин Z_1 и Z_2 (см. рис. 7.4, в) имитирован получением (50×1) -векторов $\mathbf{z1}$ и $\mathbf{z2}$ от датчика нормально распределенных чисел с параметрами, указанными в аргументах встроенных функций **rnorm** (см. рис. 7.4, в).

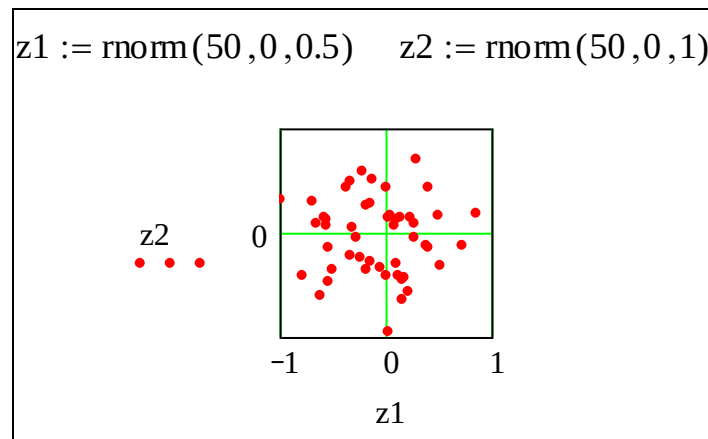


Рис. 7.4, в. Нулевая корреляционная связь

Остановливаясь на термине «некоррелированность», можно утверждать, что независимые случайные величины, в силу (7.75), (7.76), некоррелированы. Однако обратное утверждение, в общем случае, неверно. Из некоррелированности ($r = 0$) случайных величин не всегда следует их независимость. Также следует отметить, что из коррелированности ($r \neq 0$) всегда следует зависимость случайных величин. Но из факта зависимости случайных величин нельзя делать априорный вывод об их коррелированности. В этом можно убедиться на примерах, рассмотренных ниже.

Пример 7.4. Доказать, что при линейной зависимости случайных величин X_i и X_j : $X_j = aX_i + b$ (a и b — неслучайные коэффициенты), коэффициент корреляции удовлетворяет равенству $|r_{ij}| = 1$.

□ Решение. Определим корреляционный момент K_{ij} (7.65) случайных величин X_i и X_j для заданной их линейной связи:

$$\begin{aligned} K_{ij} &= M[(X_i - m_{xi})(X_j - m_{xj})] = M[(X_i - m_{xi})(aX_i + b - am_{xi} - b)] = \\ &= aM[(X_i - m_{xi})^2] = a\sigma_i^2. \end{aligned}$$

Здесь σ_i^2 — дисперсия X_i . Для определения коэффициента корреляции случайных величин X_i и X_j найдем дисперсию X_j :

$$\sigma_j^2 = M[(aX_i + b - am_{x_i} - b)^2] = a^2 \sigma_i^2.$$

Таким образом, $\sigma_j = |a| \sigma_i$, и коэффициент корреляции (7.74) в данном случае приобретает вид:

$$r_{ij} = \frac{a \sigma_i^2}{|a| \sigma_i^2} = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} +1, & a > 0; \\ -1, & a < 0. \end{cases}$$

Полученный результат подтверждает справедливость ранее высказанного утверждения, что при линейной связи (7.79) между случайными величинами X_i и X_j коэффициент корреляции удовлетворяет равенству $|r_{ij}| = 1$ ■

Пример 7.5. Пусть двумерный случайный вектор $\mathbf{X}$ с элементами X_1 и X_2 задан плотностью распределения вида:

$$f(x_1, x_2) = 1/4\pi \text{ внутри круга } x_1^2 + x_2^2 = 4;$$

$$f(x_1, x_2) = 0 \text{ вне этого круга.}$$

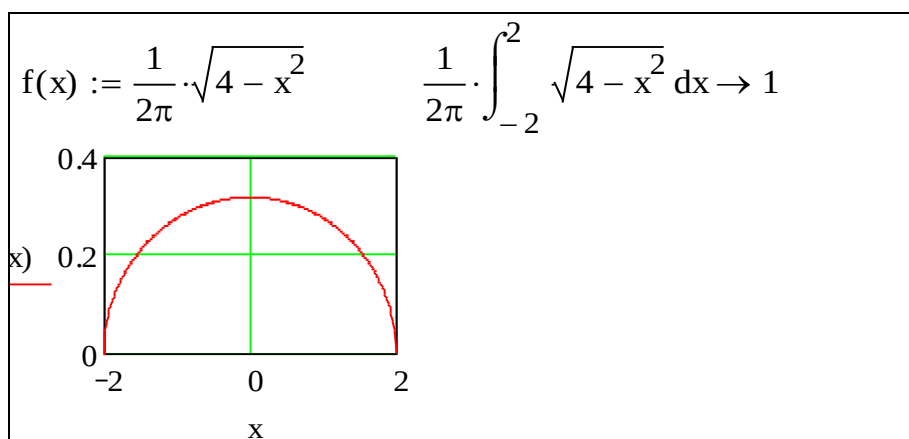
Показать, что случайные величины X_1 и X_2 — некоррелированные, но зависимые.

□ Решение. С помощью выражений (7.30) найдем одномерные плотности распределения составляющих вектора $\mathbf{X}$:

$$f_1(x_1) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\sqrt{4-x_1^2}}^{\sqrt{4-x_1^2}} dx_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\sqrt{4-x_1^2}} dx_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x_1^2}.$$

Аналогично получим плотность распределения и другой составляющей. Таким образом, плотности распределения составляющих имеют вид:

$$f_1(x_1) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x_1^2}, & |x_1| < 2; \\ 0, & |x_1| \geq 2. \end{cases} \quad f_2(x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x_2^2}, & |x_2| < 2; \\ 0, & |x_2| \geq 2. \end{cases}$$



Выше приведена форма плотностей распределения составляющих вектора $\mathbf{X}$ и результат проверки свойств $f_1(x_1)$, $f_2(x_2)$, полученные в Mathcad.

Сопоставляя заданную двумерную плотность с произведением полученных одномерных плотностей, убеждаемся, что $f(x_1, x_2) \neq f(x_1) f(x_2)$, откуда следует, что случайные величины X_1 и X_2 — зависимые.

Вычислим теперь корреляционный момент (7.65) случайных величин X_1 и X_2 . Учитывая симметрию плотностей распределения, математические ожидания этих величин равны нулю. Поэтому для (7.65) в данном случае, с учетом (7.39) и (7.59), имеем: $K_{12} = M(X_1 X_2) =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{-\sqrt{4-x_1^2}}^{\sqrt{4-x_1^2}} x_2 \left(\int_{-\sqrt{4-x_2^2}}^{\sqrt{4-x_2^2}} x_1 dx_1 \right) dx_2 = 0.$$

Отсюда следует, что зависимые X_1 и X_2 примера — некоррелированные. ■

7.6.1. Линейные преобразования ВСВ

В прикладных задачах анализа свойств векторных случайных величин (ВСВ) часто приходится вычислять дисперсии и корреляционные моменты (коэффициенты корреляции) линейных форм случайного вектора. Математические ожидания линейных форм могут быть определены на основе свойств (7.54)—(7.57). Получим теперь выражение для ковариационной матрицы линейной формы случайного вектора $\mathbf{X}$, которое позволит рассмотреть частные случаи, важные с практической точки зрения.

Пусть $(m \times 1)$ -вектор $\mathbf{Y}$ связан с n -мерным случайным вектором $\mathbf{X}$ линейным соотношением вида:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}, \quad (7.80)$$

где: $\mathbf{b}$ — $(m \times 1)$ -нечслучайный вектор, $\mathbf{A}$ — $(m \times n)$ -нечслучайная матрица.

Пусть также заданы ковариационная матрица $\text{cov}(\mathbf{X}) = \mathbf{P}$ (7.64), (7.66) и математическое ожидание $\mathbf{m}_X$ вектора $\mathbf{X}$. Требуется определить $\mathbf{P}_Y = \text{cov}(\mathbf{Y})$.

По определению (7.64), ковариационная матрица для вектора $\mathbf{Y}$ равна:

$$\text{cov}(\mathbf{Y}) = \mathbf{P}_Y = M[(\mathbf{Y} - \mathbf{m}_Y)(\mathbf{Y} - \mathbf{m}_Y)^T] = M[\mathbf{Y}^0 (\mathbf{Y}^0)^T].$$

В силу свойств (7.54)—(7.57), вектор $\mathbf{m}_Y$ математических ожиданий для вектора $\mathbf{Y}$ и центрированный вектор $\mathbf{Y}^0$ удовлетворяют соотношениям: $\mathbf{m}_Y = \mathbf{A} \mathbf{m}_X + \mathbf{b}$; $\mathbf{Y}^0 = \mathbf{A} \mathbf{X}^0$, поэтому искомая ковариационная матрица $\mathbf{P}_Y$ равна:

$$\mathbf{P}_Y = M[\mathbf{A} \mathbf{X}^0 (\mathbf{A} \mathbf{X}^0)^T] = \mathbf{A} M[\mathbf{X}^0 (\mathbf{X}^0)^T] \mathbf{A}^T = \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{A}^T. \quad (7.81)$$

Заметим, что полученный результат не зависит от неслучайного вектора $\mathbf{b}$, поэтому соотношение (7.81) остается в силе для произвольного вектора $\mathbf{b}$, в том числе — нулевого.

Выражение (7.81) имеет характерную симметричную структуру, которая отражает связь симметричной ковариационной матрицы с произведением случайного вектора и неслучайной матрицы. Это простое выражение позволяет, тем не менее, решать множество практических задач по определению вторых центральных моментов вектора, который линейно связан с исходным случайным вектором. Так, в случае, когда $m = 1$, матрица $\mathbf{A}$ превращается в строку. Если элементами этой строки служат единицы, то выражение (7.81) удобно использовать для получения общего выражения дисперсии суммы случайных величин (элементов случайного вектора $\mathbf{X}$). Найдем это выражение.

Обозначая сумму элементов вектора $\mathbf{X}$ через z , выразим ее в форме произведения векторов:

$$z = \sum_i X_i = \mathbf{h}\mathbf{X}; \quad \mathbf{h} = |11\dots 1|.$$

Пусть, как и ранее, ковариационная матрица $\text{cov}(\mathbf{X}) = \mathbf{P}$. Тогда дисперсия суммы z случайных величин, составляющих вектор $\mathbf{X}$, на основании (7.81), будет равна:

$$\sigma_z^2 = M[(z - m_z)^2] = \mathbf{h}\mathbf{P}\mathbf{h}^T; \quad m_z = \mathbf{h}\mathbf{m}_x. \quad (7.82)$$

Поскольку матрица $\mathbf{P}$ содержит данные о степени взаимосвязи отдельных случайных величин X_i между собой, выражение (7.82) позволяет определять дисперсии суммы X_i при любой степени связи последних. Так, при независимости составляющих X_i и X_j ($i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$) вектора $\mathbf{X}$ ($K_{ij} = 0$) ковариационная матрица $\mathbf{P}$ — диагональная (см. следствие 2 теоремы 7.3), и выражение (7.82) дает известную формулу (4.30) сложения дисперсий:

$$\sigma_z^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2; \quad (K_{ij} = 0). \quad (7.83)$$

При $K_{ij} \neq 0$ из (7.82) следует:

$$\sigma_z^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + 2 \sum_{i < j} K_{ij}; \quad (K_{ij} \neq 0). \quad (7.84)$$

Полученное выражение позволяет вычислить дисперсию суммы случайных величин, объединенных в вектор $\mathbf{X}$, в общем случае, когда ковариационная матрица $\mathbf{P}$ вектора $\mathbf{X}$ имеет вид (7.66).

Простота формулы (7.81) для получения ковариационной матрицы линейной формы вектора $\mathbf{X}$ определяет ее широкое использование в практике анализа числовых характеристик векторных случайных величин. Выражение (7.81) особенно удобно для получения числовых или символьных результатов с помощью программных систем компьютерной математики (СКМ), которые позволяют реализовать широкий набор операций линейной алгебры. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 7.6. Определить дисперсию разности элементов двумерного случайного вектора, ковариационная матрица которого имеет вид (7.66).

□ **Решение.** Исходные данные позволяют непосредственно применить формулу (7.81). Для заданных условий примера: $n = 2$; $m = 1$; $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix}^T$; $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$ — вектор-строка; $\mathbf{b}$ — нулевой вектор.

Обозначая искомую дисперсию через d , приведем фрагмент файла системы Mathcad, содержащий решение рассматриваемого примера:

$$\mathbf{A} := (1 \quad -1) \quad \mathbf{P} := \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & k_{12} \\ k_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \quad d := \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}^T$$

$d \rightarrow \sigma_1^2 - 2 \cdot k_{12} + \sigma_2^2$

Результирующая дисперсия выделена рамкой. ■

Пример 7.7. Определить дисперсию суммы элементов трехмерного случайного вектора, ковариационная матрица которого имеет вид (7.66).

□ **Решение.** Аналогично примеру 7.6, получим решение в среде Mathcad:

$$\mathbf{A} := (1 \quad 1 \quad 1) \quad \mathbf{P} := \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & \sigma_2^2 & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & \sigma_3^2 \end{pmatrix}$$

$$d := \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}^T$$

$d \rightarrow \sigma_1^2 + 2 \cdot k_{12} + 2 \cdot k_{13} + \sigma_2^2 + 2 \cdot k_{23} + \sigma_3^2$

Результирующая дисперсия также выделена рамкой. ■

В задачах анализа систем различных классов многомерные случайные векторы часто используют для представления (имитации) погрешностей измерений, наблюдений, съема данных, ошибок позиционирования перемещаемых элементов и проч. Так, при анализе измерительных комплексов элементами случайного вектора могут служить погрешности отдельных блоков или подсистем. Применительно к измерительным комплексам часто используется понятие «начальная выставка», под которой понимают предварительное согласование результатов измерений одной (исследуемой) системы с результатами измерений другой (эталонной) системы. В задачах анализа числовых характеристик погрешностей таких систем широко используется выражение (7.81), а «начальная выставка» учитывается в структуре и параметрах ковариационной матрицы $\mathbf{P}$. Рассмотрим конкретный пример.

Пример 7.8. Пусть элементы трехмерного случайного вектора характеризуют погрешности трех измерительных систем. При этом первая и третья из них были предварительно выставлены по внешней эталонной системе. Погрешность второй системы не зависит от погрешностей остальных. Определить дисперсию суммы элементов такого трехмерного случайного вектора при

условии, что дисперсии погрешностей внешней и второй систем равны соответственно σ_6^2 и σ_2^2 .

□ **Решение.** В данном случае также следует применить выражение (7.81), предварительно определив структуру и параметры ковариационной матрицы $\mathbf{P}$ рассматриваемого случайного вектора. Начальная выставка первых двух систем по внешней означает замещение данных измерений этих систем данными внешней системы. Математически это можно отобразить равенством $X_1 = X_3 = X_6$. После такой выставки погрешности первой и третьей систем будут характеризоваться величиной σ_6^2 , т.е. $\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = \sigma_6^2$. Легко убедиться в том, что корреляционный момент K_{13} в этих условиях будет равен σ_6^2 . Это определяет структуру ковариационной матрицы рассматриваемого вектора. Решение в среде Mathcad представлено ниже:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad P := \begin{pmatrix} \sigma_B^2 & 0 & \sigma_B^2 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ \sigma_B^2 & 0 & \sigma_B^2 \end{pmatrix} \quad d := A \cdot P \cdot A^T$$

$d \rightarrow 4 \cdot \sigma_B^2 + \sigma_2^2$

Результирующая дисперсия отмечена рамкой. ■

Общая формула (7.81) позволяет решить множество задач определения числовых значений вторых моментов совокупности случайных величин, объединяемых вектором $\mathbf{Y}$ (7.80). В таких задачах, особенно при больших размерностях векторов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ в (7.80), применение СКМ становится остро необходимым. Простая задача такого типа рассматривается ниже.

Пример 7.9. Определить дисперсии и коэффициент корреляции случайных величин d_1 и d_2 , удовлетворяющих соотношениям:

$$d_1 = 2.3g_1 + 3.1g_2 - 2.7g_3 + 26; \quad d_2 = -0.6g_1 + 1.3g_2 - 0.7g_3 - 17,$$

где g_1, g_2, g_3 — случайные величины с дисперсиями $\sigma_1^2 = 0.81, \sigma_2^2 = 1.44, \sigma_3^2 = 0.09$ и корреляционными моментами $K_{12} = -0.5, K_{13} = 0.2, K_{23} = -0.3$.

□ **Решение.** Объединим случайные величины d_1 и d_2 в вектор $\mathbf{d}$, а g_1, g_2, g_3 — в вектор $\mathbf{g}$. Тогда линейная связь между этими векторами может быть представлена в форме (7.80): $\mathbf{d} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{g}$. Данные о дисперсиях и корреляционных моментах элементов вектора $\mathbf{g}$ используем при формировании ковариационной матрицы $\mathbf{P}_g$. Для получения значений искомых параметров необходимо воспользоваться формулами (7.81) и (7.74). Решение в среде Mathcad представлено ниже:

$$A := \begin{pmatrix} 2.3 & 3.1 & -2.7 \\ -0.6 & 1.3 & -0.7 \end{pmatrix} \quad P_g := \begin{pmatrix} 0.81 & -0.5 & 0.2 \\ -0.5 & 1.44 & -0.3 \\ 0.2 & -0.3 & 0.09 \end{pmatrix}$$

$$P_d := A \cdot P_g \cdot A^T \quad P_d = \begin{pmatrix} 14.187 & 5.997 \\ 5.997 & 4.263 \end{pmatrix}$$

$$r_{12} := \frac{5.997}{\sqrt{14.187 \cdot 4.263}} \quad \boxed{r_{12} = 0.771}$$

Исходные данные вводятся в матрицу A и ковариационную матрицу P_g вектора g . Это позволяет использовать формулу (7.81) для нахождения ковариационной матрицы P_d вектора d . Искомые дисперсии получаем в виде диагональных элементов матрицы P_d , а коэффициент корреляции r_{12} находим по формуле (7.74). ■

Приведенные примеры иллюстрируют простоту и удобство использования выражения (7.81) в сочетании с одной из СКМ в различных задачах анализа вторых центральных моментов линейной формы случайного вектора.

Концепция, основанная на введении ковариационных (7.43) и взаимно ковариационных (7.45) матриц, позволяет унифицировать и упростить решение более сложных задач, в которых аддитивно участвуют несколько случайных векторов. Такую возможность обеспечивает группа формул, которая выводится ниже.

Найдем ковариационную матрицу P_Z вектора Z суммы трех слагаемых

$$Z = AX + BY + C,$$

где X и Y — случайные векторы с математическими ожиданиями m_X , m_Y и ковариационными матрицами P_X , P_Y и взаимно ковариационной матрицей $K(X, Y)$; матрицы A , B и вектор C согласованных размерностей — неслучайные.

Для получения P_Z воспользуемся определением ковариационной матрицы (7.43). Применяя операцию (7.41) центрирования к вектору Z , получим:

$$Z^0 = AX^0 + BY^0; \quad Z^0 = Z - m_Z; \quad m_Z = Am_X + Bm_Y + C.$$

Тогда матрица $P_Z = M[(AX^0 + BY^0)(AX^0 + BY^0)^T]$, после преобразований, будет равна:

$$P_Z = AP_X A^T + BP_Y B^T + AK(X, Y)B^T + BK(X, Y)^T A^T. \quad (7.85)$$

Здесь $K(X, Y)$ — взаимно ковариационная матрица (7.45), определяющая степень взаимосвязи векторов X и Y .

Выражение (7.85) соответствует общему случаю анализа всех вторых центральных моментов суммы линейных форм двух случайных векторов. Это выражение можно использовать для анализа ряда частных случаев.

Так, для выражения $Z_1 = AX - BY + C$, из (7.85) следует:

$$P_{Z_1} = AP_X A^T + BP_Y B^T - AK(X, Y)B^T - BK(X, Y)^T A^T.$$

Рассмотренная ранее (см. комментарии к рис. 7.4) связь независимости и некоррелированности скалярных случайных величин может быть распространена на векторный случай.

Пусть $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ — непрерывные случайные векторы с плотностями $f_X(\mathbf{x})$, $f_Y(\mathbf{y})$ вида (7.22), математическими ожиданиями $\mathbf{m}_X$, $\mathbf{m}_Y$ (7.39), ковариационными матрицами $\mathbf{P}_X$ и $\mathbf{P}_Y$, плотностью совместного распределения (7.44**) $f_{XY}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и матрицами начальных и центральных смешанных моментов $\mathbf{K}_H(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ и $\mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ (7.44), (7.45):

$$\mathbf{K}_H(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = M(\mathbf{XY}^T) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{xy}^T f_{XY}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y},$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = M[\mathbf{X}^0 (\mathbf{Y}^0)^T] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}^0 (\mathbf{y}^0)^T f_{XY}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y}; \quad \mathbf{x}^0 = \mathbf{x} - \mathbf{m}_X; \quad \mathbf{y}^0 = \mathbf{y} - \mathbf{m}_Y;$$

Запишем выражения для этих матриц при независимости векторов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, когда справедливо условие $f_{XY}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_X(\mathbf{x})f_Y(\mathbf{y})$ (7.51).

Выполняя над $\mathbf{K}_H(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ и $\mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ преобразования, формально аналогичные преобразованиям (7.59), осуществленным при доказательстве (7.58), получим:

$$\mathbf{K}_H(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = M[\mathbf{XY}^T] = M(\mathbf{X})M(\mathbf{Y}). \quad (7.86)$$

Применяя полученные выражения для взаимной ковариационной матрицы (7.45) и учитывая, что вектор математического ожидания централизованного случайного вектора (7.60) — нулевой вектор, для независимых $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ получаем:

$$\mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = M[\mathbf{X}^0 (\mathbf{Y}^0)^T] = M(\mathbf{X}^0)M(\mathbf{Y}^0) = \mathbf{0}. \quad (7.87)$$

Таким образом, взаимная ковариационная матрица независимых случайных векторов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ — нулевая матрица, т. е. независимые случайные векторы — некоррелированные. Однако, как отмечалось выше, обратное утверждение, в общем случае, неверно. Некоррелированные случайные векторы могут быть зависимы, т. е. при выполнении (7.87) условия независимости (7.50), (7.51) могут не выполняться.

При учете независимости случайных векторов выражение (7.85) упрощается: $\mathbf{P}_Z = \mathbf{A}\mathbf{P}_X\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{P}_Y\mathbf{B}^T$. Для суммы независимых случайных векторов $\mathbf{Z} = \mathbf{X} \pm \mathbf{Y}$, имеем $\mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ — единичная матрица, а ковариационная матрица суммы по формуле (7.85) равна:

$$\mathbf{P}_{Z2} = \mathbf{P}_X + \mathbf{P}_Y; \quad \mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{0}. \quad (7.88)$$

7.7. Условные законы распределения. Функция регрессии

Ранее, в разд. 2.3, было введено понятие условной вероятности, как вероятности события A при условии, что событие B уже произошло:

$$P(A/B) = P(AB)/P(B). \quad (7.89)$$

Понятие условной вероятности опирается на вероятность совместного появления событий A , B и учитывает фиксацию одного из них. При независимости событий A и B условная вероятность $P(A/B)$ равна безусловной $P(A)$. Эти свойства условной вероятности распространяются и на случайные величины как на количественные отображения случайных событий.

При исследовании случайных величин рассматриваются так называемые *условные законы распределения* одной случайной величины при фиксированном значении другой. Приведем описание этих законов для дискретных и непрерывных случайных векторов.

а) Пусть случайный вектор — **дискретный** и имеет две составляющие: X_1 и X_2 . Возможные значения каждой из составляющих определяются множествами $X_1 = (x_{11}, \dots, x_{1i}, \dots, x_{1k})$; $X_2 = (x_{21}, \dots, x_{2j}, \dots, x_{2m})$. Пусть, для определенности, в результате опыта случайная величина X_2 приняла значение x_{21} . При этом случайная величина X_1 может принять любое значение из диапазона возможных значений: или x_{11} , или x_{12} , ..., или x_{1k} .

Обозначим $p(x_{11}/x_{21})$ условную вероятность того, что, при условии $X_2 = x_{21}$, случайная величина X_1 примет свое первое из возможных значений. Учитывая в общем случае зависимость между X_1 и X_2 , можно утверждать, что условная вероятность $p(x_{11}/x_{21})$ отличается от безусловной $p(x_{11})$. Обозначая условную вероятность других возможных значений случайной величины X_1 при условии $X_2 = x_{21}$, через $p(x_{11}/x_{21})$, получаем условное распределение первого элемента случайного вектора ($i = \overline{1, k}$)

$$p(x_{11}/x_{21}), p(x_{12}/x_{21}), \dots, p(x_{1i}/x_{21}), \dots, p(x_{1k}/x_{21})$$

при условии, что событие $X_2 = x_{21}$ уже произошло.

В общем случае условное распределение составляющих дискретного двумерного случайного вектора может быть составлено с использованием условных вероятностей $p(x_{1i}/x_{2j})$ или $p(x_{2j}/x_{1i})$, которые, согласно (7.89), равны:

$$p(x_{1i}/x_{2j}) = \frac{p(x_{1i} x_{2j})}{p(x_{2j})}; \quad p(x_{2j}/x_{1i}) = \frac{p(x_{2j} x_{1i})}{p(x_{1i})}. \quad (7.90)$$

В случае независимости случайных величин X_1 и X_2 , когда $p(x_{1i} x_{2j}) = p(x_{1i})p(x_{2j})$, условные вероятности (7.90) равны соответствующим безусловным вероятностям $p(x_{1i})$ и $p(x_{2j})$.

Таким образом, условным распределением составляющей X_1 двумерного случайного вектора при условии $X_2 = x_{2j}$ называют совокупность условных вероятностей $p(x_{1i}/x_{2j})$; $i = \overline{1, k}$, найденных в предположении, что случайная величина X_2 приняла значение из совокупности возможных значений x_{2j} при фиксированном значении j . Это означает, что в рамках условного распределе-

ния $p(x_{1i}/x_{2j})$ конкретное j -ое значение составляющей X_2 не меняется для всех возможных значений X_1 . Аналогично определяется и условное распределение составляющей X_2 .

Из (7.90) следует, что двумерное распределение составляющих дискретного случайного вектора может быть получено произведением безусловных вероятностей одной из составляющих на условную вероятность другой из них:

$$p(x_{1i} x_{2j}) = p(x_{1i} / x_{2j}) p(x_{2j}) = p(x_{2j} / x_{1i}) p(x_{1i}).$$

Для условных вероятностей, естественно, сохраняются основные законы теории вероятностей. Так, сумма вероятностей условного распределения равна единице:

$$\left. \sum_{i=1}^k p(x_{1i} / x_{2j}) = \frac{\sum_{i=1}^k p(x_{1i} x_{2j})}{p(x_{2j})} = \frac{p(x_{2j})}{p(x_{2j})} = 1 \right\}, \quad (7.91)$$

поскольку, в силу (7.6), (7.7), суммирование вероятности совместного появления двух событий по одному из них дает вероятность другого события.

Для условного распределения составляющих дискретного случайного вектора используются числовые характеристики, аналогичные характеристикам безусловного распределения. Так, условные математические ожидания случайных величин X_1 и X_2 определяются выражениями вида:

$$\bar{m}_1 = M(X_1 / x_2) = \sum_{i=1}^k x_{1i} p(x_{1i} / x_2); \quad \bar{m}_2 = M(X_2 / x_1) = \sum_{j=1}^m x_{2j} p(x_{2j} / x_1),$$

где x_1 — одно из возможных значений $(x_{11}, \dots, x_{1i}, \dots, x_{1k})$ случайной величины X_1 , а x_2 — одно из возможных значений $(x_{21}, \dots, x_{2j}, \dots, x_{2m})$ случайной величины X_2 .

Учитывая (7.6), (7.7) и (7.90), условные математические ожидания $\bar{m}_1$ и $\bar{m}_2$ могут быть записаны в другой форме:

$$\bar{m}_1 = \frac{\sum_{i=1}^k x_{1i} p(x_2 x_{1i})}{\sum_{i=1}^k p(x_2 x_{1i})}; \quad \bar{m}_2 = \frac{\sum_{j=1}^m x_{2j} p(x_1 x_{2j})}{\sum_{j=1}^m p(x_1 x_{2j})}; \quad i = \overline{1, k}; j = \overline{1, m}. \quad (7.92)$$

Здесь x_1 и x_2 — фиксированные значения X_1 и X_2 из диапазонов их возможных значений.

Характеристиками рассеивания случайных величин X_1 и X_2 вокруг условного математического ожидания служат условные дисперсии

$$\left. \begin{aligned} \sigma_2^2 &= M[(X_2 - \bar{m}_2)^2] = \sum_j (x_{2j} - \bar{m}_2)^2 p(x_{2j}/x_1); \\ \sigma_1^2 &= M[(X_1 - \bar{m}_1)^2] = \sum_i (x_{1i} - \bar{m}_1)^2 p(x_{1i}/x_2). \end{aligned} \right\} \quad (7.93)$$

Эти выражения, аналогично (7.92), могут быть записаны через двумерные распределения. Условные математические ожидания (7.92) и дисперсии (7.93) имеют свойства, подобные рассмотренным ранее (см. разд. 4.5, 4.6) для безусловных распределений.

б) В случае, если случайный вектор — **непрерывный**, вводится понятие условной плотности распределения отдельных составляющих. Для рассматриваемого двумерного вектора с известной плотностью $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ совместного распределения элементов X_1 и X_2 , **условной плотностью** $f_{X_1}(x_1/x_2)$ распределения X_1 при данном значении $X_2 = x_2$ называется отношение

$$f_{X_1}(x_1/x_2) = \frac{f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)} = \frac{f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) dx_1}, \quad (7.94)$$

где $f_{X_2}(x_2)$ — плотность распределения составляющей X_2 .

Условная плотность $f_{X_2}(x_2/x_1)$ распределения случайной величины X_2 при данном значении $X_1 = x_1$ также выражается отношением плотности совместного распределения случайных величин X_1 и X_2 к плотности распределения случайной величины X_1 :

$$f_{X_2}(x_2/x_1) = \frac{f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_1}(x_1)} = \frac{f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) dx_2}. \quad (7.95)$$

Из (7.94) и (7.95) следует, что при независимости X_1 и X_2 условные плотности равны своим безусловным: $f_{X_1}(x_1/x_2) = f_{X_1}(x_1)$, $f_{X_2}(x_2/x_1) = f_{X_2}(x_2)$. С помощью соотношений (7.94), (7.95) может быть определено совместное распределение составляющих, если известна условная плотность распределения одной из них и плотность распределения другой:

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1/x_2) f_{X_2}(x_2) = f_{X_2}(x_2/x_1) f_{X_1}(x_1).$$

Условные плотности распределения обладают всеми характерными свойствами плотностей распределения (см. разд. 4.3), среди которых основными служат:

$$f_{X_1}(x_1/x_2) \geq 0; f_{X_2}(x_2/x_1) \geq 0; \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x_1/x_2) dx_1 = 1; \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_2}(x_2/x_1) dx_2 = 1. \quad (7.96)$$

Также как и в дискретном случае, для условного распределения составляющих непрерывного случайного вектора вводятся условные математические ожидания и условные дисперсии. Для двумерного вектора $\mathbf{X} = (X_1 X_2)^T$ имеем

$$\bar{m}_1 = M(X_1 / x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f(x_1 / x_2) dx_1; \bar{m}_2 = M(X_2 / x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f(x_2 / x_1) dx_2; \quad (7.97)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_2^2 &= M[(X_2 - \bar{m}_2)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x_2 - \bar{m}_2)^2 f_{X_2}(x_2 / x_1) dx_2; \\ \bar{\sigma}_1^2 &= M[(X_1 - \bar{m}_1)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \bar{m}_1)^2 f_{X_1}(x_1 / x_2) dx_1. \end{aligned} \right\} \quad (7.98)$$

Все приведенные выше понятия могут быть обобщены на случай произвольной размерности случайного вектора.

Условные математические ожидания (7.97) и условные дисперсии (7.98) обладают теми же свойствами, которые характерны для безусловных математических ожиданий и дисперсий, рассмотренных в *разд. 4.5, 4.6*. Некоторые из этих свойств устанавливают связь числовых характеристик безусловных распределений случайных величин, составляющих случайный вектор, с условными числовыми характеристиками. Рассмотрим одно из таких свойств, касающееся условного математического ожидания. Это свойство потребуется нам при анализе корреляционных связей во второй части (*см. разд. 6.1, ч. II*).

Пусть двумерный случайный вектор $\mathbf{X}$ задан плотностью $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ совместного распределения элементов X_1 и X_2 , которая, согласно (7.95), может быть представлена в форме: $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = f_{X_2}(x_2 / x_1) f_{X_1}(x_1)$. Учитывая это соотношение, получим выражение для математического ожидания X_2 :

$$M(X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x_1) dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_{X_2}(x_2 / x_1) dx_2.$$

Последний интеграл — условное математическое ожидание $\bar{m}_2$ (7.97), которое зависит от $X_1 = x_1$. Отсюда следует, что $\bar{m}_2$ есть функция от X_1 , поэтому

$$M(X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{m}_2 f_{X_1}(x_1) dx_1 = M(\bar{m}_2) = M[M(X_2 / x_1)]. \quad (7.98^*)$$

Последнее выражение носит название формулы полного математического ожидания. Соотношение, аналогичное (7.98*), можно получить и для составляющих дискретного случайного вектора. Пример применения (7.98*) будет рассмотрен ниже (*см. пример 7.10*).

Условные математические ожидания служат характеристикой центра условного распределения. В этом они схожи с (безусловными) математическими ожиданиями. Однако, как отмечено выше, условные математические ожидания $\bar{m}_1$ и $\bar{m}_2$ — функции возможных значений X_2 и X_1 :

$$\bar{m}_1 = M(X_1 / x_2) = \varphi(x_2); \quad \bar{m}_2 = M(X_2 / x_1) = \psi(x_1). \quad (7.99)$$

Рассмотрим, например, дискретный случай. Двумерное распределение представлено в табл. 7.1 (см. разд. 7.1).

Условное математическое ожидание $M(x_2 / x_{11})$ случайной величины X_2 при $X_1 = x_{11}$, в силу выражения

$$\bar{m}_2 = M(X_2 / x_1) = \sum_{j=1}^m x_{2j} p(x_{2j} / x_1),$$

будет определяться значениями вероятностей, расположенных в первом столбце табл. 7.1. Если значение условия изменится, например, станет $X_1 = x_{12}$, то условное математическое ожидание случайной величины X_2 при этом будет определяться значениями второго столбца табл. 7.1. Таким образом, $M(X_2 / x_1)$ будет зависеть от конкретного значения x_1 случайной величины X_1 , т. е. это условное математическое ожидание — функция x_1 . Аналогично, условное математическое ожидание $M(X_1 / x_2)$ — функция x_2 .

Функции (7.99) называют **функциями регрессии**:

условное математическое ожидание $M(X_2 / x_1)$ — функция регрессии X_2 на X_1 ; условное математическое ожидание $M(X_1 / x_2)$ — функция регрессии X_1 на X_2 .

Эти функции, как отмечалось, описывают зависимость средних значений одной составляющей (например, X_2) при изменении значений другой.

С понятием функций регрессии связано множество задач прикладной теории вероятностей и математической статистики. Задачи определения параметров кривых регрессии широко распространены при обработке результатов испытаний. Эти задачи и способы их решения подробно рассмотрены во второй части книги, посвященной основам математической статистики. Здесь остановимся лишь на простейшей из задач построения приближенной регрессии, что позволит дать представление об используемом подходе и определить роль коэффициента корреляции (7.74) как меры близости зависимости между случайными величинами к линейной.

Пусть двумерный случайный вектор $\mathbf{X} = [X_1, X_2]^T$ имеет в общем случае зависимые составляющие X_1 и X_2 , т. е. коэффициент их корреляции $r \neq 0$. Пусть также в результате наблюдений зафиксированы значения случайной величины X_2 при каждом значении X_1 в данном опыте. Два варианта совокупности точек в координатах (X_1, X_2) для рассматриваемого случая были приведены ранее (см. рис. 7.4, б).

Предположим теперь, что с определенной степенью точности зависимость X_2 от X_1 можно представить уравнением прямой линии:

$$X_2 \approx a_2 X_1 + b_2. \quad (7.100)$$

Среди всех линейных функций (7.100) найдем ту, которая обеспечивала бы минимум среднего значения квадрата разности $[X_2 - (a_2 X_1 + b_2)]$:

$$J_2(a_2, b_2) = M[(X_2 - a_2 X_1 - b_2)^2] \rightarrow \min. \quad (7.101)$$

Осуществляя несложные преобразования с учетом (7.68), (7.69), (7.74) и свойств (4.21) математических ожиданий, запишем критерий (7.101) в форме:

$$J_2(a_2, b_2) = \sigma_2^2 + a_2^2 \sigma_1^2 - 2a_2 r_{12} \sigma_1 \sigma_2 + [m_2 - (a_2 m_1 + b_2)]^2,$$

где r_{12} — коэффициент корреляции (7.71) случайных величины X_1 и X_2 .

Найдем минимум полученного выражения по параметрам a_2 и b_2 . Необходимые условия минимума имеют вид:

$$\frac{\partial J_2(a_2, b_2)}{\partial a_2} = 2[a_2(\sigma_1^2 + m_1^2) + b_2 m_1 - r_{12} \sigma_1 \sigma_2 - m_1 m_2] = 0;$$

$$\frac{\partial J_2(a_2, b_2)}{\partial b_2} = -2[m_2 - a_2 m_1 - b_2] = 0.$$

Отсюда искомые значения $\hat{a}_2$ и $\hat{b}_2$ параметров:

$$\hat{a}_2 = r_{12} \frac{\sigma_2}{\sigma_1}; \quad \hat{b}_2 = m_2 - r_{12} m_1 \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = m_2 - \hat{a}_2 m_1. \quad (7.102)$$

Симметричная (2×2) -матрица, составленная из вторых производных минимизируемой функции (7.101) по элементам искомого вектора в точке (7.102) является положительно определенной (см. прил. 3), т. е. найденные параметры доставляют минимум критерию (7.101).

Таким образом, уравнение линии (7.100) с параметрами (7.102), имеет вид:

$$X_2^* = \hat{a}_2 X_1 + \hat{b}_2 = m_2 + r_{12} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (X_1 - m_1) = m_2 + \hat{a}_2 (X_1 - m_1). \quad (7.103)$$

Эта прямая носит название прямой приближенной регрессии X_2 на X_1 , построенной по методу наименьших квадратов, или — приближенной линейной регрессии X_2 на X_1 . Коэффициент $\hat{a}_2 = r_{12} \sigma_2 / \sigma_1$ определяет наклон прямой (7.103). Нетрудно видеть, что $M(X_2^*) = m_2$.

Для нахождения минимального значения исходного критерия подставим в (7.101) значения параметров (7.102):

$$J(\hat{a}_2, \hat{b}_2) = M[(X_2 - \hat{a}_2 X_1 - \hat{b}_2)^2] = M[(X_2^0 + \hat{a}_2 X_1^0)^2] = \sigma_2^2 (1 - r_{12}^2). \quad (7.104)$$

Выражение (7.104) представляет **остаточную дисперсию** приближенной линейной регрессии X_2 на X_1 , которая характеризует качество полученного приближения. В разд. 7.8 будет показано (см. выражения (7.116)), что для случая, когда вектор $\mathbf{X}$ с элементами X_1 и X_2 имеет двумерное нормальное распределение, остаточная дисперсия (7.104) является условной дисперсией X_2 при условии $X_1 = x_1$.

Из (7.104) следует, что качество приближенной линейной регрессии определяется коэффициентом корреляции r_{12} случайных величин X_1 и X_2 . Чем ближе их зависимость к линейной (функциональной), тем меньше становится остаточная дисперсия (7.104). При $r_{12} = \pm 1$ остаточная дисперсия равна нулю,

поскольку это соответствует линейной функциональной (неслучайной) связи X_1 и X_2 .

Совершенно аналогично могут быть получены параметры приближенной линейной регрессии X_1 на X_2 . Опуская необходимые выкладки, приведем окончательный результат решения этой задачи:

$$X_1^* = \hat{a}_1 X_2 + \hat{b}_1; \hat{a}_1 = r_{12} \frac{\sigma_1}{\sigma_2}; \hat{b}_1 = m_1 - \hat{a}_1 m_2;$$

$$X_1^* = m_1 + \hat{a}_1 (X_2 - m_2). \quad (7.105)$$

Математическое ожидание X_1^* (7.105), как и в предыдущем случае, равно математическому ожиданию случайной величины X_1 , т. е. $M(X_1^*) = m_1$.

Остаточная дисперсия приближенной линейной регрессии (7.105) X_1 на X_2 определяется соотношением:

$$J(\hat{a}_1, \hat{b}_1) = M[(X_1 - \hat{a}_1 X_2 - \hat{b}_1)^2] = M[(X_1^0 + \hat{a}_1 X_2^0)^2] = \sigma_1^2 (1 - r_{12}^2). \quad (7.106)$$

Аналогично отмеченному выше свойству остаточной дисперсии (7.104), для нормально распределенного вектора $\mathbf{X}$ с элементами X_1 и X_2 остаточная дисперсия (7.106) также соответствует условной дисперсии X_1 при условии $X_2 = x_2$ (см. разд. 7.8).

Рассматривая систему из двух уравнений приближенной регрессии (7.103) и (7.105), можно сделать следующие выводы:

1. При $|r_{12}| < 1$ уравнения (7.103) и (7.105) представляют две различные прямые линии на плоскости (X_1, X_2) , которые пересекаются в точке (m_1, m_2) центра совместного распределения случайных величин X_1 и X_2 . В этом легко убедиться, находя решения для X_1 и X_2 из системы двух уравнений (7.103) и (7.105).

2. При $r = 0$, т. е. в случае некоррелированности X_1 и X_2 , прямые (7.103) и (7.105) совпадают с прямыми, параллельными осям координат и проходящими через общую точку (m_1, m_2) : $X_2 = m_2$; $X_1 = m_1$.

3. При $|r| = 1$ прямые (7.103) и (7.105) совпадают.

Пример 7.10. Двумерный дискретный случайный вектор $X^T = |X_1, X_2|$ задан распределением, представленным в табл. 7.2.

Таблица 7.2

$X_1 \backslash X_2$	$x_{11} = 2$	$x_{12} = 5$	$x_{13} = 8$
$x_{21} = 0.4$	$p(1, 1) = 0.15$	$p(2, 1) = 0.3$	$p(3, 1) = 0.35$
$x_{22} = 0.8$	$p(1, 2) = 0.05$	$p(2, 2) = 0.12$	$p(3, 2) = 0.03$

Найти:

1. Безусловные законы распределения X_1 и X_2 .
2. Условные законы распределения X_1 при $X_2 = x_{21} = 0.4$ и $X_2 = x_{22} = 0.8$.
3. Условный закон распределения X_2 при $X_1 = x_{12} = 5$.
4. $M(X_1)$; $M(X_1/x_{21})$; $M(X_1/x_{22})$; $M[M(X_1/X_2)]$.

□ Решение:

1. Пользуясь правилами (7.6) и (7.7) суммирования строк и столбцов таблиц распределения, найдем безусловные законы распределения, для чего сложим вероятности по столбцам и строкам табл. 7.2 соответственно.

Распределение X_1 :

x_1	$x_{11} = 2$	$x_{12} = 5$	$x_{13} = 8$
$P(X_1)$	0.2	0.42	0.38

Распределение X_2 :

x_2	$x_{21} = 0.4$	$x_{22} = 0.8$
$P(X_2)$	0.8	0.2

Для проверки: $0.2 + 0.42 + 0.38 = 1$; $0.8 + 0.2 = 1$.

2. Условные распределения случайной величины X_1 при $X_2 = x_{21} = 0.4$ и $X_2 = x_{22} = 0.8$ найдем с использованием (7.90).

$$P(x_{11}/x_{21}) = P(x_{11}, x_{21})/P(x_{21}) = \frac{0.15}{0.8} = \frac{3}{16}; \quad P(x_{11}/x_{22}) = \frac{0.05}{0.2} = 0.25;$$

$$P(x_{12}/x_{21}) = P(x_{12}, x_{21})/P(x_{21}) = \frac{0.3}{0.8} = \frac{6}{16}; \quad P(x_{12}/x_{22}) = \frac{0.12}{0.2} = 0.6;$$

$$P(x_{13}/x_{21}) = P(x_{13}, x_{21})/P(x_{21}) = \frac{0.35}{0.8} = \frac{7}{16}; \quad P(x_{13}/x_{22}) = \frac{0.03}{0.2} = 0.15.$$

Таким образом, условные законы распределения X_1 при $X_2 = x_{21} = 0.4$ и $X_2 = x_{22} = 0.8$ задаются следующей таблицей:

x_1	2	5	8
$P(X_1/x_{21})$	3/16	6/16	7/16
$P(X_1/x_{22})$	0.25	0.6	0.15

Проверка: $\sum_i P(x_{1i}/x_{21}) = 1$; $\sum_i P(x_{1i}/x_{22}) = 1$.

3. Аналогично определяем условный закон распределения $P(x_2/x_{12})$:

x_2	0.4	0.8
$P(X_2/x_{12})$	5/7	2/7

Проверка: $\sum_i P(x_{2i} / x_{12}) = 1$.

4. Значения $M(X_1)$, $M(X_1 / x_{21})$ и $M(X_1 / x_{22})$ определяем по формулам для безусловных и условных математических ожиданий:

$$M(X_1) = 2 \cdot 0.2 + 5 \cdot 0.42 + 8 \cdot 0.38 = 5.54;$$

$$M(X_1 / x_{21}) = 2 \cdot \frac{3}{16} + 5 \cdot \frac{6}{16} + 8 \cdot \frac{7}{16} = 5.75;$$

$$M(X_1 / x_{22}) = 2 \cdot 0.25 + 5 \cdot 0.6 + 8 \cdot 0.15 = 4.7.$$

Согласно формуле полного математического ожидания (7.98*), математическое ожидание условного математического ожидания $M(X_1 / X_2)$ равно безусловному математическому ожиданию случайной величины X_1 . В данном случае $M(X_1 / X_2)$ — вектор с двумя элементами, значения которых равны 5.75 и 4.7. Их вероятности равны 0.8 и 0.2 соответственно, поэтому

$$M[M(X_1 / X_2)] = 5.75 \cdot 0.8 + 4.7 \cdot 0.2 = 5.54.$$

Полученное значение равно значению $M(X_1)$, что и утверждает (7.98*). ■

7.8. Двумерный нормальный закон распределения. Эллипсы рассеивания

Применительно к векторным случайным величинам могут быть рассмотрены законы распределения, которые упоминались ранее. Но наибольшее распространение на практике получил многомерный нормальный закон распределения векторных случайных величин или нормальный закон в n -мерном пространстве. Рассмотрим основные свойства n -мерного нормального закона распределения на примере непрерывного случайного вектора.

В общем случае плотность совместного нормального распределения элементов n -мерной непрерывной случайной величины $\mathbf{X}$ имеет вид

$$f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det(\mathbf{P})}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{X}^0)^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{X}^0 \right]. \quad (7.107)$$

Здесь $\mathbf{P}$ — ковариационная матрица (7.64), (7.66); $\det(\mathbf{P})$ — определитель ковариационной матрицы; $\mathbf{X}^0 = \mathbf{X} - \mathbf{m}_x$ — центрованный случайный вектор. Как отмечалось, определитель ковариационной матрицы

$$D = \det(\mathbf{P}) \quad (7.108)$$

характеризует обобщенную дисперсию, а корень из этого определителя

$$d = \sqrt{D} = \sqrt{\det(\mathbf{P})} \quad (7.109)$$

носит название коэффициента разброса. Он входит в число сомножителей знаменателя плотности распределения (7.107).

Нормальное распределение (7.107) определяется своим центром распределения — вектором математического ожидания:

$$M[\mathbf{X}] = (m_1, \dots, m_i, \dots, m_n)^T \quad (7.110)$$

и вторыми центральными моментами, входящими в состав ковариационной матрицы $\mathbf{P}$ (7.66).

Из выражения (7.107), путем интегрирования $f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n)$ по $(n-1)$ составляющим случайного вектора $\mathbf{X}$ (см. разд. 7.3, выражение (7.37) и др.) могут быть найдены одномерные плотности $f_{X_1}(x_1)$, $f_{X_2}(x_2)$, ..., $f_{X_n}(x_n)$. Этот путь получения одномерных плотностей справедлив для произвольных распределений. Покажем, что для нормального закона распределения одномерные плотности $f_{X_1}(x_1)$, $f_{X_2}(x_2)$, ..., $f_{X_n}(x_n)$ могут быть получены из выражения (7.107), исходя из предположения о некоррелированности элементов случайного вектора $\mathbf{X}$. При этом будет выявлено одно из характерных свойств многомерного нормального распределения, которое касается эквивалентности понятий независимости и некоррелированности составляющих нормально распределенной векторной случайной величины.

Теорема 7.5. Элементы векторной случайной величины $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$, имеющей n -мерное нормальное распределение (7.107), взаимно независимы тогда и только тогда, когда они не коррелированы:

$$k_{ij} = 0; \quad f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n); \quad (7.111)$$

$$f_{X_i}(x_i) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x_i - m_i)^2}{2\sigma_i^2} \right]; \quad i = (1, n), \quad j = (1, n), \quad i \neq j.$$

▷ Доказательство. При некоррелированности составляющих случайного вектора ковариационная матрица $\mathbf{P}$ (7.66) — диагональная. На ее диагонали расположены дисперсии отдельных составляющих случайного вектора $\mathbf{X}$. Обратная матрица $\mathbf{P}^{-1}$, входящая в квадратичную форму (показатель степени экспоненты), в этом случае также диагональная, имеющая в качестве элементов величины, обратные дисперсиям:

$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & . & 0 \\ . & . & . \\ 0 & . & \sigma_n^2 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{vmatrix} 1/\sigma_1^2 & . & 0 \\ . & . & . \\ 0 & . & 1/\sigma_n^2 \end{vmatrix}. \quad (7.112)$$

Раскрывая квадратичную форму в показателе степени экспоненты (7.107) с учетом (7.112), имеем:

$$-\frac{1}{2}(\mathbf{X}^0)^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{X}^0 = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i^0)^2}{\sigma_i^2}; \quad x_i^0 = x_i - m_i,$$

где m_i — i -ый элемент вектора математических ожиданий (7.110).

Таким образом, показатель степени экспоненты в выражении (7.107) плотности совместного распределения элементов n -мерного случайного вектора $\mathbf{X}$ равен сумме квадратов нормированных значений случайных величин x_i , т. е. экспонента в (7.101) может быть представлена произведением экспонент с показателями степени $[-(x_i^0)^2 / 2\sigma_i^2]$, $i = (1, n)$.

Коэффициент разброса (7.109), входящий в знаменатель (7.107), равен произведению средних квадратических погрешностей $\mathbf{X}_i$, поскольку матрица $\mathbf{P}$ (7.112) — диагональная: $d = \sqrt{\det(\mathbf{P})} = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$.

Таким образом, предположение о взаимной некоррелированности составляющих случайного вектора с n -мерным нормальным распределением позволяет представить плотность совместного распределения составляющих (7.107) в виде произведения плотностей нормального распределения каждой из составляющих:

$$f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left[-\frac{(x_i^0)^2}{2\sigma_i^2}\right],$$

что и требовалось доказать. ◀

Ранее отмечалось, что в общем случае некоррелированность случайных величин не влечет их независимости. Однако, на основании теоремы (7.111), в случае n -мерного нормального распределения понятия некоррелированности и независимости эквивалентны.

В случае, когда $k_{ij} \neq 0$ ($r_{ij} \neq 0$), матрица $\mathbf{P}$ (7.66) имеет ненулевые недиагональные элементы. При этом составляющие вектор $\mathbf{X}$ случайные величины зависимы и могут быть получены условные плотности совместного распределения и условные числовые характеристики. Рассмотрим их для двумерного случайного вектора $\mathbf{X}^T = [X_1, X_2]$.

Учитывая связь корреляционных моментов и коэффициентов корреляции (7.74), перепишем выражение для нормальной плотности распределения двумерного вектора (7.107), обозначая квадратичную форму в ее показателе степени $Q(x_1, x_2) = -(\mathbf{X}^0)^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{X}^0$:

$$\left. \begin{aligned} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{(1-r_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}Q(x_1, x_2)\right] \\ Q(x_1, x_2) &= \frac{1}{(1-r_{12}^2)} \left[\frac{(x_1^0)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2x_1^0 x_2^0 r_{12}}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2^0)^2}{\sigma_2^2} \right] \end{aligned} \right\}. \quad (7.113)$$

Здесь r_{12} — коэффициент корреляции случайных величин X_1 и X_2 ; x_1^0, x_2^0 , σ_1^2, σ_2^2 — центрированные значения и дисперсии случайных величин X_1 и X_2 соответственно.

По определению (7.94) условная плотность распределения первой составляющей вектора при фиксированном значении второй составляющей равна отношению плотности (7.113) к плотности $f_{X_2}(x_2)$:

$$f_{X_1}(x_1/x_2) = \frac{f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)} = \frac{\sigma_2 \sqrt{2\pi}}{2\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-r_{12}^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[Q(x_1, x_2) - \frac{(x_2^0)^2}{2\sigma_2^2} \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi(1-r_{12}^2)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-r_{12}^2)} \left[\frac{x_1^0}{\sigma_1} - r_{12} \frac{x_2^0}{\sigma_2} \right]^2 \right\}.$$

Аналогично, для условной плотности второй составляющей при фиксированном значении первой составляющей имеем:

$$f_{X_2}(x_2/x_1) = \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi(1-r_{12}^2)}} \exp \left[-\frac{1}{2(1-r_{12}^2)} \left(\frac{x_2^0}{\sigma_2} - r_{12} \frac{x_1^0}{\sigma_1} \right)^2 \right].$$

Преобразуем полученные выражения с учетом выражения для централизованных значений $x_i^0 = x_i - m_i$ элементов случайного вектора:

$$f_{X_1}(x_1/x_2) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi(1-r_{12}^2)}} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-r_{12}^2)} \left[x_1 - \left(m_1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} r_{12}(x_2 - m_2) \right) \right]^2}$$

$$f_{X_2}(x_2/x_1) = \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi(1-r_{12}^2)}} e^{-\frac{1}{2\sigma_2^2(1-r_{12}^2)} \left[x_2 - \left(m_2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} r_{12}(x_1 - m_1) \right) \right]^2} \quad (7.114)$$

Нетрудно видеть, что условные плотности (7.114) — плотности нормального распределения с центрами распределения (условными математическими ожиданиями)

$$x_{1/2} = m_1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} r_{12}(x_2 - m_2); \quad x_{2/1} = m_2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} r_{12}(x_1 - m_1) \quad (7.115)$$

и условными дисперсиями

$$\sigma_{1/2}^2 = \sigma_1^2(1-r_{12}^2); \quad \sigma_{2/1}^2 = \sigma_2^2(1-r_{12}^2). \quad (7.116)$$

Условные математические ожидания $x_{1/2} = M(X_1 / x_2)$ и $x_{2/1} = M(X_2 / x_1)$ (7.115) представляют уравнения линий нормальной регрессии X_1 на X_2 и X_2 на X_1 соответственно. Заметим, что прямые линии (7.115) пересекаются в точке с координатами (m_1, m_2) , т. е. в центре распределения.

Таким образом, можно сделать вывод, касающийся свойств регрессии двумерного нормального случайного вектора: *функции регрессии составляющих нормального двумерного случайного вектора являются прямолинейными.*

Ранее отмечалось, что двумерная плотность распределения $z = f(x_1, x_2)$ может быть изображена поверхностью в системе координат $x_1 x_2 z$. Поверхность

двумерного нормального распределения, соответствующая плотности распределения (7.113), изображена на рис. 7.5.

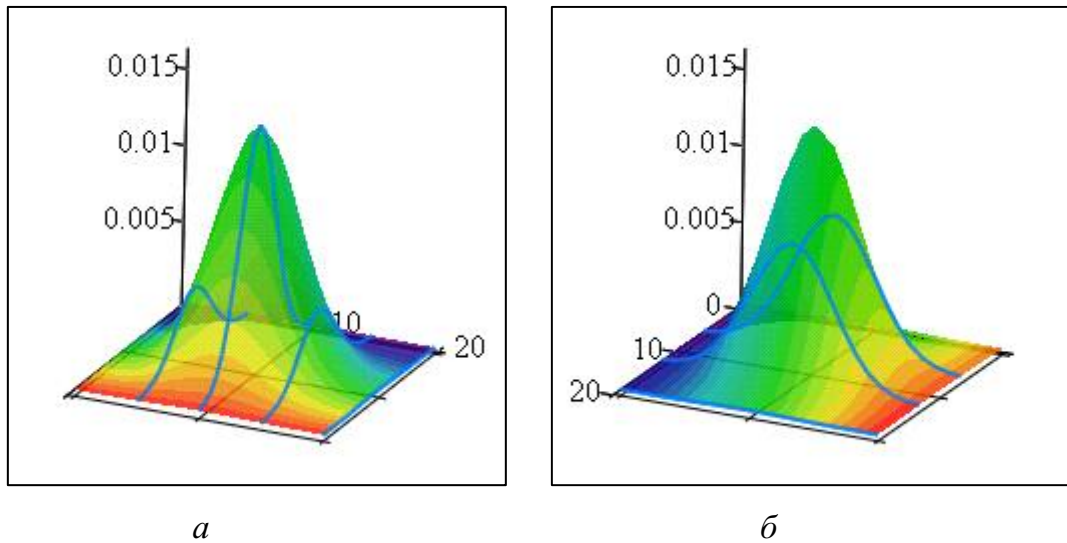


Рис. 7.5. Поверхность двумерного нормального распределения

Рассекая эту поверхность плоскостями $x_1 = x_1(0)$, перпендикулярными к оси x_1 , при разных значениях $x_1(0)$ получим серию кривых пересечения поверхности $z = f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ с каждой из этих плоскостей (см. рис. 7.5, а). Уравнения этих кривых могут быть получены подстановкой в (7.113) значений $x_1 = x_1(0)$. Можно заметить, что все кривые пересечения, образующиеся при этом, будут иметь форму плотностей нормального распределения с центрами, лежащими на линии регрессии $x_{2/1}$ (7.115).

Аналогично, рассекая эту поверхность плоскостями $x_2 = x_2(0)$, перпендикулярными к оси x_2 , для разных значений $x_2(0)$ получим серию кривых пересечения (см. рис. 7.5, б), имеющих форму плотностей нормального распределения с центрами, лежащими на линии регрессии $x_{1/2}$ из (7.115).

Максимальное значение $z_{\max}$ поверхности $z = f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ соответствует центру двумерного распределения, координатами которого служат математические ожидания составляющих: m_1 и m_2 . Иллюстрации, представленные на рис. 7.5, были получены в среде Mathcad.

Рассечем теперь поверхность $z = f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ плоскостью $z = z(0)$, перпендикулярной оси z . При этом получим линию пересечения, параллельную плоскости (x_1, x_2) . Постоянному значению $z(0)$ функции $z = f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ (7.113) отвечает постоянное значение показателя степени экспоненты $Q(x_1, x_2) = Q_0$. Поэтому уравнение линий пересечения, образующееся при этом, на основании (7.113) записывается как

$$Q(x_1, x_2) = \frac{1}{(1 - r_{12}^2)} \left[\frac{(x_1^0)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2x_1^0 x_2^0 r_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{(x_2^0)^2}{\sigma_2^2} \right] = Q_0. \quad (7.117)$$

Уравнение (7.117) есть уравнение кривой второго порядка вида

$$a_{11}(x_1^0)^2 + 2a_{12}x_1^0x_2^0 + a_{22}(x_2^0)^2 + q^2 = 0;$$

$$a_{11} = 1/\sigma_1^2; a_{22} = 1/\sigma_2^2; a_{12} = -r_{12}/\sigma_1\sigma_2.$$

Вычисляя инвариант $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ кривой второго порядка (7.117), получим: $D = (1 - r_{12}^2)/\sigma_1^2\sigma_2^2$, откуда следует, что $D \geq 0$.

Это свидетельствует о том, что при $|r_{12}| < 1$ кривая (7.117) представляет собой эллипс с центром в точке (m_1, m_2) и главными осями, повернутыми относительно осей (x_1, x_2) на некоторый угол α . При различных значениях константы Q_0 в (7.117) получаем сечения поверхности $z = f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ плоскостями, параллельными плоскости (x_1, x_2) и расположенными на различной высоте. Образующиеся в пересечениях эллипсы разных размеров имеют один центр (m_1, m_2) и одинаковую ориентацию главных осей. Пример подобного рассеяния поверхности (7.113), полученный в среде Mathcad, приведен на рис. 7.6.

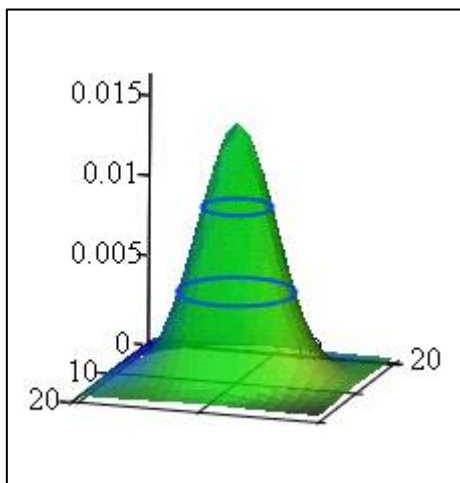


Рис. 7.6. Эллипсы равной плотности вероятностей

Каждый из эллипсов, соответствующий некоторому значению константы Q_0 , характеризуется тем, что во всех его точках плотность распределения (7.113) постоянна. Поэтому такие эллипсы называют **эллипсами равной плотности вероятностей** или **эллипсами рассеивания**. Главные оси эллипсов носят название **главных осей рассеивания**.

Угол поворота главных осей эллипсов относительно осей (x_1, x_2) зависит от значения коэффициента корреляции r_{12} . При значении $r_{12} = 0$, которое соответствует случаю некоррелированности или независимости составляющих x_1 и x_2 , уравнение (7.117) преобразуется:

$$r_{12} = 0; \left[(x_1^0)^2/\sigma_1^2 + (x_2^0)^2/\sigma_2^2 \right] = C_0. \quad (7.118)$$

Уравнению (7.118) соответствуют эллипсы с центрами в точке (m_1, m_2) и главными осями, параллельными осям Ox_1 и Ox_2 . Из этого следует, что значения составляющих нормального случайного вектора в системе координат, оси

которой совпадают ($m_1 = m_2 = 0$) или параллельны ($m_1, m_2 \neq 0$) главным осям рассеивания, независимы.

В случае $|r_{12}| < 1$, представляющем основной интерес, угол α ориентации главных осей эллипса рассеивания относительно системы координат X_1OX_2 отличен от нуля. Пример построения эллипсов (7.117) приведен на рис. 7.7.

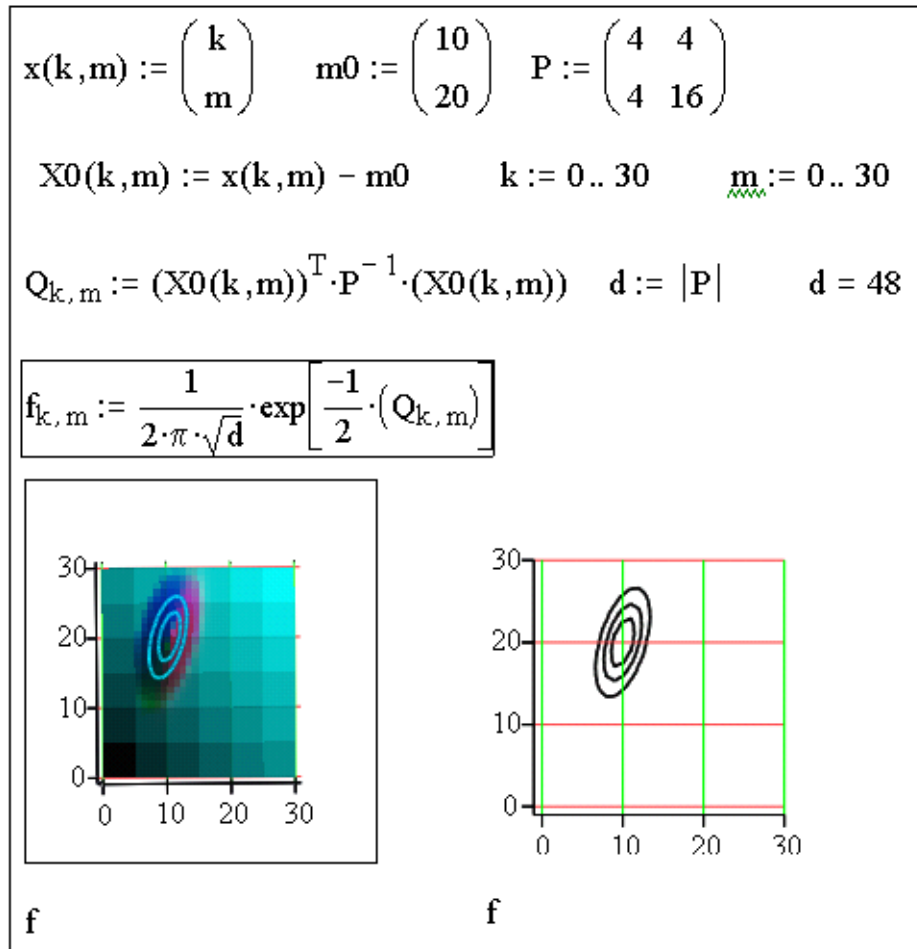


Рис. 7.7. Эллипсы равной плотности вероятностей ($r_{12} > 0$)

□ При расчетах (Mathcad) принято: $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 4$, $\kappa_{12} = 4$, $m_1 = 10$, $m_2 = 20$. Коэффициент корреляции, соответствующий этим данным, $r_{12} = 0.5$.

На рис. 7.7 использованы следующие обозначения: $\mathbf{P}$ — ковариационная матрица, $\mathbf{m0}$ — вектор математических ожиданий, $\mathbf{X0}$ — центрированный случайный вектор. С помощью символьных операторов Mathcad получено выражение для показателя экспоненты Q (7.113), которое использовано далее для построения поверхности двумерной плотности.

На левом графике (см. рис.7.7), для иллюстрации расположения эллипсов рассеивания, приведен вид сверху на поверхность (7.113), построенную для принятых данных. На правом графике приведены три эллипса рассеивания, соответствующие принятым исходным данным. Из полученных результатов следует, что центр расположения эллипсов имеет заданные координаты (10, 20), а ориентация главных осей соответствует принятому значению коэффициента корреляции ($r_{12} = 0.5$). ■

Определим теперь угол α , опираясь на рассмотренный выше случай независимости составляющих X_1 и X_2 . и выражение (7.118).

На рис 7.8 изображен вариант ориентации главных осей эллипса рассеивания $O_1\eta$, $O_1\zeta$, соответствующий случайному вектору с параметрами, принятыми в примере (см. рис. 7.7). Пунктиром на рис. 7.8 изображена линия регрессии (7.115) X_2 на X_1 , т. е. $x_{2/1} = m_2 + \sigma_2 r_{12}(x_1 - m_1)/\sigma_1$. Эта линия, как указывалось выше, проходит через центр распределения O_1 с координатами ($m_1 = 5$, $m_2 = 10$).

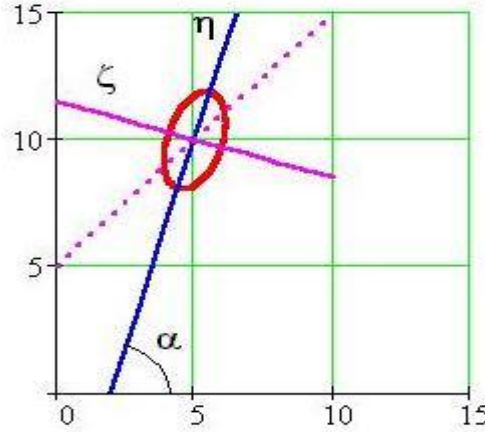


Рис. 7.8. Ориентация главных осей эллипса рассеивания

Системы координат x_1Ox_2 и $\zeta O_1\eta$ отличаются смещением центров координат и углом поворота α . Для пересчета координат случайной точки (x_1 , x_2) в систему координат $\zeta O_1\eta$ следует совместить центры координат и повернуть систему координат x_1Ox_2 на угол α . Это осуществляется центрированием вектора $\mathbf{X}$ и умножением центрированного случайного вектора на матрицу $\mathbf{A}$ направляющих косинусов

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}.$$

Тогда координаты случайной точки (x_1 , x_2) в системе координат $\zeta O_1\eta$ будут иметь значения:

$$\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{m}_x) = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{vmatrix}; \quad \begin{aligned} a &= \cos \alpha \cdot x_1^0 + \sin \alpha \cdot x_2^0 \\ b &= -\sin \alpha \cdot x_1^0 + \cos \alpha \cdot x_2^0 \end{aligned} \quad (7.119)$$

Согласно выводу, сделанному применительно к формуле (7.118), величины a и b — независимые как координаты случайной точки в системе координат, совпадающей с главными осями эллипса рассеивания. Но независимость влечет некоррелированность составляющих. Для рассматриваемого случая нормального распределения справедливо и обратное суждение. Поэтому для определения угла α можно составить и приравнять к нулю корреляционный момент величин a и b (7.119). Принимая во внимание, что математические ожидания a и b равны нулю, их корреляционный момент имеет вид:

$$K_{ab} = M(ab) = -\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot M(x_1^0)^2 + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cdot M(x_1^0 x_2^0) + \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot M(x_2^0)^2.$$

Опуская промежуточные выкладки, из условия независимости a и b имеем:

$$K_{ab} = -\frac{1}{2} \sin 2\alpha \cdot (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) + K_{12} \cos 2\alpha = 0; \quad K_{12} = M(x_1^0 x_2^0) = r_{12} \sigma_1 \sigma_2;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2r_{12} \sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}. \quad (7.120)$$

Угол наклона оси $O_1\zeta$ будет отличаться от угла α на $\pi/2$. Формула (7.120) позволяет вычислять углы относительного поворота систем координат $x_1 O x_2$ и $\zeta O_1 \eta$ при различных параметрах двумерного распределения.

На рис. 7.9 для исходных данных, принятых в примерах (см. рис. 7.7, 7.8), изображены эллипсы рассеивания при различных значениях r_{12} . Там же показаны линия регрессии X_2 на X_1 (пунктир).

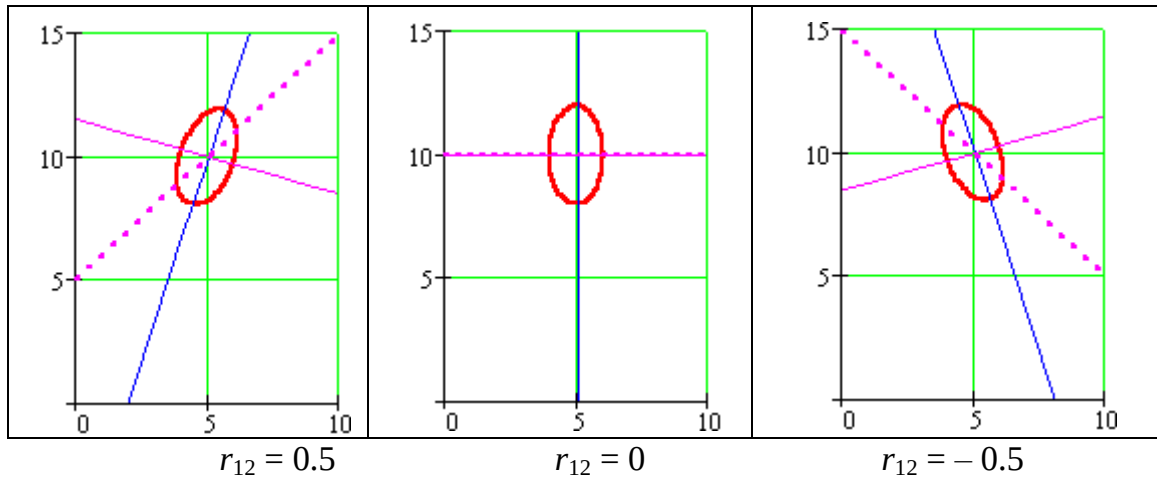


Рис. 7.9. Ориентация эллипса рассеивания

Из этих иллюстраций видно, что с ростом r_{12} происходит все больший поворот главных осей рассеивания относительно осей Ox_1 и Ox_2 . При независимости X_2 и X_1 линии регрессии X_2 на X_1 и X_1 на X_2 совпадают с главными осями эллипса рассеивания.

Большое число практических вероятностных задач анализа многомерных распределений связано, как отмечалось в разд. 7.2, 7.3, с определением вероятности попадания векторной случайной величины в заданную часть области ее определения. В рассматриваемом случае двумерного нормального распределения вероятность попадания случайной точки (x_1, x_2) в некоторую область S , согласно (7.26), выражается двойным интегралом по S от двумерной нормальной плотности распределения:

$$P[(x_1, x_2) \in S] = \frac{1}{2\pi\sqrt{(1-r_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}} \iint_S e^{-Q(x_1, x_2)/2} dx_1 dx_2, \quad (7.121)$$

где показатель степени экспоненты определяется выражением (7.113).

Интеграл (7.121) в общем случае может быть получен численным или аналитическим путем, причем большую помощь в этом может оказать применение программных систем компьютерной математики. Для ряда плоских фигур вероятность попадания в них достаточно просто получить в аналитическом виде. К таким задачам относятся определение вероятности попадания в прямоугольник со сторонами, параллельными главным осям рассеивания, а также определение вероятности попадания случайной точки (X_1, X_2) в эллипс рассеивания [1, 2, 3]. Решение этих задач с исходными данными, которые может задавать пользователь, размещены в виде интерактивных ресурсов на портале <http://mas.exponenta.ru/> в разделе <<Теория вероятностей>>.

Выражение (7.121) получено на основе (7.26), которое справедливо для произвольной плотности $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$. В общем случае выражение (7.26) позволяет решать практически важные задачи определения закона распределения случайных величин, являющихся суммой (разностью) двух других величин, законы распределения которых известны. Рассмотрим эти задачи более подробно.

7.9. Плотность распределения суммы случайных величин. Композиция законов распределений

Пусть случайная величина Z — сумма случайных величин X и Y с плотностями распределения $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ соответственно. Найдем плотность $f_Z(z)$ распределения $Z = X + Y$.

Область S , по которой необходимо интегрировать (см. (7.26)), в данном случае — бесконечный квадрант, соответствующий неравенствам $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < z - x$. Таким образом, функция распределения случайной величины Z может быть получена в форме

$$F_Z(z) = \iint_S f_{XY}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{z-x} f_{XY}(x, y) dy \right] dx. \quad (7.122)$$

Дифференциал от (7.122) по z , согласно (4.14), определит $f_Z(z)$ в общем случае:

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, z-x) dx. \quad (7.123)$$

Отметим, что выражение (7.123) не предполагает наложения каких-либо предварительных условий, касающихся особенностей рассматриваемых случайных величин X и Y , составляющих сумму.

В частном случае, когда X и Y — **независимые** случайные величины, применительно к $Z = X + Y$ говорят о **композиции законов распределения**. Найдем соотношения, которые учитывают этот частный случай.

Если X и Y — независимые случайные величины, $f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ и выражение (7.122) упрощается:

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \int_{-\infty}^{z-x} f_Y(y) dy dx.$$

Дифференцируя полученное выражение по z и учитывая, что переменная z присутствует только в верхнем пределе второго интеграла, получим

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx. \quad (7.124)$$

Понятно также, что $F_Z(z)$ можно выразить другим образом:

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) \int_{-\infty}^{z-y} f_X(x) dx dy,$$

откуда получаем второй вариант формулы для плотности распределения $f(z)$:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) f_X(z-y) dy. \quad (7.125)$$

Выражения (7.124) и (7.125) эквивалентны и представляют соотношения для **свертки одномерных плотностей** распределения. Эти выражения можно применить и для случая, когда исследуется разность СВ: $W = X - Y$. Для этого в (7.124), (7.125) достаточно заменить y на $(-y)$:

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(w-x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) f_X(w+y) dy. \quad (7.126)$$

Рассмотрим пример.

Пример 7.11. Пусть плотности распределения независимых случайных величин X и Y имеют вид:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x < 0; x > 1 \end{cases}; \quad f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}.$$

Требуется найти плотность $f_Z(z)$ распределения $Z = X + Y$, т. е. определить результат композиции законов распределения X и Y .

□ Решение. В данном случае область определения Z удовлетворяет неравенству $z > 0$, но при использовании, например, формулы (7.124) следует осуществить интегрирование для двух зон: $0 < z \leq 1$ и $z > 1$. При вычислении свертки $f_X(x)$ и $f_Y(z-x)$ для первой зоны переменная x будет меняться от 0 до z , поскольку $f_Y(y) = 0$ при $y < 0$. Для второй зоны переменная x должна меняться от 0 до 1, поскольку свертка для этой зоны будет определяться диапазоном изменения x в пределах от 0 до 1.

Графики на рис. 7.10 поясняют сказанное.

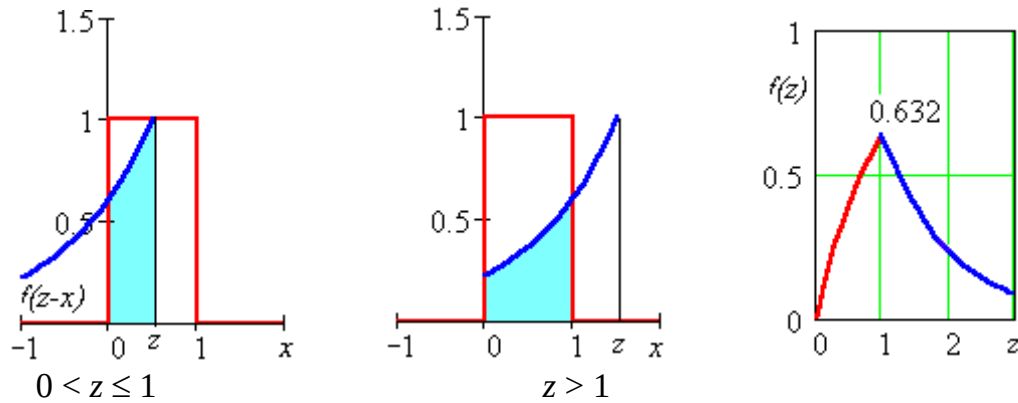


Рис.7.10. Свертка плотностей распределения

На левом графике (см. рис. 7.10) приведена свертка двух плотностей для зоны $0 < z \leq 1$. Средний график соответствует свертке при $z > 1$. Области свертки выделены заливкой. Искомая плотность распределения определяется указанными зонами и имеет вид:

$$f_z(z) = \begin{cases} \int_0^z (1) \cdot \exp[-(z-x)] dx = 1 - e^{-z}; & 0 < z \leq 1; \\ \int_0^1 (1) \cdot \exp[-(z-x)] dx = (e-1)e^{-z}; & z > 1. \end{cases}$$

При $z < 0$ плотность распределения $f_z(z) = 0$, поскольку для $x < 0$ и $y < 0$ плотности $f_X(x) = 0$ и $f_Y(y) = 0$. Результирующая плотность изображена на правом графике (см. рис. 7.10).

В качестве проверки легко убедиться, что интеграл от $f_z(z)$ в зоне определения z равен единице:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_z(z) dz &= \int_0^1 (1 - e^{-z}) dz + \int_1^{\infty} (e-1)e^{-z} dz = 1 - \int_0^1 e^{-z} dz + (e-1) \int_1^{\infty} e^{-z} dz = \\ &= 1 + e^{-z} \Big|_0^1 - (e-1)e^{-z} \Big|_1^{\infty} = 1 + e^{-1} - 1 - (e-1)(0 - e^{-1}) = 1 + e^{-1} - 1 + 1 - e^{-1} = 1. \end{aligned}$$

Вычисления при построении графиков (см. рис. 7.10) осуществлялись в среде Mathcad. Начальный фрагмент программы приведен на рис. 7.11.

Следует отметить, что Mathcad позволяет получать решения аналогичных задач, опуская промежуточные преобразования: после ввода плотностей $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ слагаемых можно получить плотность $f_z(z)$ непосредственным использованием формул (7.124) или (7.125). Один из вариантов такого решения для исходных данных примера 7.11 приведен в прил. 4. ■

Учитывая важное практическое значение нормированного закона распределения, представляет особый интерес проанализировать композицию нормальных законов. Рассмотрим пример.

$$f_1(x) := \text{dunif}(x, 0, 1)$$

$$f_2(y) := \exp(-y)$$

$$f1(z1) := \int_0^{z1} 1 \cdot f_2(z1 - x) dx$$

$$f1(z1) \rightarrow 1 - \exp(-z1)$$

$$f2(z2) := \int_0^1 1 \cdot f_2(z2 - x) dx$$

$$f2(z2) \rightarrow \exp(-z2 + 1) - \exp(-z2)$$

$$\int_0^1 f1(z1) dz1 + \int_1^\infty f2(z2) dz2 \text{ simplify } \rightarrow 1$$

Проверка

Рис.7.11. Символьные вычисления и проверка $f(z)$

Пример 7.12. Определить закон распределения $X = X_1 + X_2$, если независимые случайные величины X_1 и X_2 распределены по нормальному закону с плотностями распределения $f_1(x_1)$ и $f_2(x_2)$ и параметрами m_1, σ_1^2 и m_2, σ_2^2 соответственно.

□ Решение. Рассмотренные ранее свойства математического ожидания и дисперсии (см. главу 4) позволяют сразу же получить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $X = X_1 + X_2$:

$$M[X] = m = m_1 + m_2; D[X] = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \sigma^2. \quad (7.127)$$

Вид плотности распределения X определим с помощью (7.124):

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1) f_2(x - x_1) dx_1 = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{R(x_1)} dx_1,$$

где показатель степени подынтегральной функции

$$R(x_1) = -\frac{(x_1 - m_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x - x_1 - m_2)^2}{2\sigma_2^2}.$$

Преобразуем $R(x_1)$ к виду:

$$R(x_1) = -a x_1^2 + 2b x_1 - c; \quad (7.128)$$

$$a = \frac{1}{2} \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2}; \quad b = \frac{m_1}{2\sigma_1^2} + \frac{x - m_2}{2\sigma_2^2}; \quad c = \frac{m_1^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(x - m_2)^2}{2\sigma_2^2}.$$

Из интегрального исчисления известно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a x_1^2 \pm 2b x_1 - c} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-\frac{ac - b^2}{a}}, \quad (7.129)$$

откуда, подставляя (7.128), (7.129) в плотность $f_X(x)$, после преобразования получим:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad (7.130)$$

где m и σ^2 — математическое ожидание и дисперсия (7.127) X . ■

Полученный результат свидетельствует о том, что сумма двух независимых нормально распределенных случайных величин также распределена нормально с математическим ожиданием и дисперсией, равными суммам математических ожиданий и дисперсий случайных величин соответственно. Понятно, что добавление к рассмотренной сумме еще одной нормально распределенной случайной величины также приведет к нормальному распределению результата. В общем случае, если сумма независимых одинаково распределенных случайных величин подчиняется тому же закону распределения, что и слагаемые, говорят о **композиционной устойчивости** закона распределения.

Из результатов решения примера 7.12 следует, что нормальный закон обладает свойством композиционной устойчивости, т. е.:

композиция произвольного числа нормальных законов распределения приводит к нормальному закону, причем математические ожидания и дисперсии составляющих суммы суммируются.

Заметим, что не все законы распределения непрерывных случайных величин обладают свойством композиционной устойчивости. Так, этим свойством не обладают, например, равномерный и показательный законы распределения, в чем можно убедиться, анализируя композицию этих законов.

Подходы к решению задач композиции законов распределения дискретных случайных величин рассматриваются, например, в [1, 2, 5].

Глава 8. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ И ПРОЦЕССОВ

8.1. Основные понятия

В разд. 4.1, при введении понятия случайных величин отмечалась возможность оценки результатов испытаний количественной, числовой мерой. При этом предполагалось, что эта количественная мера в процессе конкретного испытания не претерпевает изменений и остается постоянной. На множестве испытаний числовой результат наблюдений (измерений) возможных значений случайной величины имеет некоторое среднее значение и характеризуется разбросом относительно этого среднего. Отмеченная ситуация, несмотря на свою распространенность в практических вероятностных задачах, относится к частному случаю.

В общем случае количественные результаты испытаний не остаются постоянными в процессе их проведения, а меняются в зависимости от некоторого неслучайного аргумента. Подобные случаи характерны, например, при исследовании так называемых стохастических систем, переменные которых меняются во времени в соответствии со свойствами этих систем. Под **стохастической системой** (СС) понимают динамическую систему, внутренние свойства которой, возмущающие воздействия и/или возмущающие факторы имеют вероятностную природу. При этом перед исследователем возникают задачи, которые могут быть разделены на два класса — задачи анализа и задачи синтеза.

Общая постановка задач анализа СС заключается в следующем: дана совокупность воздействий на систему (входные сигналы, возмущения и проч.), а также математическая модель (например, дифференциальные уравнения) системы. Требуется получить характеристики выходных переменных системы. Понятие «дано» включает также задание законов распределений, их числовых характеристик для каждой случайной величины; числа, вида и параметров дифференциальных уравнений и проч. Решение задач анализа обычно связано с интегрированием дифференциальных уравнений математической модели при заданных параметрах и входных воздействиях. При этом понятно, что даже в случае, когда входными воздействиями служат случайные величины, выходные переменные таких систем будут функциями некоторого аргумента t , например, времени.

Задачи синтеза СС имеют обратную постановку: дана совокупность воздействий на систему (входные сигналы, внешние и внутренние возмущения) и требования к выходным сигналам или к поведению системы при наличии воздействий. Необходимо получить математическую модель системы, наилучшим образом удовлетворяющей совокупности требований к ней.

Задачи анализа и синтеза стохастических систем в прикладных областях распространены весьма широко. Классическим примером задач подобного

класса служит проблема исследования погрешностей измерительных и управляющих систем, подверженных случайным воздействиям.

При исследовании подобных процессов результат каждого опыта выражается в виде совокупности чисел в зависимости от значения аргумента t . Пусть, для простоты, исследуется скалярная выходная характеристика анализируемой системы. Результатом анализа в конкретном испытании для фиксированного значения аргумента t будет число. Это число заранее неизвестно, предсказать его невозможно, поскольку его значение зависит от множества случайных причин, полный учет которых заранее принципиально невозможен. Результатом множества испытаний той же переменной при том же значении аргумента t будет совокупность подобных чисел. Таким образом, при определенном значении аргумента t результат испытаний выражается случайной величиной. Для всей области определения аргумента в этой связи вводится понятие случайной функции и ряд других определений.

Случайной функцией называют функцию неслучайного аргумента t , значением которой при фиксированном t служит случайная величина. Это значение называют сечением случайной функции.

Сечением случайной функции называют случайную величину, соответствующую значению случайной функции при фиксированном значении аргумента t .

В результате одиночного испытания может быть получена так называемая реализация случайной функции.

Реализацией случайной функции называют неслучайную функцию аргумента t , равной которой может оказаться случайная функция в результате испытания. Обращаясь к материалу главы 4, можно отметить смысловую аналогию в понятиях «случайная величина», «значение случайной величины» и «случайная функция», «реализация случайной функции».

На рис 8.1 приведены две реализации одной и той же случайной функции, полученные в среде Mathcad.

$z := \text{rnorm}(101, 2, 0.5) \quad z1 := \text{rnorm}(101, 2, 0.5) \quad k := 0..100 \quad \Delta t := 0.1$

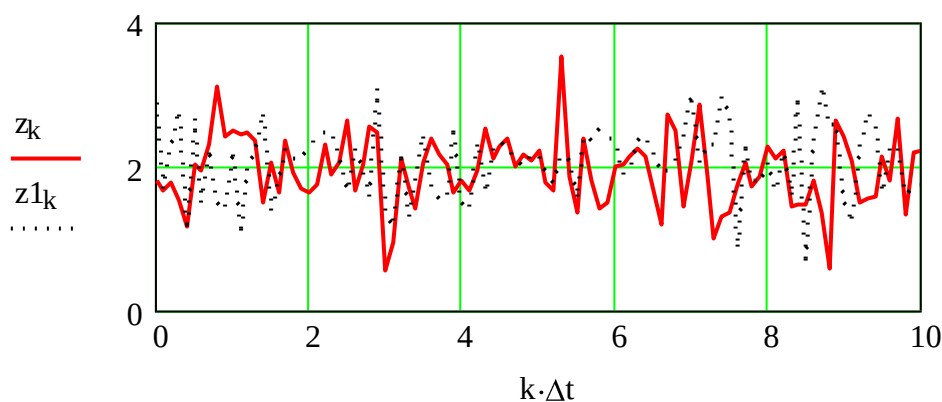


Рис. 8.1. Реализации случайной функции

С помощью встроенной функции **rnorm** в примере (см. рис. 8.1) получены два вектора (**z** и **z1**) нормально распределенных случайных чисел с математическим ожиданием, равным 2.0, и средним квадратическим отклонением, равным 0.5. Значения k -ых элементов этих векторов отнесены к моментам времени $t_k = k \cdot \Delta t$ и представлены на графике. Визуальный анализ графика (см. рис. 8.1) показывает, что реализации группируются вокруг математического ожидания, равного двум и имеют примерно одинаковое рассеяние относительно математического ожидания. Понятно, что рис. 8.1 отражает лишь частный случай, когда реализации случайной функции группируются вокруг постоянной средней величины. В общем случае это среднее значение может также меняться в функции от аргумента.

С определением случайной функции тесно связаны такие понятия, как случайный процесс и случайная последовательность. **Случайным процессом** будем называть случайную функцию аргумента t , в качестве которого выступает время. **Случайная последовательность** образуется значениями случайной функции при дискретном изменении аргумента. С этой точки зрения представленные на рис. 8.1 реализации, строго говоря, относятся к случайным последовательностям. Случайные последовательности могут быть образованы и в результате выборки значений случайных функций (случайных процессов) в фиксированных значениях аргумента.

Как и случайные величины, случайные функции (процессы, последовательности) могут быть как скалярными, так и векторными.

Случайные функции будут далее обозначаться прописными символами с указанием аргумента, например, $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$, а их реализации — строчными: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Несмотря на то, что сечениями случайной функции служат случайные числа со своими законами распределения, практически невозможно представить закон распределения случайной функции как обобщение законов распределения отдельных сечений. Действительно, одно отдельное сечение случайной функции может быть исчерпывающе охарактеризовано одномерным законом распределения, два ее сечения (двумерный случайный вектор) — двумерным законом распределения. В пределе число значений аргументов случайной функции бесконечно, поэтому случайную функцию можно рассматривать как бесконечномерный случайный вектор с соответствующим бесконечномерным законом распределения. В *главе 7* отмечалось, что практическое использование многомерных законов распределения неудобно; для системы трех-четырех случайных величин при решении большинства прикладных задач теории вероятностей уже используются лишь числовые характеристики распределений. Учитывая отмеченную «бесконечномерность» случайной функции, далее мы ограничимся, в основном, лишь рассмотрением ее числовых характеристик.

Последующий материал будет касаться случайных функций. Однако полученные ниже результаты, в силу введенных определений, будут справедливы также и для случайных процессов и последовательностей.

8.2. Числовые характеристики случайных функций

Числовые характеристики случайных функций, как и случайных величин (см. разд. 4.4—4.8), неслучайны. Поскольку случайные величины характеризуют сечения случайных функций, то для последних также имеют большое значение такие числовые характеристики, как математическое ожидание, дисперсия и вся совокупность начальных и центральных моментов высшего порядка. Однако наличие аргументов случайной функции вносит ряд особенностей, связанных, например, с необходимостью оценки взаимосвязей, взаимозависимости отдельных ее сечений. Возможность такой оценки обеспечивается введением понятия так называемой корреляционной функции — числовой характеристики, которой не было в перечне числовых характеристик случайных величин. Дадим определение числовых характеристик случайных функций, наиболее употребляемых в практике анализа случайных функций и процессов. Определения будут даны сначала для скалярных (одномерных), затем, в разд. 8.3 — для векторных (многомерных) случайных функций.

8.2.1. Математическое ожидание случайной функции

Математическим ожиданием случайной функции $X(t)$ называется неслучайная функция аргумента t , значение которой при фиксированном значении t^* равно математическому ожиданию случайной величины $X(t^*)$.

Таким образом, математическое ожидание случайной функции $X(t)$ образуется совокупностью математических ожиданий сечений случайной функции. Это позволяет рассматривать математическое ожидание случайной функции в качестве центра группирования ее отдельных реализаций.

Математическое ожидание случайной функции $X(t)$ будем, как правило, обозначать как

$$m_X(t) = M[X(t)]. \quad (8.1)$$

Свойства (4.21) математического ожидания, рассмотренные в разд. 4.5 применительно к случайным величинам, для случайных функций могут быть обобщены и представлены в следующем виде:

- 1) $M[c(t)] = c(t)$;
 - 2) $M[c(t)X(t)] = c(t)M[X(t)]$;
 - 3) $M[c(t)X(t) + b(t)] = c(t)M[X(t)] + b(t)$;
 - 4) $M[X_1(t) + X_2(t)] = M[X_1(t)] + M[X_2(t)]$.
- (8.2)

В приведенных выражениях $c(t)$, $b(t)$ — неслучайные функции. Доказательства свойств (8.2) опираются на рассуждения, приведенные при анализе свойств (4.21) случайных величин.

8.2.2. Дисперсия случайной функции

Под дисперсией одномерной случайной функции $X(t)$ понимают неслучайную функцию аргумента t , значение которой при фиксированном значении аргумента t^* равно дисперсии случайной величины $X(t^*)$.

Из определения следует, что дисперсию случайной функции можно рассматривать в качестве меры разброса, рассеяния реализаций случайной функции относительно ее математического ожидания.

Обозначая дисперсию случайной функции $X(t)$ через $D[X(t)]$, для одномерной случайной функции имеем:

$$D[X(t)] = M[X(t) - m_X(t)]^2 = M[X^0(t)]^2, \quad (8.3)$$

где $X^0(t) = X(t) - m_X(t)$ — центрированная случайная функция.

Другими распространенными обозначениями служат

$$D[X(t)] = D_X(t) = \sigma_X^2(t), \quad \sigma_X(t) = \sqrt{D[X(t)]}, \quad (8.4)$$

где $\sigma_X(t)$ — среднее квадратическое отклонение (стандарт отклонения).

Дисперсия одномерной случайной функции обладает свойствами, которые обобщают рассмотренные ранее свойства дисперсий (см. разд. 4.6, выражения (4.30)) случайных величин. Эти свойства могут быть представлены следующими выражениями:

- 1) $D[c(t)] = 0$;
 - 2) $D[c(t)X(t)] = c^2(t)D[X(t)]$;
 - 3) $M[c(t)X(t) + b(t)] = c^2(t)D[X(t)]$;
 - 4) $D[X(t)] = M[X(t)]^2 - [m_X(t)]^2$.
- (8.5)

Здесь $c(t)$, $b(t)$ — неслучайные функции. Еще одно свойство дисперсии, касающееся дисперсии суммы случайных функций, будет рассмотрено в разд. 8.3, при анализе векторных случайных функций.

Свойства (8.5) легко доказываются на основе определения (8.3) и свойств математических ожиданий (8.2). Четвертое свойство дисперсии случайной функции аналогично свойству (4.29) дисперсии случайных величин.

8.2.3. Корреляционная функция

При анализе векторных случайных величин было введено понятие корреляционного момента (7.65), (7.73) как меры взаимозависимости составляющих случайного вектора. Скалярная случайная функция $X(t)$ характеризуется множеством своих сечений; для нее вводится новое понятие — корреляционная функция, определяющая взаимосвязь, взаимозависимость двух отдельных сечений $X(t_1)$ и $X(t_2)$.

Корреляционной (автокорреляционной) функцией $K_X(t_1, t_2)$ случайной функции $X(t)$ называется математическое ожидание от произведения значений центрированной случайной функции в точках t_1 и t_2 :

$$K_X(t_1, t_2) = M[X^0(t_1)X^0(t_2)]. \quad (8.6)$$

Из приведенного определения следует, что корреляционная функция — это функция двух аргументов t_1 и t_2 , численно равная корреляционному моменту (7.73) соответствующих сечений случайной функции $X(t)$. Она отражает степень взаимообусловленности этих двух сечений.

Корреляционные функции обладают следующими основными свойствами:

$$1) K_X(t_1, t_2) = K_X(t_2, t_1); \quad (8.7)$$

$$2) K_X(t, t) = D[X(t)]; \quad (8.8)$$

3) Корреляционная функция $Y(t) = c(t)X(t) + b(t)$, где $c(t)$, $b(t)$ — неслучайные функции, а $X(t)$ имеет корреляционную функцию $K_X(t_1, t_2)$, равна:

$$K_Y(t_1, t_2) = c(t_1)c(t_2)K_X(t_1, t_2); \quad (8.9)$$

$$4) |K_X(t_1, t_2)| \leq \sqrt{D[X(t_1)]D[X(t_2)]}; \quad (8.10)$$

5) Нормированная корреляционная функция равна:

$$r_X(t_1, t_2) = \frac{K_X(t_1, t_2)}{\sqrt{D[X(t_1)]D[X(t_2)]}}; |r_X(t_1, t_2)| \leq 1. \quad (8.11)$$

Ограничимся краткими комментариями к приведенным соотношениям, предоставляя читателю выполнить несложные доказательства свойств корреляционных функций самостоятельно.

Свойство (8.7) отражает симметричность корреляционной функции и следует из того, что математическое ожидание произведения (8.6) не зависит от порядка следования скалярных сомножителей. Свойство (8.8) устанавливает очевидное равенство между дисперсией и корреляционной функцией, аргументы которой одинаковы. Третье свойство опирается на равенство $Y^0(t) = c(t)X^0(t)$ и свойство (см. выражения (8.2), п. 2) математических ожиданий случайных функций, согласно которому неслучайные сомножители могут быть вынесены за пределы оператора математического ожидания. Доказательство свойства (8.10) полностью аналогично доказательству свойства (7.77) корреляционного момента случайных величин. Свойство (8.11) служит, по существу, определением нормированной корреляционной функции. Ограничение единицей модуля нормированной корреляционной функции доказывается аналогично доказательству свойства (7.78) коэффициента корреляции.

8.3. Векторные случайные функции и их числовые характеристики

При рассмотрении нескольких случайных функций их удобно объединить в вектор-столбец. Так, в общем случае система n случайных функций $X_1(t)$, $X_2(t)$, ..., $X_i(t)$, ..., $X_n(t)$ составляет n -мерную векторную случайную функцию

$$\mathbf{X}(t) = [X_1(t), X_2(t), \dots, X_i(t), \dots, X_n(t)]^T, \quad i = (1, n), \quad (8.12)$$

где $\mathbf{X}(t)$ — $(n \times 1)$ -вектор-столбец, а надстрочный символ T обозначает операцию транспонирования.

Элементами векторной случайной функции служат скалярные случайные функции, рассмотренные в *разд. 8.1* и *8.2*. Поэтому для функции (8.12) принципиально могут быть введены понятия сечений, реализации и проч. Так, при фиксированном значении аргумента векторная функция (8.12) превращается в вектор случайных величин или в n -мерный случайный вектор, для которого в *главе 7* были введены вектор математических ожиданий и ковариационная матрица. Учитывая отмеченную взаимосвязь векторных случайных функций и векторных случайных величин, понятия вектора математических ожиданий и ковариационной матрицы могут быть обобщены и рассмотрены применительно и к случайным функциям.

Вектор математических ожиданий векторной случайной функции (8.12) будем обозначать так же, как и в скалярном случае, выделяя лишь векторы полужирным шрифтом:

$$\mathbf{m}_X(t) = M[\mathbf{X}(t)]. \quad (8.13)$$

Математическим ожиданием векторной случайной величины служит вектор, состоящий из математических ожиданий составляющих случайного вектора (*см. разд. 7.5*). Аналогично можно показать, что и для векторных случайных функций $\mathbf{X}(t)$ вектор $\mathbf{m}_X(t)$ состоит из математических ожиданий элементов вектора $\mathbf{X}(t)$ (8.12). Основные свойства математических ожиданий случайных величин и векторов подробно рассматривались в *главах 4* и *7*. Естественно, они остаются в силе и применительно к случайным функциям и векторным случайным функциям.

Центрированная векторная случайная функция или вектор-столбец центрированных случайных функций образуется в результате вычитания из (8.12) вектора математических ожиданий (8.13):

$$\mathbf{X}^0(t) = \mathbf{X}(t) - \mathbf{m}_X(t). \quad (8.14)$$

Тогда **ковариационной матрицей $\mathbf{P}(t)$ векторной случайной функции (8.12)** будем называть математическое ожидание внешнего произведения векторов (8.14) центрированных случайных функций:

$$\mathbf{P}(t) = M[\mathbf{X}^0(t) \mathbf{X}^{0T}(t)] = \text{cov}[\mathbf{X}(t)]. \quad (8.15)$$

Из определения (8.15), так же, как и для случайных векторов, следует, что матрица (8.15) — симметричная, неотрицательно определенная матрица, которая объединяет все вторые центральные моменты случайных функций, составляющих вектор (8.12). Так, на главной диагонали $\mathbf{P}(t)$ расположены дисперсии элементов вектора (8.12):

$$P_{ii}(t) = M[X_i(t) - m_{xi}(t)]^2 = M[X_i^0(t)]^2 = D[X_i(t)]; i = (1, 2, \dots, n). \quad (8.16)$$

Недиагональными элементами $\mathbf{P}(t)$ служат корреляционные моменты пар разноименных элементов $\mathbf{X}(t)$ при совпадающих значениях аргумента, т. е.

$$P_{ij}(t) = P_{ji}(t) = M[X_i^0(t) X_j^0(t)]; i \neq j; i, j = (1, 2, \dots, n). \quad (8.17)$$

В скалярном случае для случайных функций (*см. разд. 8.2*), кроме математических ожиданий и дисперсий, вводилось понятие корреляционной функции

в качестве характеристики взаимной обусловленности двух различных сечений случайной функции. Понятно, что для векторных случайных функций также следует ввести аналогичное понятие, которое в этом случае имеет название корреляционной матрицы.

Корреляционной (автокорреляционной) матрицей будем называть математическое ожидание внешнего произведения векторов центрированных случайных функций (8.14) с различными значениями аргументов t_1 и t_2 :

$$\mathbf{K}_X(t_1, t_2) = M[\mathbf{X}^0(t_1)\mathbf{X}^{0T}(t_2)]. \quad (8.18)$$

Это понятие может быть расширено на случай двух различных векторов $\mathbf{X}(t)$ и $\mathbf{Y}(t)$, размерности которых могут не обязательно совпадать:

$$\mathbf{K}_{XY}(t_1, t_2) = M[\mathbf{X}^0(t_1)\mathbf{Y}^{0T}(t_2)]. \quad (8.19)$$

Матрица (8.19) носит название **взаимной корреляционной матрицы**.

Рассмотрим основные свойства матриц (8.18), (8.19) и их элементов. Из приведенных определений следует, что для n -мерного вектора (8.12) случайных функций корреляционная матрица (8.18) — не симметричная квадратная, размерности $(n \times n)$. Простым анализом структуры этой матрицы несложно установить, что на главной ее диагонали расположены корреляционные функции (8.6). Так, i -ый диагональный элемент корреляционной матрицы (8.18) равен корреляционной функции случайной функции $X_i(t)$:

$$K_{X_{ii}}(t_1, t_2) = M[X_i^0(t_1)X_i^0(t_2)]. \quad (8.20)$$

Недиагональными элементами матрицы (8.18) служат так называемые **взаимные корреляционные функции**. Так, ij -ый элемент корреляционной матрицы (8.18) содержит взаимную корреляционную функцию

$$K_{X_{ij}}(t_1, t_2) = M[X_i^0(t_1)X_j^0(t_2)], \quad (8.21)$$

которая характеризует взаимосвязь элементов $X_i(t_1)$ и $X_j(t_2)$. Выражение (8.21) может рассматриваться в качестве определения понятия взаимной корреляционной функции. Из (8.21) следует, что взаимная корреляционная функция — это функция двух аргументов t_1 и t_2 , численно равная корреляционному моменту (7.65) соответствующих сечений случайной функции $X_i(t)$ и случайной функции $X_j(t)$. Опираясь на свойства корреляционных функций (8.7)—(8.11) и их обоснования, приведем основные свойства взаимных корреляционных функций без дополнительных пояснений:

1. При одновременной перестановке индексов и аргументов взаимная корреляционная функция не изменяется:

$$K_{X_{ij}}(t_1, t_2) = K_{X_{ji}}(t_2, t_1). \quad (8.22)$$

2. Взаимная корреляционная функция i -го и j -го элементов векторной случайной функции (8.12) при $t_1 = t_2 = t$ равна ij -ому и ji -ому элементам (8.17) ковариационной матрицы (8.15):

$$K_{X_{ij}}(t, t) = M[X_i^0(t)X_j^0(t)] = P_{ij}(t) = P_{ji}(t). \quad (8.23)$$

3. Для случайного $(n \times 1)$ -вектора $\mathbf{X}(t)$ и случайного $(m \times 1)$ -вектора $\mathbf{Y}(t)$ взаимная корреляционная матрица (8.19) $\mathbf{K}_{XY}(t_1, t_2)$ имеет размерность $(n \times m)$.

4. Линейные преобразования случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ вида $S(t) = a(t)X(t) + b(t)$ и $T(t) = c(t)Y(t) + d(t)$, где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ — неслучайные функции, имеют следующую взаимную корреляционную функцию:

$$K_{ST}(t_1, t_2) = a(t_1)c(t_2)K_{XY}(t_1, t_2). \quad (8.24)$$

5. Абсолютная величина взаимной корреляционной функции двух случайных функций не превышает среднего геометрического дисперсий этих функций:

$$|K_{XY}(t_1, t_2)| \leq \sqrt{D[X(t_1)]D[Y(t_2)]}. \quad (8.25)$$

6. Нормированная взаимная корреляционная функция равна:

$$r_{XY}(t_1, t_2) = \frac{K_{XY}(t_1, t_2)}{\sqrt{D[X(t_1)]D[Y(t_2)]}}; |r_{XY}(t_1, t_2)| \leq 1. \quad (8.26)$$

Частным случаем взаимной связи случайных функций является случай их некоррелированности.

Некоррелированными называются две случайные функции, взаимная корреляционная функция которых при произвольных значениях аргументов t_1 и t_2 равна нулю.

Из проведенного анализа структур матриц (8.15), (8.18) и (8.19) следует, что взаимные корреляционные функции при совпадающих и различных значениях аргументов содержатся в недиагональных элементах ковариационной матрицы (8.15) (см. выражение (8.17)) и корреляционной матрицы (8.18) (см. выражение (8.21)) соответственно. Поэтому при некоррелированности элементов вектора $\mathbf{X}(t)$, матрицы $\mathbf{P}(t)$ и $\mathbf{K}_X(t_1, t_2)$ становятся диагональными матрицами с дисперсиями $P_{ii}(t)$ (8.16) и корреляционными функциями $K_{X_{ii}}(t_1, t_2)$ (8.20) в качестве диагональных элементов соответственно.

Из определения матрицы $\mathbf{K}_{XY}(t_1, t_2)$ (8.19) следует, что при некоррелированности элементов векторов $\mathbf{X}(t)$ и $\mathbf{Y}(t)$ взаимная корреляционная матрица $\mathbf{K}_{XY}(t_1, t_2)$ будет нулевой.

8.3.1. Линейные формы случайных функций

Используем подходы, рассмотренные при анализе линейных форм векторных случайных величин (см. разд. 7.6) для аналогичного анализа векторных случайных функций.

Введение ковариационных и корреляционных матриц резко упрощает анализ вторых центральных моментов (которые содержатся в матрицах (8.15), (8.18), (8.19)) линейных форм от векторных случайных функций. Такой анализ позволяет дополнить совокупность свойств (8.5)—(8.11) случаем суммы слу-

чайных функций, взвешенной суммы этих функций и проч. Рассмотрим варианты такого анализа.

Простейшей линейной формой случайных функций служит их сумма. Пусть n -мерная векторная случайная функция $\mathbf{X}(t)$ (8.12) имеет вектор математических ожиданий $\mathbf{m}_x(t)$ (8.13) и ковариационную матрицу $\mathbf{P}(t)$ (8.15). Образует, как и в разд. 7.6, сумму $Y(t)$ элементов векторной случайной функции $\mathbf{X}(t)$ (8.12) с помощью вспомогательной n -мерной строки $\mathbf{h}$ с элементами, равными единице:

$$Y(t) = \mathbf{h}\mathbf{X}(t) = \sum_{i=1}^n X_i(t); \mathbf{h} = |1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1|. \quad (8.27)$$

Тогда, математическое ожидание $Y(t)$ (8.27) примет вид $m_Y(t) = \mathbf{h} \mathbf{m}_x(t)$. Используя вектор центрированных случайных функций $\mathbf{X}^0(t) = \mathbf{X}(t) - \mathbf{m}_x(t)$ (8.14), выразим дисперсию $Y(t)$ следующим образом:

$$D[Y(t)] = M[Y(t) - m_Y(t)]^2 = M[Y^0(t)]^2 = \mathbf{h}\mathbf{P}(t)\mathbf{h}^T, \quad (8.28)$$

где $\mathbf{P}(t)$ — ковариационная матрица (8.15) вектора $\mathbf{X}(t)$; надстрочный символ T обозначает операцию транспонирования.

Выражение (8.28) несложно получить, применяя искусственный прием, который состоит в замене квадрата скалярной функции $Y^0(t)$ произведением этой функции и ее транспонированного значения, т. е. используя формальное равенство $M[Y^0(t)]^2 = M\{Y^0(t)[Y^0(t)]^T\}$. Поскольку транспонирование скалярной величины (функции) не изменяет ее значения, т. е. $Y^0(t) = [Y^0(t)]^T$, такая замена справедлива всегда. Применяя указанный прием и учитывая, что $Y^0(t) = \mathbf{h}\mathbf{X}^0(t)$, запишем

$$D[Y(t)] = M[Y^0(t)Y^{0T}(t)] = M[\mathbf{h}\mathbf{X}^0(t)\mathbf{X}^{0T}(t)\mathbf{h}^T] = \mathbf{h}\mathbf{P}(t)\mathbf{h}^T.$$

Раскрывая полученное выражение, имеем:

$$D[Y(t)] = \sum_{i=1}^n D[X_i(t)] + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n K_{X_{kj}}(t, t). \quad (8.29)$$

Здесь $K_{X_{ij}}(t, t) = P_{ij}(t) = P_{ji}(t)$ — взаимная корреляционная функция (8.23) для одинаковых значений аргументов, равных t . Полученное соотношение дополняет свойства (8.5) дисперсий случайных функций, рассмотренные ранее.

В качестве примера получим на основе (8.28), (8.29) дисперсию суммы элементов двух- и трехмерной векторной случайной функции (8.12). На рис. 8.2 приведены структуры выражения (8.29), полученные для этих примеров в среде Mathcad с использованием операторов символьных вычислений. Как видно из получаемых выражений, дисперсия суммы элементов векторной случайной функции включает в себя сумму дисперсий каждого из элементов и удвоенные взаимные корреляционные функции пар элементов, число которых определяется числом сочетаний из n по два.

$$D_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D_2 \rightarrow P_{11} + 2 \cdot P_{12} + P_{22}$$

$$D_3 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D_3 \rightarrow P_{11} + 2 \cdot P_{12} + 2 \cdot P_{13} + P_{22} + 2 \cdot P_{23} + P_{33}$$

Рис. 8.2. Структура выражений (8.29)

Из полученных соотношений следует, что в случае, когда складываются некоррелированные случайные функции, дисперсия суммы равна сумме дисперсий слагаемых:

$$D[Y(t)] = \sum_{i=1}^n D[X_i(t)]; K_{X_{ij}}(t_1, t_2) = K_{X_{ji}}(t_2, t_1) = 0. \quad (8.30)$$

Выражения (8.28), (8.29) легко обобщаются на случай, когда линейная форма вида (8.27) $\mathbf{Z}(t) = \mathbf{H}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}$ образуется произвольными неслучайными матрицами $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$, размерность которых согласуется с размерностью векторов $\mathbf{X}(t)$ (8.12) и $\mathbf{Z}(t)$. Ковариационная матрица $\mathbf{P}_Z(t)$ результирующего вектора $\mathbf{Z}(t)$ выражается, аналогично (8.28), соотношением вида:

$$\mathbf{P}_Z(t) = \text{cov}[\mathbf{Z}(t)] = \mathbf{H}\mathbf{P}(t)\mathbf{H}^T. \quad (8.31)$$

Задание к самостоятельной работе:

1. Показать, что результирующие выражения для дисперсий (8.28) и ковариационной матрицы (8.30) не изменятся, если линейные формы (8.27) и (8.31) примут вид

$$Y(t) = \mathbf{h}\mathbf{X}(t) + s; \mathbf{Z}(t) = \mathbf{H}\mathbf{X}(t) + \mathbf{S}, \quad (8.32)$$

где s — неслучайная величина (функция), а $\mathbf{S}$ — неслучайный вектор (или векторная функция).

2. Показать, что корреляционная матрица векторной случайной функции $\mathbf{Z}(t) = \mathbf{H}\mathbf{X}(t) + \mathbf{S}$ удовлетворяет соотношению вида:

$$\mathbf{K}_Z(t_1, t_2) = \mathbf{H} \mathbf{K}_X(t_1, t_2) \mathbf{H}^T, \quad (8.33)$$

где $\mathbf{K}_X(t_1, t_2)$ — корреляционная матрица (8.18).

3. Показать, что взаимная корреляционная матрица для векторов

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{H}\mathbf{X}(t) + \mathbf{S}; \mathbf{V}(t) = \mathbf{F}\mathbf{Y}(t) + \mathbf{R}, \quad (8.34)$$

где $\mathbf{S}, \mathbf{R}$ — неслучайные векторы (векторные функции), имеет вид:

$$\mathbf{K}_{ZV}(t_1, t_2) = \mathbf{H} \mathbf{K}_{XY}(t_1, t_2) \mathbf{F}^T; \quad (8.35)$$

причем $\mathbf{K}_{XY}(t_1, t_2)$ — взаимная корреляционная матрица (8.19).

4. Используя выражения (8.27), (8.33), доказать, что корреляционная функция суммы некоррелированных случайных функций равна сумме корреляционных функций слагаемых:

$$K_Y(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^n K_{X_{ii}}(t_1, t_2); K_{X_{ij}}(t_1, t_2) = K_{X_{ji}}(t_2, t_1) = 0. \quad (8.36)$$

5. Показать, что корреляционная функция $K_Y(t_1, t_2)$ суммы элементов (8.27) векторной случайной функции (8.12) включает в себя сумму корреляционных функций вида (8.20) каждого из элементов и взаимные корреляционные функции (8.21) пар элементов, число которых определяется числом размещений из n по два. На рис. 8.3 приведены структуры корреляционной функции $K_Y(t_1, t_2)$ суммы элементов двух- и трехмерной векторной случайной функции (8.12), полученные в среде Mathcad.

$$K_2 := (1 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & \textcolor{red}{k_{22}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$K_2 \rightarrow k_{11} + k_{21} + k_{12} + k_{22}$$

$$K_3 := \left[(1 \ 1 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & \textcolor{red}{k_{33}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$K_3 \rightarrow k_{11} + k_{21} + k_{31} + k_{12} + k_{22} + k_{32} + k_{13} + k_{23} + k_{33}$$

Рис. 8.3. Структура корреляционной функции $K_Y(t_1, t_2)$

8.4. Стационарные случайные функции и их числовые характеристики

При определении случайной функции отмечалось, что в случае, когда в качестве аргумента выступает время (дискретности времени), говорят о случайном процессе (случайной последовательности). Поэтому все, что утверждается для случайных функций, одинаково относится и к случайным процессам и последовательностям.

Среди случайных функций практически важное значение имеет класс так называемых стационарных случайных функций. Этот класс объединяет случайные функции, которые обладают постоянством вероятностных свойств независимо от расположения интервалов наблюдения на оси изменения аргумента t . Определения стационарных случайных функций могут быть даны в узком (строгом) и широком (менее строгом) смыслах. Определение в узком смысле

опирается на многомерный закон распределения случайной функции (см. конец разд. 8.1). Определение в широком смысле использует лишь числовые характеристики случайной функции, ограничиваясь первыми двумя моментами распределения, и поэтому более приближено к практическому применению.

Пусть $X(t)$ — случайная функция, сечения которой при $t_1, t_2, \dots, t_k$ соответствуют случайным величинам $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)$.

Стационарной в узком смысле называют случайную функцию $X(t)$, многомерный закон распределения которой для всех значений аргумента t не изменяется при их замене на $t + \tau$ ($-\infty < \tau < \infty$), т. е. при сдвиге t на произвольный отрезок τ . Так, для многомерной плотности распределения $f_{X(t)}[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_k)]$ это означает $f_{X(t)}[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_k)] = f_{X(t)}[x(t_1 + \tau), x(t_2 + \tau), \dots, x(t_k + \tau)]$.

Данное определение, в частности, свидетельствует, что числовые характеристики, значения которых определяет одно значение t , должны быть независимы от конкретных значений t , а двумерные числовые характеристики — независимы от момента начала отсчета отрезка τ . Отсюда следует определение стационарности в широком смысле.

Стационарной в широком смысле называют случайную функцию, математическое ожидание и дисперсия которой постоянны при всех значениях аргумента t , а корреляционная функция зависит только разности аргументов τ :

$$M[X(t)] = m_X; D[X(t)] = D_X = \sigma_X^2; K_X(t_1, t_2) = K_X(\tau), \quad \tau = t_2 - t_1. \quad (8.37)$$

Таким образом, из определения стационарности случайных функций в узком смысле следует определение стационарности в широком смысле. Обратное утверждение неверно.

Свойства числовых характеристик (8.37) стационарной случайной функции могут быть дополнены рядом свойств $K_X(\tau)$, которые следуют из общих соотношений (8.7)—(8.11) для корреляционных функций (8.6).

8.4.1. Свойства корреляционных функций стационарных случайных функций

1. Корреляционная функция $K_X(\tau)$ (8.37) — четная функция:

$$K_X(\tau) = K_X(-\tau). \quad (8.38)$$

Это утверждение является прямым следствием свойства (8.7) о перестановке индексов и аргументов корреляционной функции (8.6).

2. Дисперсия стационарной случайной функции равна значению корреляционной функции (8.37) при $\tau = 0$:

$$K_X(0) = D_X. \quad (8.39)$$

Это свойство непосредственно следует из (8.8).

3. Модуль корреляционной функции $K_X(\tau)$ (8.37) не превышает значения дисперсии:

$$|K_X(\tau)| \leq D_X. \quad (8.40)$$

Это свойство следует из (8.10).

4. Нормированная корреляционная функция $K_X(\tau)$ (8.37) равна:

$$r_X(\tau) = \frac{K_X(\tau)}{D_X}; |r_X(\tau)| \leq 1. \quad (8.41)$$

В отличие от корреляционных функций, взаимные корреляционные функции стационарных случайных функций в общем случае не являются функциями только разности аргументов τ . В том случае, когда взаимная корреляционная функция $K_{Xij}(t_1, t_2)$ (8.21) двух случайных функций $X_i(t)$ и $X_j(t)$ зависит только от $\tau = t_2 - t_1$, функции $X_i(t)$ и $X_j(t)$ называют **стационарно связанными**. Их взаимная корреляционная функция

$$K_{Xij}(t_1, t_2) = K_{Xij}(t_2 - t_1) = K_{Xij}(\tau). \quad (8.42)$$

Из свойства (8.22) об одновременной перестановке индексов и аргументов взаимных корреляционных функций следует, что взаимная корреляционная функция (8.42) стационарно связанных случайных функций $X_i(t)$ и $X_j(t)$ обладает следующим свойством:

$$K_{Xij}(\tau) = K_{Xji}(-\tau). \quad (8.43)$$

Если каждая из случайных функций $X_i(t)$ и $X_j(t)$ стационарна, а их взаимная корреляционная функция удовлетворяет выражению (8.42), функции $X_i(t)$ и $X_j(t)$ называют **стационарными и стационарно связанными**.

Рассмотрим примеры анализа стационарных случайных функций.

Пример 8.1. Заданы случайные функции $X(t) = \sin(\omega t + \varphi)$ и $Y(t) = \cos(\omega t + \varphi)$, где φ — случайная величина, распределенная равномерно на интервале $(0, 2\pi)$, а ω — неслучайная круговая частота. Показать, что $X(t)$ и $Y(t)$ — стационарные случайные функции с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями, равными 0.5.

□ Решение. Получим решение, опуская очевидные выкладки. Раскрывая синус и косинус суммы двух аргументов, нетрудно убедиться, что математические ожидания заданных случайных функций полностью определяются математическими ожиданиями $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$, которые равны:

$$M(\sin \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \varphi \, d\varphi = 0; \quad M(\cos \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi = 0. \quad (8.44)$$

Из (8.44) следует, что математические ожидания функций $X(t)$ и $Y(t)$ равны нулю. В силу этого дисперсии функций $X(t)$ и $Y(t)$ равны математическим ожиданиям от квадратов функций, т. е. от $[\sin^2(\omega t + \varphi)$ и $\cos^2(\omega t + \varphi)]$.

Раскрывая $\sin^2(\omega t + \varphi)$ и $\cos^2(\omega t + \varphi)$ и определяя математические ожидания от слагаемых, убеждаемся, что дисперсии функций $X(t)$ и $Y(t)$ определяются математическими ожиданиями функций $\sin^2 \varphi$, $\cos^2 \varphi$ и $(\sin \varphi \cdot \cos \varphi)$. Эти математические ожидания равны:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi = 0.5; \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi = 0. \quad (8.45)$$

В результате искомые дисперсии будут равны:

$$D_X = D_Y = 0.5 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = 0.5. \quad (8.46)$$

Корреляционная функция $X(t)$ будет определяться в нашем случае выражением вида:

$$K_X(t_1, t_2) = M[X(t_1)X(t_2)] = M[\cos^2\phi]\sin(\omega t_1)\sin(\omega t_2) + \\ + M[\sin^2\phi]\cos(\omega t_1)\cos(\omega t_2) + M[\sin\phi \cdot \cos\phi] \cdot [\sin(\omega t_1)\cos(\omega t_2) + \cos(\omega t_1)\sin(\omega t_2)].$$

Учитывая (8.45), математические ожидания в первых двух слагаемых выражения для $K_X(t_1, t_2)$ равны 0.5, а третье слагаемое равно нулю. Окончательно для $K_X(t_1, t_2)$ получаем:

$$K_X(t_1, t_2) = 0.5\cos(t_1 - t_2) = 0.5\cos(t_2 - t_1). \quad (8.47)$$

Осуществляя аналогичные выкладки для $Y(t)$, получим результат, совпадающий с (8.47):

$$K_Y(t_1, t_2) = 0.5\cos(t_1 - t_2) = 0.5\cos(t_2 - t_1). \quad (8.48)$$

Таким образом, показано, что заданные случайные функции — стационарные с нулевыми математическими ожиданиями (8.44). ■

Решение подобных задач упрощается при использовании программных систем компьютерной математики. В качестве иллюстрации этого приведем небольшой фрагмент решения задачи 8.1 в среде Mathcad. На рис. 8.4 приведена программа символьного вычисления математических ожиданий и дисперсий функций $X(t)$ и $Y(t)$.

$X(t) := \sin(\omega \cdot t + \phi)$ $M(t) := \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\int_0^{2 \cdot \pi} X(t) \, d\phi \right)$ $D(t) := \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\int_0^{2 \cdot \pi} X(t)^2 \, d\phi \right)$ $M(t) \rightarrow 0$ $D(t) \rightarrow \frac{1}{2}$	$Y(t) := \cos(\omega \cdot t + \phi)$ $M1(t) := \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\int_0^{2 \cdot \pi} Y(t) \, d\phi \right)$ $D1(t) := \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\int_0^{2 \cdot \pi} Y(t)^2 \, d\phi \right)$ $M1(t) \rightarrow 0$ $D1(t) \rightarrow \frac{1}{2}$
$X(t) \text{ expand } \phi \rightarrow \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos \phi + \cos(\omega \cdot t) \cdot \sin \phi$ $\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} \cos \phi \, d\phi \rightarrow 0$ $\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\int_0^{2 \cdot \pi} \sin \phi \, d\phi \right) \rightarrow 0$ M cos φ M sin φ	

Рис. 8.4. Фрагмент решения задачи 8.1

Справа (см. рис. 8.4) показаны детали выражения для математического ожидания $X(t)$, дающие основание считать, что это математическое ожидание равно нулю.

Пример 8.2. Используя результаты, полученные при решении примера 8.1, показать, что стационарные случайные функции $X(t) = \sin(\omega t + \varphi)$ и $Y(t) = \cos(\omega t + \varphi)$, где φ — случайная величина, распределенная равномерно на интервале $(0, 2\pi)$, а ω — неслучайная круговая частота, стационарно связанные. Предоставляем читателю решить задачу 8.2 самостоятельно.

8.4.2. Спектральная плотность

С понятием корреляционной функции стационарных случайных функций тесно связана еще одна важнейшая числовая характеристика — спектральная плотность, позволяющая охарактеризовать гармонический состав стационарной случайной функции.

Существует два основных определения спектральной плотности.

Спектральной плотностью стационарной случайной функции $X(t)$ называют функцию $S_X(\omega)$, которая связана с корреляционной функцией $K_X(\tau)$ взаимно обратными преобразованиями Фурье:

$$S_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau; \quad (8.49)$$

$$K_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (8.50)$$

Формулы (8.49), (8.50) носят название формул Винера—Хинчина. Для действительной стационарной функции, на основании формул Эйлера, выражения (8.49) и (8.50) могут быть переписаны в виде, представляющем собой взаимно обратные косинус-преобразования Фурье:

$$S_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau) \cos \omega \tau d\tau; \quad (8.51)$$

$$K_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \quad (8.52)$$

Приведенные выражения свидетельствуют о тесной связи корреляционных функций и спектральных плотностей стационарных случайных функций: зная одну характеристику, мы однозначно определяем другую. Значение спектральной плотности этим не исчерпывается. Как будет показано ниже (см. разд. 8.6), спектральная плотность служит важнейшим элементом одного из методов решения проблемы генерации случайных функций с заданными корреляционными свойствами. Кроме того, на основе спектрального анализа сигналов решаются задачи синтеза устройств (алгоритмов) фильтрации нежелательных составляющих при создании программного и аппаратного обеспечения различных информационно-измерительных систем.

Приведенные определения $S_X(\omega)$ позволяют установить основные свойства спектральной плотности.

Из выражений (8.49)—(8.52) следует, что $S_X(\omega) \geq 0$. Кроме того, спектральная функция — четная функция, т. е. $S_X(\omega) = S_X(-\omega)$, поэтому (8.51) и (8.52) можно переписать в форме:

$$S_X(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K_X(\tau) \cos \omega \tau d\tau; \quad (8.53)$$

$$K_X(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S_X(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \quad (8.54)$$

Рассматривая (8.52) и (8.54) при $\tau = 0$, получаем формулу для определения дисперсии $K_X(0) = D_X$ стационарной случайной функции $X(t)$ в виде интеграла от спектральной плотности:

$$D_X = 2 \int_0^{\infty} S_X(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) d\omega. \quad (8.55)$$

Выражение (8.55) позволяет заключить, что спектральная плотность описывает распределение дисперсий отдельных гармонических составляющих стационарной случайной функции по непрерывно изменяющейся частоте.

Пример 8.3. Стационарная случайная функция $X(t)$ имеет корреляционную функцию вида $K_X(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha |\tau|}$, где $\alpha > 0$. Для $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$ найти спектральные плотности функции $X(t)$ и построить графики $K_X(\tau)$, $S_X(\omega)$ в среде Mathcad.

□ Для нахождения спектральной плотности применим формулу (8.49). По определению абсолютной величины имеем:

$$\begin{aligned} |\tau| = -\tau, K_X(\tau) &= \sigma^2 e^{\alpha \tau}, \text{ при } \tau < 0; \\ |\tau| = \tau, K_X(\tau) &= \sigma^2 e^{-\alpha \tau}, \text{ при } \tau \geq 0. \end{aligned}$$

Это обеспечивает возможность разбиения в (8.49) интеграла на сумму двух интегралов в пределах $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$. На рис. 8.5 для удобства последующих вычислений искомая спектральная плотность обозначена через $S(\omega, \alpha)$. Получение выражений $S(\omega, \alpha)$ при $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$ осуществляется вначале с помощью символьного оператора Mathcad **expand**, а затем — с добавлением оператора **collect** для вынесения общего множителя π .

Результаты вычислений позволяют заключить, что искомая спектральная плотность, при произвольном значении $\alpha > 0$, удовлетворяет выражению:

$$S_X(\omega) = \frac{\alpha \sigma^2}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}. \quad (8.56)$$

На рис. 8.6 приведены графики $K_X(\tau)$, $S_X(\omega)$ для двух значений α и $\sigma^2 = 1$.

В случае, когда рассматриваются две стационарные и стационарно связанные случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$, имеющие взаимную корреляционную

функцию $K_{XY}(\tau)$, то они могут быть дополнительно охарактеризованы взаимной спектральной плотностью.

$$S_{|\omega, \alpha|} := \frac{\sigma^2}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^0 e^{|\alpha \cdot \tau|} \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot \tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-|\alpha \cdot \tau|} \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot \tau} d\tau \right]$$

$$S_{|\omega, 1|} \text{ expand} \rightarrow \frac{\sigma^2}{\pi + \pi \cdot \omega^2} \quad S_{|\omega, 2|} \text{ expand} \rightarrow 2 \cdot \frac{\sigma^2}{4 \cdot \pi + \pi \cdot \omega^2}$$

$S_{ \omega, 1 } \left \begin{array}{l} \text{expand} \\ \text{collect, } \pi \end{array} \right. \rightarrow \frac{\sigma^2}{\pi \cdot 1 + \omega^2}$	$S_{ \omega, 2 } \left \begin{array}{l} \text{expand} \\ \text{collect, } \pi \end{array} \right. \rightarrow 2 \cdot \frac{\sigma^2}{\pi \cdot 4 + \omega^2}$

Рис. 8.5. Фрагмент решения задачи 8.3 в среде Mathcad

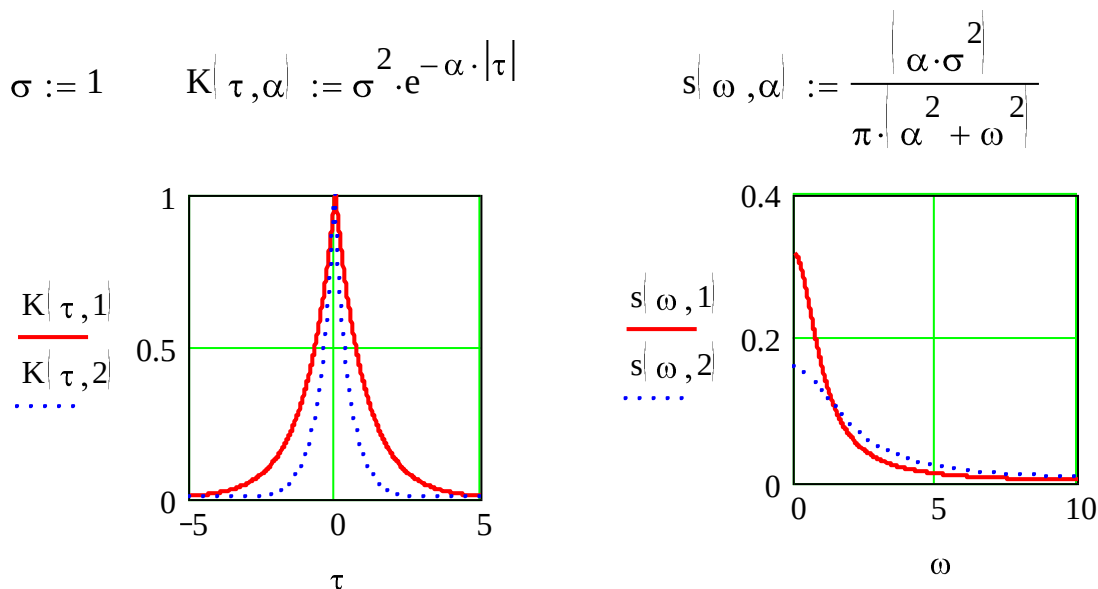


Рис. 8.6. Графики $K_X(\tau)$, $S_X(\omega)$ задачи 8.3

Взаимной спектральной плотностью двух стационарных и стационарно связанных случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$, имеющих взаимную корреляционную функцию $K_{XY}(\tau)$, называют функцию $S_{XY}(\omega)$, которая удовлетворяет преобразованию Фурье вида:

$$S_{XY}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{XY}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (8.57)$$

Обратное преобразование Фурье взаимной спектральной плотности (8.57) определяет взаимную корреляционную функцию:

$$K_{XY}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (8.58)$$

Завершая раздел о числовых характеристиках стационарных случайных функций, кратко остановимся на векторных стационарных случайных функциях. Для них остаются справедливыми все ранее отмеченные условия стационарности, которые теперь должны быть сформулированы в виде соответствующих векторов и матриц. Приведем для векторных случайных функций лишь условия стационарности в широком смысле.

Стационарной в широком смысле называют векторную случайную функцию $\mathbf{X}(t)$, вектор математических ожиданий (8.13) и ковариационная матрица (8.15) которой постоянны при всех значениях аргумента t , а корреляционная матрица (8.18) зависит только от разности аргументов τ :

$$M[\mathbf{X}(t)] = \mathbf{m}_X = \mathbf{const}; \quad (8.59)$$

$$M[\mathbf{X}^0(t)\mathbf{X}^{0T}(t)] = \text{cov}[\mathbf{X}(t)] = \mathbf{P} = \mathbf{const}; \quad (8.60)$$

$$M[\mathbf{X}^0(t_1)\mathbf{X}^{0T}(t_2)] = \mathbf{K}_X(t_1, t_2) = \mathbf{K}_X(\tau), \tau = t_2 - t_1. \quad (8.61)$$

Здесь **const** означает постоянную матрицу или вектор.

Условия стационарности (8.59)—(8.61), в частности, свидетельствуют, что элементами векторной стационарной случайной функции $\mathbf{X}(t)$ должны быть стационарные и стационарно связанные случайные функции. Это следует из анализа отдельных элементов вектора математических ожиданий $\mathbf{m}_X$, ковариационной $\mathbf{P}$ и корреляционной $\mathbf{K}_X(\tau)$ матриц.

8.5. Случайный процесс типа белого шума. Дельта-функция

В практике анализа случайных процессов часто используются стационарные процессы, спектральные плотности которых постоянны в определенном диапазоне частот. Такие процессы применяются для имитации случайных высокочастотных воздействий, для аппроксимации случайных процессов с медленно меняющимися спектральными плотностями в исследуемом диапазоне частот. Частоты вне рассматриваемого диапазона постоянства спектральной плотности при таком анализе обычно не представляют интереса.

Пусть случайный процесс $w(t)$ имеет постоянную спектральную плотность $S_w(\omega) = S = \text{const}$.

Определим корреляционную функцию, которая соответствует такой спектральной плотности. По формуле (8.50) имеем:

$$K_w(\tau) = S \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (8.62)$$

В связи с полученным выражением вводят понятие дельта-функции (дельта-функции Дирака)

$$\delta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (8.63)$$

Тогда выражение (8.62) можно записать как:

$$K_w(\tau) = 2\pi S \delta(\tau). \quad (8.64)$$

Стационарный процесс с постоянной спектральной плотностью или, что то же, с корреляционной функцией вида (8.64), называют **процессом типа белого шума** (или просто — белым шумом). Свое название этот процесс получил по аналогии с частотным спектром белого света.

Множитель при дельта-функции в (8.64)

$$Q = 2\pi S \quad (8.65)$$

называют **интенсивностью белого шума**.

Дельта-функция обладает свойством ставить в соответствие произвольной функции $\varphi(t)$ ее значение при $t = t_0$:

$$\int_a^b \varphi(t) \delta(t-t_0) dt = \int_a^b \varphi(t) \delta(t_0-t) dt = \varphi(t_0); \quad 0 < b < \infty, -\infty < a < 0. \quad (8.66)$$

В частном случае, при $t_0 = 0$, свойство дельта-функции (8.66) запишется следующим образом:

$$\int_a^b \varphi(t) \delta(t) dt = \varphi(0). \quad (8.67)$$

Правую часть (8.67) можно представить в форме:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \delta_{\varepsilon}(t) dt, \quad \varepsilon > 0,$$

$$\text{где } \delta_{\varepsilon}(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } |t| \geq \varepsilon; \\ \frac{1}{2\varepsilon}, & \text{при } |t| < \varepsilon. \end{cases} \quad (8.68)$$

Таким образом, вспомогательная функция $\delta_{\varepsilon}(t)$ имеет форму прямоугольного импульса с осью симметрии в точке $t = 0$, основанием 2ε и высотой $1/2\varepsilon$ (см. рис. 8.7). Площадь этого импульса равна единице:

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_{\varepsilon}(t) dt = 1. \quad (8.69)$$

Дельта-функцию можно выразить как предел функции $\delta_{\varepsilon}(t)$ при устремлении ε к нулю:

$$\delta(\tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_{\varepsilon}(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \neq 0; \\ \infty, & \text{при } t = 0. \end{cases} \quad (8.70)$$

Второй знак равенства — условный. Выражения (8.68)—(8.70) дают также основание условно считать, что интеграл от дельта-функции в бесконечных пределах равен единице.

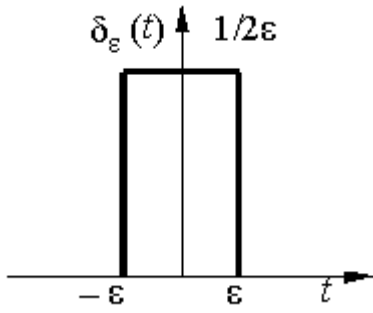


Рис. 8.7. Вид функции $\delta_\epsilon(t)$

Белый шум, как следует из приведенных соотношений, представляет собой идеализацию случайных процессов. В природе таких случайных процессов нет. Действительно, вне точки $t = 0$ дельта-функция $\delta(\tau) = 0$. Это означает, что бесконечно близкие сечения случайной функции, представляющей белый шум, должны быть некоррелированы в силу равенства нулю $K_w(\tau)$ (8.64). Белый шум, как следует из приведенных соотношений, представляет собой идеализацию случайных процессов.

В природе таких случайных процессов нет. Действительно, вне точки $t = 0$ дельта-функция $\delta(\tau) = 0$. Это означает, что бесконечно близкие сечения случайной функции, представляющей белый шум, должны быть некоррелированы в силу равенства нулю $K_w(\tau)$ (8.64). Понятно, что реальные процессы не обладают подобным свойством и чем ближе рассматриваемые сечения друг к другу, тем больше оснований считать их коррелированными. Но введенная идеализация позволяет решать множество важных практических задач исследования случайных функций, поэтому понятие белого шума имеет большое значение в теории случайных функций, процессов и последовательностей. Как отмечалось, процессы белого шума часто используются в качестве допустимого приближения реальных процессов в ограниченном диапазоне частот, в котором спектральная плотность меняется незначительно.

Следует отметить, что понятие дельта-функции распространяется и на случайные последовательности. Так, если w_k — стационарная случайная последовательность ($k = 0, 1, 2, \dots, i, \dots, j, \dots$) с некоррелированными элементами, то корреляционная функция этой последовательности равна

$$K_{ij} = M(w_i^0 w_j^0) = Q_1 \delta_{ij}, \quad (8.71)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, равный единице при $i = j$ и нулю в остальных случаях:

$$\delta_{ij} = \{1, \text{при } i = j; 0, \text{при } i \neq j\}. \quad (8.72)$$

Последовательность с корреляционной функцией вида (8.71) носит название **стационарной случайной последовательности типа дискретного белого шума**. Множитель Q_1 при символе Кронекера в (8.71) называют интенсивностью дискретного белого шума. Нетрудно убедиться в том, что Q_1 — дисперсия стационарной последовательности w_k .

Заканчивая этот раздел, посвященный введению понятий белого шума и дельта-функции, отметим, что в ряде задач исследования случайных функций и процессов используются белые шумы с единичной интенсивностью (8.65), т. е. $Q = 1$. Спектральная плотность таких белых шумов будет обозначаться S_0 . Таким образом, из (8.65) следует, что спектральная плотность белого шума с единичной интенсивностью равна:

$$S_0 = 1/2\pi. \quad (8.73)$$

Такие процессы обычно используются в качестве входных в задачах генерации случайных процессов с заданными корреляционными свойствами (см. разд. 8.7).

Широкий круг задач исследования систем со случайными воздействиями использует векторные белые шумы. Согласно условиям стационарности (8.59)—(8.61), вектор белых шумов является стационарной векторной случайной функцией (процессом), элементы которой — стационарные и стационарно связанные случайные функции (процессы). Корреляционная матрица векторного процесса $\mathbf{w}(t)$ типа белого шума, в силу (8.61), (8.64) и (8.65), запишется следующим образом:

$$M[\mathbf{w}^0(t_1)\mathbf{w}^{0T}(t_2)] = \mathbf{K}_w(t_1, t_2) = \mathbf{Q} \delta(\tau), \tau = t_2 - t_1, \quad (8.74)$$

где $\delta(\tau)$ — дельта-функция (8.63), а постоянная матрица $\mathbf{Q}$ носит название **матрицы интенсивностей**.

Аналогично, для векторной последовательности типа векторного дискретного белого шума $\mathbf{w}_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, i, \dots, j, \dots$) корреляционная матрица выразится, согласно (8.71), как:

$$\mathbf{K}_{ij} = M[\mathbf{w}_i^0 (\mathbf{w}_j^0)^T] = \mathbf{Q}_1 \delta_{ij}, \quad (8.75)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера (8.72), а постоянная матрица $\mathbf{Q}_1$ также носит название матрицы интенсивностей. Нетрудно заметить, что, в отличие от непрерывного векторного белого шума, матрица $\mathbf{Q}_1$ — ковариационная матрица векторной стационарной последовательности $\mathbf{w}_k$, содержащая дисперсии элементов вектора $\mathbf{w}_k$ на главной диагонали.

8.6. Преобразование случайных процессов линейными динамическими системами. Ковариационное уравнение

Современная теория систем включает в качестве одной из основных составляющих широкий круг задач анализа реакций динамических систем на случайные воздействия различного рода. Динамическая система со случайными воздействиями была определена нами ранее (см. разд. 8.1) как **стохастическая система** (СС). Анализ и синтез СС как обширная составляющая современной теории систем гармонически опирается на элементы теории систем управления, теорию вероятностей и теорию случайных процессов. Возникающие при этом задачи (оценка состояний СС, стохастическое управление, анализ и синтез измерительных и управляющих систем и проч.) рассматриваются в специальных дисциплинах, которые обычно изучаются после освоения основных разделов высшей математики. Связующим звеном между этими специальными дисциплинами и теорией вероятностей служит раздел, в котором рассматриваются основные понятия, характеристики и модели случайных процессов.

Детальный анализ случайных процессов составляет сущность теории (см., например, [7, 15]), которая активно развивается. В этом разделе остановимся лишь на малой части теории случайных процессов — на основных элементах анализа линейных СС, преследуя цель дать наиболее распространенные подходы к решению часто встречающихся прикладных задач этого класса. Учитывая высокую сложность теоретических обоснований этих подходов, некоторые их основания ниже лишь упоминаются и делаются ссылки на соответствующие источники.

В современной теории систем наибольшее применение нашли методы исследования СС, опирающиеся на концепцию пространства состояний и связанные с ней временные методы анализа [10, 12, 13]. При этом ось времени предполагается непрерывной (для непрерывных СС) или дискретной (для дискретных СС). Математическими моделями непрерывных и дискретных СС служат дифференциальные и разностные уравнения соответственно.

Наиболее значимые результаты в решении прикладных задач анализа и синтеза СС получены при использовании математических моделей СС в форме Коши (см., например, [12, 13]). Эти модели и подходы к анализу СС на их основе рассматриваются ниже в разд. 8.6.1 и 8.6.2.

С другим типом моделей СС — в форме стохастических дифференциальных уравнений Ито и Стратоновича можно ознакомиться в [14]. Рассмотрим основные положения анализа СС на основе моделей в форме Коши.

8.6.1. Непрерывные стохастические системы

Линейная непрерывная стохастическая система (ЛНСС), как и детерминированная динамическая система, может быть задана в одной из взаимно обратных форм — в виде передаточных функций (матриц) или систем линейных дифференциальных уравнений. В достаточно общем случае модель ЛНСС может быть представлена в форме системы дифференциальных уравнений первого порядка (форме Коши) [12]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{w} + \mathbf{C}\mathbf{u}; \quad \mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x}; \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (8.76)$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ — n -мерный вектор состояний, $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ — m -мерный вектор выходных величин, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ — l -мерный вектор входных (управляющих воздействий), $\mathbf{w} = \mathbf{w}(t)$ — r -мерный вектор входных белых шумов с матрицей интенсивностей $\mathbf{Q}$:

$$M[\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(\tau)] = \mathbf{Q} \delta(t - \tau). \quad (8.77)$$

Матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{Q}$ — неслучайные, соответствующих размерностей, а вектор $\mathbf{x}(0)$ не зависит от $\mathbf{w}$.

Без потери общности предположим, что вектор $\mathbf{u}$ — детерминированный, а вектор $\mathbf{w}$ имеет нулевое математическое ожидание. Ковариационная матрица вектора $\mathbf{x}$, по определению (8.15) равна:

$$\mathbf{P}(t) = M[\chi(t)\chi^T(t)] = \text{cov}[\mathbf{x}(t)]; \quad \chi(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{m}_x(t), \quad (8.78)$$

где $\mathbf{m}_x(t)$ — математическое ожидание вектора $\mathbf{x}(t)$.

Начальная ковариационная матрица

$$\mathbf{P}(0) = M[\chi(0) \chi^T(0)] = \text{cov}[\mathbf{x}(0)] \quad (8.79)$$

отражает неопределенность начального состояния системы (8.76). Бóльшая неопределенность соответствует бóльшим значениям дисперсий элементов $\mathbf{x}(0)$ (диагональных элементов $\mathbf{P}(0)$). При некоррелированных составляющих вектора $\mathbf{x}(0)$ матрица $\mathbf{P}(0)$ — диагональная. Недиагональные элементы матрицы (8.79), в силу свойства (8.25) корреляционных моментов, удовлетворяют неравенствам $|\mathbf{P}_{ij}(0)| \leq \sigma_i \sigma_j$, где σ_i — среднее квадратическое отклонение i -го элемента вектора $\mathbf{x}(0)$.

Выше отмечалось, что форма (8.76) наиболее широко используется при решении прикладных задач. В системах управления динамических объектов (летательные аппараты, морские подвижные объекты, энергетические агрегаты, объекты химической промышленности и проч.) используются устройства и алгоритмы обработки информации на основе математических моделей вида (8.76). Однако эта форма все же нуждается в комментариях, которые касаются понятия производной случайной функции и допустимости введения белых шумов в правые части дифференциальных уравнений.

Эти вопросы освещаются в прил. 5, где показывается, что необходимым и достаточным условием дифференцируемости случайной функции служит существование производной ее математического ожидания и второй смешанной производной ее корреляционной функции. Далее будем предполагать, что эти условия удовлетворяются.

Уравнения (8.76) описывают динамику системы, поэтому моменты распределения векторных случайных функций $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$ также являются функциями времени и могут быть представлены дифференциальными уравнениями. Получим эти уравнения в предположении постоянства элементов матрицы $\mathbf{A}$ в (8.76); это предположение несколько упростит последующие преобразования, однако вид полученных выражений будет справедлив и для матриц $\mathbf{A}(t)$.

Используя свойства (7.54)—(7.58) математических ожиданий и свойство производной случайной функции (см. прил. 5) $\dot{\mathbf{m}}_x = M(\dot{\mathbf{x}})$, при сделанных предположениях о свойствах модели (8.76) уравнение для первых начальных моментов (математических ожиданий) вектора $\mathbf{x}(t)$ может быть записано в форме:

$$\dot{\mathbf{m}}_x = \mathbf{A}\mathbf{m}_x + \mathbf{C}\mathbf{u}; \quad \mathbf{m}_y = \mathbf{H}\mathbf{m}_x; \quad M[\mathbf{x}(0)] = \mathbf{m}_x(0). \quad (8.80)$$

Полученное уравнение позволяет осуществить полный анализ динамики поведения рассматриваемой системы в среднем.

Получим теперь соотношения, на основе которых могут вычисляться элементы ковариационной матрицы $\mathbf{P}(t)$. С этой целью сначала воспользуемся ее определением (8.78), т. е. получим общий вид $\mathbf{P}(t)$. Согласно (8.76) и (8.78), вектор $\chi(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению вида:

$$\dot{\chi} = \mathbf{A}\chi + \mathbf{B}\mathbf{w}; \quad \chi(0) = \mathbf{x}(0) - \mathbf{m}_x(0), \quad (8.81)$$

решением которого служит ($\mathbf{A}$ — постоянная матрица)

$$\chi(t) = \Phi(t)\chi(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{w}(\tau)d\tau. \quad (8.82)$$

Здесь $\Phi(t) = \exp(\mathbf{A}t)$ — матричная экспонента. Подставляя решение (8.72) в (8.78), после преобразований получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) = & \Phi(t)\mathbf{P}(0)\Phi^T(t) + M\left[\int_0^t d\tau \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{w}(\tau) \mathbf{w}^T(v)\mathbf{B}^T \Phi^T(t-v)dv\right] + \\ & + \Lambda(t) + \Lambda^T(t), \quad \Lambda(t) = M\left[\Phi(t)\chi(0) \int_0^t \mathbf{w}^T(\tau)\mathbf{B}^T \Phi^T(t-\tau)d\tau\right]. \end{aligned} \quad (8.83)$$

Матрицы $\Phi(t)$, $\Phi(t-\tau)$ в (8.83) неслучайные, могут быть вынесены за пределы оператора математического ожидания по свойствам математического ожидания (см. разд. 4.5 и разд. 7.5). Анализ получающегося выражения показывает, что $\Lambda(t) = 0$ ввиду независимости векторов $\chi(0)$ и $\mathbf{w}(\tau)$. Кроме того, учитывая свойство (8.66) дельта-функции, согласно которому для произвольной функции $\varphi(x)$

$$\int_a^b \varphi(x)\delta(x-c)dx = \varphi(c); \quad a < c < b,$$

выражение (8.83) с использованием (8.77) окончательно преобразуется к виду:

$$\mathbf{P}(t) = \Phi(t)\mathbf{P}(0)\Phi^T(t) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{B}^T \Phi^T(t-\tau)d\tau. \quad (8.84)$$

Для упрощения последующих выкладок введем обозначения:

$$\mathbf{R}_0(t) = \Phi(t)\mathbf{P}(0)\Phi^T(t); \quad \mathbf{R}(t-\tau) = \Phi(t-\tau)\mathbf{Q}^*\Phi^T(t-\tau); \quad \mathbf{Q}^* = \mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{B}^T. \quad (8.85)$$

Общее решение (8.84) для ковариационной матрицы вектора состояний системы (8.76) позволяет получать значения матрицы $\mathbf{P}(t)$ как функции времени. Это важно при анализе переходных процессов дисперсий и других вторых центральных моментов элементов вектора $\mathbf{x}(t)$ в широком классе практических задач исследования стохастических систем. Однако практика использования уравнения (8.84) с этой целью показывает, что значительно более удобным является применение матричного дифференциального уравнения (МДУ), решением которого служит (8.84). Для получения МДУ продифференцируем по времени выражение (8.84).

При дифференцировании правой части (8.84) будем учитывать обозначения (8.85) и известные свойства матричной экспоненты

$$\dot{\Phi}(t) = \mathbf{A}\Phi(t); \quad \dot{\Phi}(t-\tau) = \mathbf{A}\Phi(t-\tau); \quad \Phi(0) = \mathbf{E}, \quad (8.86)$$

где $\mathbf{E}$ — единичная матрица порядка n .

Дифференцирование второго слагаемого правой части (8.84) необходимо осуществить с применением известной формулы дифференцирования интеграла по параметру:

$$\frac{d}{dt} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \varphi(t,\tau)d\tau = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t,\tau)d\tau + \beta'(t)\varphi[\beta(t),t] - \alpha'(t)\varphi[\alpha(t),t]. \quad (8.87)$$

С учетом (8.86), (8.87) и обозначений (8.85), а также того, что в нашем случае $\beta(t) = t$; $\alpha(t) = 0$; $\beta'(t) = 1$, дифференцирование (8.84) дает:

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{R}_0(t) + \mathbf{R}_0(t)\mathbf{A}^T + \int_0^t [\mathbf{A}\mathbf{R}(t-\tau) + \mathbf{R}(t-\tau)\mathbf{A}^T] d\tau + \mathbf{Q}^*,$$

откуда окончательно получаем матричное дифференциальное уравнение вида:

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{B}^T; \mathbf{P}(0) = \text{cov}[\mathbf{x}(0)]. \quad (8.88)$$

Полученное уравнение носит название **ковариационного уравнения**.

Ковариационная матрица выходных переменных $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x}$, в силу (8.79) и (8.31), находится из очевидного соотношения:

$$\mathbf{P}_y(t) = \mathbf{H}\mathbf{P}(t)\mathbf{H}^T. \quad (8.89)$$

Уравнения (8.80) и (8.88), (8.89) имеют весьма большое значение при анализе динамических систем со случайными воздействиями. Действительно, полученные выражения позволяют осуществлять полный анализ динамики изменения средних значений и центральных моментов второго порядка элементов вектора $\mathbf{x}(t)$ состояний системы (8.76) и выходных переменных. Анализ осуществляется путем интегрирования формы Коши (8.80) и матричного уравнения (8.88) для ковариационной матрицы. В процессе анализа могут быть исследованы динамические свойства первых и вторых моментов распределения векторов $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$, их установившиеся значения (при их наличии), оценено влияние уровней шумов и параметрических вариаций на решения, определена чувствительность, устойчивость системы и проч.

Следует отметить, что динамика изменения переменных в уравнениях (8.80) и (8.88) отличается. Можно показать [17], что вторые центральные моменты распределения вектора состояния системы (8.76) имеют вдвое более быструю динамику изменения по сравнению с динамикой исходной системы или системы (8.80). Так, если рассматривается устойчивая система (8.76), то переходные процессы, которые определяются ковариационным уравнением (8.88) и характеризуют изменение во времени вторых центральных моментов распределения вектора $\mathbf{x}(t)$, достигнут своих установившихся значений вдвое быстрее, чем элементы вектора математических ожиданий, удовлетворяющие уравнению (8.80). Для подтверждения этого положения уравнения (8.80) и (8.88) должны быть представлены в единой форме, т. е. матричное ковариационное уравнение (8.88) должно быть преобразовано в **эквивалентную форму Коши** (см. пример 2, прил. 5) с матрицей динамики $\mathbf{A}_p$. Интегрируя эти уравнения, можно убедиться в ускорении динамики изменений элементов $\mathbf{P}(t)$.

При исходном n -мерном векторе состояний системы (8.76), ковариационная матрица $\mathbf{P}(t)$ содержит n^2 элементов. Однако, в силу симметричности ковариационной матрицы $\mathbf{P}(t)$, эквивалентная (8.88) форма Коши имеет лишь $n_p = n(n+1)/2$ уравнений, а матрица $\mathbf{A}_p$ эквивалентной формы Коши будет иметь порядок n_p . Так, для случая $\mathbf{A} = \text{const}$, после приведения матричного уравнения (8.88) к форме Коши, сопоставление динамических свойств систем (8.80) и (8.88) можно осуществить путем сравнения собственных чисел матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}_p$. Такое сопоставление [17] показывает, что

° n собственных чисел матрицы $\mathbf{A}_p$ образуются удвоением собственных чисел матрицы $\mathbf{A}$;

° остальные $n(n-1)/2$ собственных числа матрицы $\mathbf{A}_p$ образуются попарными суммами собственных чисел матрицы $\mathbf{A}$.

Выявленное свойство является важным как для понимания характера процессов, протекающих в стохастической системе, так и для численного интегрирования систем (8.76), (8.80) и (8.88), (8.89). Это свойство означает, что при выбранном, исходя из динамики систем (8.76), (8.80), шаге дискретности T , моделирование уравнений (8.88) должно осуществляться с шагом дискретности $T_p \leq T/2$.

Как отмечалось, полученные выражения позволяют, кроме переходных процессов, определять и установившиеся значения моментов распределений. Предположим, что система (8.76) — устойчивая, а входные (управляющие) воздействия имеют конечные установившиеся значения $\mathbf{u}(\infty)$. Тогда, при ранее сделанных предположениях, установившиеся значения математических ожиданий $\mathbf{m}_x$ вектора состояния системы (8.76) и выходных переменных определяются из (8.80) при условии $\dot{\mathbf{m}}_x = \mathbf{0}$, т. е. соотношениями вида:

$$\mathbf{m}_x(\infty) = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{u}(\infty); \quad \mathbf{m}_y(\infty) = \mathbf{H}\mathbf{m}_x(\infty). \quad (8.90)$$

Аналогично, установившиеся значения вторых центральных моментов $\mathbf{P}(\infty)$ вектора состояния устойчивой системы (8.76) могут быть определены из матричного уравнения (8.88) при $\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{0}$, т. е. из решением уравнения Ляпунова

$$\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{B}^T = \mathbf{0}. \quad (8.91)$$

Найденное решение $\mathbf{P}(\infty)$ уравнения (8.91) может быть использовано для анализа установившегося режима ковариационной матрицы выходных переменных системы (8.76):

$$\mathbf{P}_y(\infty) = \mathbf{H}\mathbf{P}(\infty)\mathbf{H}^T. \quad (8.92)$$

Другой способ анализа установившихся значений вторых центральных моментов основан на получении установившегося режима ковариационного уравнения с помощью эквивалентной (8.88) формы Коши с матрицей динамики $\mathbf{A}_p$ и соотношений, аналогичных (8.90). Проиллюстрируем выявленные свойства на простом примере.

Пример 8.4. Пусть на вход системы (8.76) третьего порядка с матрицами

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.25 & -0.85 & -1.6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} := \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.01 \\ -0.044 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \mathbf{H} := (1 & 0 & 0) \\ \mathbf{C} := \mathbf{B} \end{matrix}$$

поступают единичное воздействие ($\mathbf{u} = 1$) и белый шум единичной интенсивности ($\mathbf{Q} = 1$) с нулевым математическим ожиданием. Определить:

а) установившиеся значения математического ожидания и дисперсии выходной переменной;

б) динамические свойства процессов изменения математических ожиданий и вторых центральных моментов;

в) построить графики переходных процессов математического ожидания и дисперсии выходной переменной.

□ Решение. Вопросы примера составляют сущность обычной и весьма распространенной задачи анализа стохастической системы. Ответы на эти вопросы требуют привлечения компьютера. Применение СКМ резко упрощает решение подобных задач. Покажем это, последовательно отвечая на вопросы рассматриваемого примера с применением Mathcad.

а) Для вычисления установившихся значений математического ожидания и дисперсии выходной переменной необходимо найти решения линейных алгебраических уравнений, которые получаются при условиях: $\dot{\mathbf{m}}_x = \mathbf{0}$ для уравнения (8.80) и $\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{0}$ для ковариационного уравнения (8.88), (8.89). Для математического ожидания при этом условии имеем выражение (8.90), а для ковариационного уравнения — матричное уравнение Ляпунова (8.91). На рис. 8.8 представлены результаты вычислений.

Значение математического ожидания выходной переменной в установившемся режиме достигает значения $m_y(\infty) \approx 0.1$. Для решения матричного уравнения (8.91) применен вычислительный блок, между ключевыми словами (**given** и **find**) которого заключено уравнение Ляпунова для исходных данных примера. В качестве начального приближения $\mathbf{P}$ выбрана единичная матрица, заданная встроенной функцией **identity**. Установившаяся ковариационная матрица (см. рис. 8.8) обозначена $\mathbf{D}$. Выведен вектор дисперсий $\mathbf{d}$ установившихся состояний и дисперсия D_y выходной переменной в установившемся режиме системы: $D_y(\infty) = 0.0135$. При ее вычислении использована формула (8.92).

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.25 & -0.85 & -1.6 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.01 \\ -0.044 \end{pmatrix} \quad H := (1 \ 0 \ 0) \\ i := 0..2$$

$$m_y := -H \cdot A^{-1} \cdot B \quad m_y = 0.1 \quad \text{формула (8.90)}$$

$$P := \text{identity}(3) \quad \text{Given} \quad A \cdot P + P \cdot A^T + B \cdot B^T = 0 \quad D := \text{Find}(P)$$

$$d_i := D_{i,i} \quad d^T = (0.0135 \ 0.0032 \ 0.001) \quad \begin{array}{l} \text{d - вектор дисперсий} \\ \text{установившихся} \\ \text{состояний} \end{array}$$

$$D_y := H \cdot D \cdot H^T \quad D_y = 0.0135 \quad \text{формула (8.92)}$$

Рис. 8.8. Установившиеся значения моментов выходной переменной

б) Для ответов на оставшиеся вопросы необходимо перейти от ковариационного уравнения (8.88) к эквивалентной форме Коши вида:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{A}_p \mathbf{p} + \mathbf{B}_p; D_y = \mathbf{H}_p \mathbf{p}. \quad (8.93)$$

Для исходной системы третьего порядка ($n = 3$) вектор $\mathbf{p}$ системы уравнений (8.93) имеет $n(n + 1)/2 = 6$ элементов; $\mathbf{A}_p$ — (6×6) -матрица, $\mathbf{B}_p$ — (6×1) -вектор; D_y — дисперсия выходной переменной.

Вектор состояний $\mathbf{p}(t)$ формы Коши (8.93) образуем последовательной состыковкой трех векторов нижнего треугольного блока матрицы $\mathbf{P}(t)$, начиная с первого. Тогда, структура матриц $\mathbf{A}_p$, $\mathbf{B}_p$, $\mathbf{H}_p$ системы дифференциальных уравнений (8.93) определяется принятым порядком перечисления элементов матрицы $\mathbf{P}$ в векторе $\mathbf{p}(t)$ и достаточно просто получается с использованием символьных преобразований в системе Mathcad над выражением правой части ковариационного уравнения (8.88). Ниже эти матрицы представлены в виде копии соответствующего фрагмента mcd-файла:

$$\mathbf{A}_p := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -0.25 & -0.85 & -1.6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -0.25 & 0 & -0.85 & -1.6 & 1 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 & -1.7 & -3.2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_p := \begin{pmatrix} 0.01 \\ -0.001 \\ -0.0044 \\ 10^{-4} \\ 4.4 \cdot 10^{-4} \\ 0.001936 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}_p := (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$$

Для проверки правильности этих матриц, определим установившееся значение дисперсии выходной переменной, исходя из уравнений (8.93): $D_y(\infty) = -\mathbf{H}_p \cdot \mathbf{A}_p^{-1} \cdot \mathbf{B}_p = 0.0135$. Полученное значение совпало с ранее определенным значением (см. рис. 8.8), откуда следует, что системы уравнений (8.88) и (8.93) эквивалентны.

Динамические свойства процессов изменения математических ожиданий состояний рассматриваемой системы, в силу уравнений (8.80), полностью определяют собственные числа исходной матрицы $\mathbf{A}$, а динамика вторых центральных моментов определяется собственными числами матрицы $\mathbf{A}_p$ уравнений (8.93). Сопоставим эти собственные числа, определяя их с применением встроенной функции **eigenvals** (копия mcd-фрагмента):

$$\text{eigenvals}(\mathbf{A})^T = (-0.3 + 0.4i \ -0.3 - 0.4i \ -1)$$

$$\text{eigenvals}(\mathbf{A}_p)^T = (-0.6 + 0.8i \ -0.6 - 0.8i \ -2 \ -1.3 + 0.4i \ -1.3 - 0.4i \ -0.6)$$

Сопоставляя собственные числа матрицы $\mathbf{A}_p$ с собственными числами матрицы $\mathbf{A}$, убеждаемся в справедливости описанных выше соотношений между собственными числами матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}_p$ и утверждения об ускорении динамики изменения вторых центральных моментов по сравнению с динамикой исходной системы. Согласно этому утверждению процесс изменения дисперсии $D_y(t)$ выходной переменной системы будет затухать ровно вдвое быстрее, чем

ее математическое ожидание $m_y(t)$. Учитывая значения собственных чисел матрицы **A**, процессы в системе (8.80) входят в однопроцентную зону затухания примерно за 17 единиц времени. Поэтому следует ожидать, что затухание процессов изменения дисперсии выходной переменной произойдет приблизительно за 8.5 ед. времени.

в) На рис. 8.9 приведены графики переходных процессов для дисперсии $D_y(t)$ выходного сигнала (пунктир) и $m_y(t)$ (сплошная кривая). График хорошо иллюстрирует отмеченный факт ускорения переходных процессов для вторых центральных моментов.

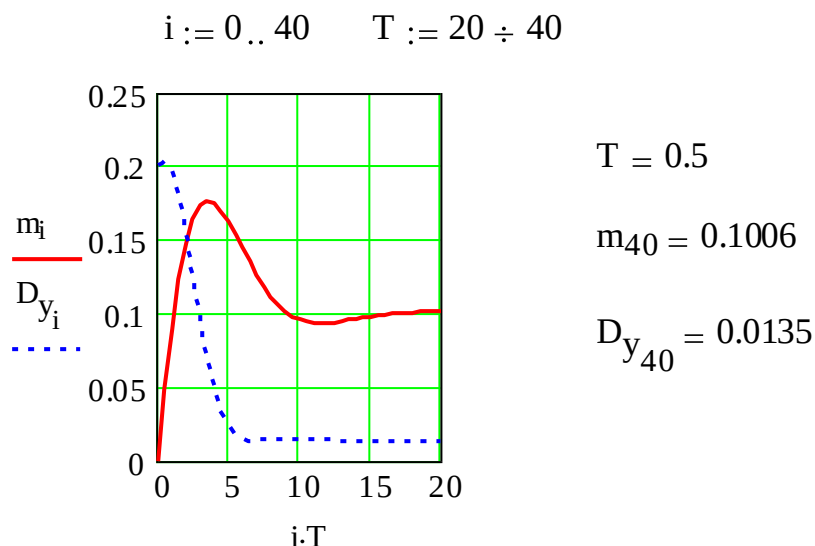


Рис. 8.9. Графики изменения выходной переменной и ее дисперсии

Вектор начальных значений $\mathbf{p}(0)$ при расчетах имел единственный ненулевой элемент, расположенный на первом месте и равный 0.2. Таким образом, начальная дисперсия выходной переменной принималась равной 0.2. Шаг дискретности был принят равным $T = 0.5$. Интегрирование систем дифференциальных уравнений (8.80) и (8.93) осуществлялось с использованием встроенной функции **rkfixed** (методом Рунге—Кутты с постоянным шагом). Более подробно пример 8.4 рассмотрен в работе [17]. ■

Таким образом, получены и проанализированы уравнения, с помощью которых можно оценить математические ожидания и вторые центральные моменты состояний и выходов непрерывной линейной динамической системы, на входы которой воздействуют детерминированные сигналы и белые шумы. При этих воздействиях в системе возникают переходные процессы, в течение которых ее переменные и моменты их распределений претерпевают изменения, что позволяет отнести их к классу нестационарных случайных функций времени. При затухании переходных процессов устойчивая система достигает установившегося режима, а ее переменные постепенно переходят в класс стационарных случайных функций. Эти процессы определяют особенности непрерывных динамических систем как своеобразных генераторов случайных функций.

На основе уравнений (8.80), (8.88), (8.89), (8.93) может быть осуществлено решение широкого класса задач анализа непрерывных стохастических систем. Эти задачи связаны с исследованием динамических свойств первых и вторых моментов распределения вектора состояний, анализом установившегося режима и влияния уровней шумов на протекающие в системе процессы, анализом чувствительности решений к вариациям исходных данных, анализом устойчивости систем и многими другими проблемами.

8.6.2. Дискретные стохастические системы

Рассмотрим стационарную линейную дискретную стохастическую систему (ЛДСС). В общем случае модель ЛДСС может быть представлена разностными рекуррентными уравнениями вида с обозначениями переменных, совпадающими с обозначениями, принятыми в (8.76):

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi \mathbf{x}_k + \Gamma \mathbf{w}_k + \Delta \mathbf{u}_k; \mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{H}_1 \mathbf{x}_{k+1}; \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0; k = 0, 1, \dots, N. \quad (8.94)$$

Здесь $\mathbf{x}_{k+1}$ — n -мерный вектор состояний на $(k+1)$ -м такте; $\mathbf{u}_k$ — случайная векторная входная последовательность; $\mathbf{y}_{k+1}$ — векторная выходная последовательность; $\mathbf{w}_k$ — векторная последовательность типа дискретного белого шума с нулевым математическим ожиданием и матрицей интенсивностей $\mathbf{Q}_1$:

$$M[\mathbf{w}_i \mathbf{w}_j^T] = \mathbf{Q}_1 \delta_{ij}, \quad (8.95)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера ($\delta_{ij} = 1$ при $i = j$; $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$).

Матрицы Φ , Γ , Δ , $\mathbf{H}$ — случайные, соответствующих размерностей, а вектор $\mathbf{x}(0)$ не зависит от $\mathbf{w}_k$.

Как и ранее, кроме введенных предположений, для полного задания модели (8.94) должны быть заданы математические ожидания $\mathbf{m}_0 = M(\mathbf{x}_0)$ и ковариационная матрица $\mathbf{P}_0 = \text{cov}[\mathbf{x}_0]$ начального состояния. Также, без потери общности предположим, что вектор $\mathbf{u}$ — детерминированный. Ковариационная матрица вектора $\mathbf{x}$ системы (8.94) по определению равна:

$$\mathbf{P}_k = M[\chi_k \chi_k^T] = \text{cov}[\mathbf{x}_k]; \chi_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{m}_k, \mathbf{m}_k = M(\mathbf{x}_k). \quad (8.96)$$

Легко убедиться в том, что при сделанных предположениях уравнение для первых начальных моментов (математических ожиданий) вектора $\mathbf{x}_k$ может быть записано в форме:

$$\mathbf{m}_{k+1} = \Phi \mathbf{m}_k + \Delta \mathbf{u}_k; \mathbf{m}_{y_{k+1}} = \mathbf{H} \mathbf{m}_{k+1}; \mathbf{m}_0 = M(\mathbf{x}_0). \quad (8.97)$$

Полученное уравнение позволяет осуществить полный анализ динамики поведения дискретной системы (8.94) в среднем.

В отличие от рассмотренного в разд. 8.6.1 случая, ковариационное уравнение для дискретных СС может быть получено достаточно просто. Ковариационная матрица (8.96) формируется на основе центрированных векторов состояния χ_k . Вычитая уравнение для математических ожиданий из исходных уравнений системы, запишем рекуррентное соотношение для χ_k :

$$\chi_{k+1} = \Phi \chi_k + \Gamma \mathbf{w}_k; \chi_{y_{k+1}} = \mathbf{H} \chi_{k+1}; \chi_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{m}_0. \quad (8.98)$$

Для ковариационной матрицы (8.96) на $(k + 1)$ -ом такте имеем:

$$\mathbf{P}_{k+1} = M(\chi_{k+1} \chi_{k+1}^T) = M[(\Phi \chi_k + \Gamma \mathbf{w}_k) (\Phi \chi_k + \Gamma \mathbf{w}_k)^T].$$

Раскрывая правую часть полученного выражения с учетом общих свойств математического ожидания и статистической независимости вектора χ_k и входной последовательности $\mathbf{w}_k$, получим ковариационное уравнение для стохастической системы (8.94) в виде матричного разностного уравнения:

$$\mathbf{P}_{k+1} = \Phi \mathbf{P}_k \Phi^T + \Gamma \mathbf{Q}_1 \Gamma^T; \mathbf{P}_{yk+1} = \mathbf{H}_1 \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{H}_1^T; \mathbf{P}_0 = \text{cov}[\mathbf{x}_0]. \quad (8.99)$$

Уравнения (8.97), (8.99) позволяют осуществлять полный анализ характера изменения математических ожиданий и вторых центральных моментов вектора состояний системы (8.94). В данном случае анализ осуществляется путем реализации удобных в практическом использовании рекуррентных соотношений. В процессе анализа дискретной СС могут быть исследованы динамические свойства первых и вторых моментов распределения вектора состояний, установившиеся состояния, влияние уровней шумов на протекающие в дискретной системе процессы, определена чувствительность решений, устойчивость и проч. При этом все вычисления осуществляются в рамках единого алгоритма, включающего уравнения (8.97) для математических ожиданий и ковариационное уравнение (8.99).

В прикладной теории динамических систем хорошо известен переход от моделей непрерывных систем к моделям в виде разностных уравнений и использование последних при моделировании процессов, протекающих в непрерывных системах управления [12, 13]. При этом используются уравнения, аналогичные соотношениям (8.94), (8.97), (8.99), что ставит вопрос о возможности применения разностных уравнений при анализе непрерывных стохастических систем. Рассмотрим вкратце условия, допускающие аппроксимацию непрерывной стохастической системы (СС) ее дискретным аналогом при решении прикладных задач.

8.6.3. Дискретная аппроксимация непрерывных СС

Аппроксимация уравнений состояния непрерывных стохастических систем (СС) разностными уравнениями возможна при выполнении условий временной и статистической эквивалентности [17]. Необходимость выполнения условий указанных двух типов обусловлена тем, что уравнения (8.76) или (8.94) передают не только временную изменчивость состояний системы, но характеризуют и законы изменения числовых характеристик распределений случайных переменных в переходных процессах. Рассмотрим процедуры перехода от уравнений (8.76) к эквивалентным уравнениям (8.94) в рамках предположений, принятых ранее, в том числе $\mathbf{A} = \text{const}$.

Для перехода от системы уравнений (8.76) к эквивалентным разностным уравнениям разобьем отрезок времени (t_0, t) на k шагов дискретности T так, что $kT = t - t_0$, и рассмотрим решения уравнений (8.76) на двух соседних ин-

тервалах. В момент времени t решение для вектора состояний непрерывной системы (8.76) имеет вид ($t_0 = 0$):

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)[\mathbf{B}\mathbf{w}(\tau) + \mathbf{C}\mathbf{u}(\tau)]d\tau. \quad (8.100)$$

Вводя обозначения $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(kT) = \mathbf{x}_k$; $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ и используя, дополнительно к (8.86), известное свойство матричной экспоненты $\Phi(t) = \exp(\mathbf{A}t)$:

$$\Phi(t) = \Phi(kT) = \Phi^k(T) = \Phi(T) \Phi[(k-1)T],$$

перепишем выражение (8.100) в виде решения для момента времени t_k :

$$\mathbf{x}_k = \Phi^k(T) \mathbf{x}_0 + \int_0^{kT} \Phi(kT - \tau)[\mathbf{B}\mathbf{w}(\tau) + \mathbf{C}\mathbf{u}(\tau)]d\tau. \quad (8.101)$$

Записывая аналогичным образом решение в момент $t_{k+1} = t_k + T = (k+1)T$ и выражая это решение через решение для k -го момента времени, получаем:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi(T) \mathbf{x}_k + \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi[(k+1)T - \tau][\mathbf{B}\mathbf{w}(\tau) + \mathbf{C}\mathbf{u}(\tau)]d\tau. \quad (8.102)$$

Будем считать значения переменных уравнений (8.100) постоянными на шаге дискретности T , например, $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_k$, $\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}_k$ для $kT \leq t < (k+1)T$. Этим белые шумы $\mathbf{w}(t)$ с матрицей интенсивности $\mathbf{Q}$ и $M[\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(\tau)] = \mathbf{Q}\delta(t-\tau)$ заменяются последовательностями $\mathbf{w}_k$ типа дискретного белого шума с матрицей интенсивностей $\mathbf{Q}_1$ и $M[\mathbf{w}_i\mathbf{w}_j^T] = \mathbf{Q}_1\delta_{ij}$, где $\delta(t-\tau)$ и δ_{ij} — дельта-функция и символ Кронекера соответственно.

Тогда, учитывая выражения (8.101) и (8.102), заменим дифференциальные уравнения (8.76) разностными вида (8.94):

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi(T)\mathbf{x}_k + \Gamma(T)\mathbf{w}_k + \Delta(T)\mathbf{u}_k; \mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{H}_1\mathbf{x}_{k+1}; \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (8.103)$$

Временная эквивалентность уравнений (8.76) и (8.103) достигается получением матриц $\Phi(T)$, $\Gamma(T)$ и $\Delta(T)$, которые зависят от значения шага дискретности T , являются постоянными на промежутке времени $kT \leq t < (k+1)T$ и определяются следующими выражениями [12, 13]:

$$\begin{aligned} \Phi(T) &= \exp(\mathbf{A}T); \Gamma(T) = \int_0^T \Phi(\lambda)\mathbf{B}d\lambda; \Delta(T) = \int_0^T \Phi(\lambda)\mathbf{C}d\lambda; \\ \Phi(T) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^i T^i}{i!}; \Gamma(T) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^i T^{i+1}}{(i+1)!} \mathbf{B}; \Delta(T) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^i T^{i+1}}{(i+1)!} \mathbf{C}. \end{aligned} \quad (8.104)$$

При неособенной матрице $\mathbf{A}$ могут быть использованы соотношения [17]:

$$\Gamma(T) = \mathbf{A}^{-1} [\Phi(T) - \mathbf{E}] \mathbf{B}; \Delta(T) = \mathbf{A}^{-1} [\Phi(T) - \mathbf{E}] \mathbf{C}.$$

Матричные степенные ряды (8.104) характеризуются быстрой сходимостью, поэтому верхний предел сумм при правильном выборе шага дискретности T на практике ограничивают константой $\alpha \leq 10$.

Проблема выбора допустимых шагов дискретности T достаточно хорошо исследована в общей теории систем. При анализе первых начальных моментов (математических ожиданий (8.80)) вектора $\mathbf{x}(t)$ системы (8.76) с использовани-

ем разностных уравнений (8.97) выбор значения T полностью определяется динамическими свойствами системы (8.80) или, что то же, распределением собственных чисел λ_j ($j = \overline{1, n}$) матрицы A n -го порядка. Выбранное таким образом значение T будет достаточным для сохранения динамических свойств непрерывной системы (8.80) при использовании уравнений (8.97).

В разд. 8.6.1 было показано, что вторые центральные моменты распределения вектора состояния системы (8.76) имеют вдвое более быструю динамику изменения по сравнению с динамикой исходной системы или системы (8.80). Поэтому для сохранения свойств вторых моментов распределения состояний непрерывной системы в разностных уравнениях (8.99) необходимо уменьшить найденное значение T вдвое.

Корректный выбор шага дискретности и использование выражений (8.104) представляют лишь необходимые условия эквивалентного перехода от уравнений (8.76) к рекуррентным соотношениям (8.103). Достаточные условия обеспечивают выбор значений матрицы интенсивности Q_1 входной последовательности w_k типа белого шума в зависимости от матрицы интенсивности Q белого шума w и остальных параметров системы (8.76).

Получим зависимость Q_1 от Q , налагая требование равенства значений ковариационных матриц P_k (8.99) и $P(t)$ (8.84) в совпадающие моменты времени $t_k = kT$.

Решением ковариационного уравнения (8.88) служит соотношение (8.84)

$$P(t) = \Phi(t)P(0)\Phi^T(t) + \int_0^t \Phi(t-\tau)BQB^T\Phi^T(t-\tau)d\tau.$$

Запишем это выражение для моментов времени t_{k+1} и t_k и выразим матрицу $P(t_{k+1}) = P_{k+1}$ через $P(t_k) = P_k$. После несложных преобразований получим:

$$P_{k+1} = \Phi(T)P_k\Phi^T(T) + \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi[(k+1)T-\tau]BQB^T\Phi^T[(k+1)T-\tau]d\tau. \quad (8.105)$$

Сопоставляя уравнения (8.105) и (8.99), видим, что их различие определяется лишь вторыми слагаемыми правых частей. Приравнявая эти части, запишем условия статистической эквивалентности непрерывных и дискретных систем в общем виде:

$$\Gamma(T)Q_1\Gamma^T(T) = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi[(k+1)T-\tau]BQB^T\Phi^T[(k+1)T-\tau]d\tau. \quad (8.106)$$

Это условие определяет взаимосвязь матриц интенсивностей Q и Q_1 . Явное выражение одной матрицы через другую на основе условия (8.106) может быть получено лишь в простейшем случае системы первого порядка со скалярным входом и выходом. В многомерном случае выражение, связывающее матрицы Q и Q_1 в явном виде, получить не представляется возможным. Поэтому определим соотношение между матрицами Q и Q_1 в предположении постоянства матрицы $\Phi(T)$ на отрезке времени T . Это предположение является достаточно естественным и фактически выполняется в разностных уравнениях

(8.94), (8.97) и (8.99). При таком предположении из (8.104) следует примерное равенство $\Gamma(T) \approx \Phi(T)\mathbf{B}T$, подстановка которого в выражение (8.106) дает соотношение между матрицами интенсивностей в простой форме

$$\mathbf{Q}_1 \approx \mathbf{Q}/T. \quad (8.107)$$

Таким образом, при переходе от системы (8.76) к разностному аналогу (8.103) или от ковариационных уравнений (8.88) к разностным ковариационным уравнениям (8.99) матрица интенсивности $\mathbf{Q}_1$ входной последовательности $\mathbf{w}_k$ обратно пропорциональна шагу дискретности T и определяется соотношением (8.107), где $\mathbf{Q}$ — матрица интенсивностей входного белого шума исходной непрерывной системы (8.76). Практическое использование соотношений (8.104), (8.107) показало, что при корректном выборе шага дискретности [17] выражения (8.103) и (8.99) обеспечивают высокую точность вычислений первых и вторых моментов распределений непрерывных стохастических систем (8.76).

Воспользуемся выполненными выше преобразованиями для получения еще одного практически важного соотношения, которое касается корреляционных матриц вектора состояния непрерывных и дискретных СС. Из материалов *разд. 8.4* следует, что корреляционная матрица вектора состояния непрерывной стохастической системы (8.76) является функцией двух аргументов t_1 и t_2 , представляющих собой границы промежутка $t_2 - t_1 = \tau$:

$$\mathbf{K}_x(t_2, t_1) = M[\chi(t_2) \chi^T(t_1)], \quad \mathbf{K}_x(t_m, t_m) = \mathbf{P}(t_m), \quad (8.108)$$

где χ — центрированный вектор состояний со свойствами (8.81), (8.82), $\mathbf{P}$ — ковариационная матрица (8.78).

На главной диагонали матрицы (8.108) расположены автокорреляционные функции элементов вектора $\mathbf{x}(t)$ (8.76); недиагональные элементы матрицы $\mathbf{K}_x(t_2, t_1)$ содержат взаимные корреляционные функции элементов $\mathbf{x}(t)$.

В предположении $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$, вектор $\chi(t_2)$ на правой границе интервала можно выразить через $\chi(t_1)$ с помощью соотношения, аналогичного (8.102)

$$\chi(t_2) = \Phi(t_2, t_1) \chi(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t_2, \lambda) \mathbf{B} \mathbf{w}(\lambda) d\lambda. \quad (8.109)$$

Подставим вектор (8.109) в выражение (8.108) и, после несложных преобразований, учитывая независимость векторов $\chi(t_1)$ и $\mathbf{w}(\lambda)$ при $\lambda \geq t_1$, получим:

$$\mathbf{K}_x(t_2, t_1) = \Phi(t_2, t_1) \mathbf{P}(t_1). \quad (8.110)$$

В случае, когда процессы, протекающие в системе (8.76), могут быть отнесены к стационарным случайным процессам, моменты распределения вектора $\mathbf{x}(t)$ не зависят от времени, т. е. $\mathbf{m}_x(t) = \mathbf{m}_x$, $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}$, т. е. (8.110) будет иметь вид $\mathbf{K}_x(t_2, t_1) = \Phi(t_2, t_1) \mathbf{P}$. В частном случае, при $\mathbf{A} = \text{const}$ корреляционная матрица $\mathbf{K}_x(t_2, t_1)$ (8.110) будет функцией только длины промежутка $t_2 - t_1 = \tau$:

$$\mathbf{K}_x(\tau) = \Phi(t_2 - t_1) \mathbf{P}. \quad (8.111)$$

Здесь матрица $\mathbf{P}$ определяется условием стационарности (8.91).

Для дискретных СС могут быть получены аналогичные соотношения, являющиеся следствием разностного уравнения (8.103). Предполагая, что промежуток времени τ соответствует k шагам дискретности T ($\tau = kT$), перепишем

выражение (8.111) для стационарного случая дискретной стохастической системы:

$$\mathbf{K}_x(kT) = \Phi^k(T) \mathbf{P}, \quad (8.112)$$

где матрица $\mathbf{P}$ может быть получена как из условий стационарности (8.91), так и из аналогичных условий для дискретной системы, которые также соответствуют установившемуся режиму ковариационного уравнения (8.99):

$$\mathbf{P} = \Phi(T) \mathbf{P} \Phi^T(T) + \Gamma(T) \mathbf{Q}_1 \Gamma^T(T). \quad (8.113)$$

Выражения (8.108)—(8.113) могут служить основой решения важных с практической точки зрения задач имитации (моделирования, генерации) случайных процессов и последовательностей с заданными корреляционными свойствами. Некоторые из возможных подходов к решению задач этого класса, необходимых для решения практических задач с использованием моделей (8.76) и (8.94), рассматриваются ниже.

8.7. Генерация стационарных случайных последовательностей

Форма уравнений (8.76) и (8.94), послужившая основой многих соотношений предыдущего раздела, предполагает, что на входы систем действуют случайные процессы и последовательности типа белых шумов. При исследовании конкретных стохастических систем возмущениями в большинстве случаев служат так называемые «окрашенные» случайные процессы и последовательности, имеющие корреляционные функции, отличающиеся от (8.77) и (8.95). Для того чтобы формулы и уравнения *разд. 8.6* можно было использовать и для случая «окрашенного» воздействия на входе СС, такое воздействие необходимо привести ко входному белому шуму, т. е. имитировать его выходной переменной вспомогательного динамического звена, на вход которого поступает белый шум. Это вспомогательное динамическое звено носит название **формирующего фильтра**.

Определение передаточных функций и матриц, параметров уравнений состояния формирующих фильтров составляет сущность задач генерации.

Учитывая широту затрагиваемой проблемы, рассмотрим лишь некоторые подходы к решению задачи генерации, ограничиваясь лишь случаем имитации стационарных процессов и последовательностей. Это ограничение можно снять, моделируя нестационарные воздействия путем пропускания стационарных сигналов через необходимые динамические звенья.

Рассмотрим вначале скалярную задачу. Предположим, что на искомое динамическое звено с передаточной функцией $W(p)$ поступает белый шум, интенсивность которого q известна, а выходной сигнал $y = x$ должен иметь нулевое математическое ожидание и заданную корреляционную функцию $K_x(\tau)$ (или спектральную плотность $S_x(\omega)$). Традиционный подход к решению поставленной задачи основан на использовании соотношения [7]

$$S_x(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_0 = W(j\omega)W(-j\omega) S_0, \quad (8.114)$$

где $S_x(\omega)$, S_0 — известные в общем случае спектральные плотности выхода и белого шума, причем $S_0 = q/2\pi$ — константа.

Определение $W(p)$ из (8.114) осуществляется путем решения нетривиальной задачи факторизации.

В табл. 8.1 приведены параметры формирующих фильтров для нескольких вариантов корреляционных функций выходного сигнала, полученные решением задачи (8.114). Для передаточных функций фильтров в табл. 8.1 указаны и эквивалентные системы дифференциальных уравнений в форме Коши с матрицами ($\mathbf{A}_\Phi$, $\mathbf{B}_\Phi$, $\mathbf{H}_\Phi$).

В табл. 8.1 использованы обозначения: $d = \sqrt{2\alpha\sigma^2}$, $b^2 = \alpha^2 + \beta^2$.

Таблица 8.1

$K_x(\tau)$	$\mathbf{A}_\Phi$	$\mathbf{B}_\Phi$	$\mathbf{H}_\Phi$	$W(p)/d$
$\sigma^2 e^{-\alpha \tau }$	$-\alpha$	d	1	$1/(p + \alpha)$
$\sigma^2 e^{-\alpha \tau } [\cos\beta\tau + (\alpha/\beta) \sin\beta \tau]$	$\begin{bmatrix} -2\alpha & 1 \\ -b^2 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2}bd \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\frac{\sqrt{2}b}{p^2 + 2\alpha p + b^2}$
$\sigma^2 e^{-\alpha \tau } [\cos\beta\tau - (\alpha/\beta) \sin\beta \tau]$	$\begin{bmatrix} -2\alpha & 1 \\ -b^2 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \sqrt{2}d \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\frac{\sqrt{2}p}{p^2 + 2\alpha p + b^2}$
$\sigma^2 e^{-\alpha \tau } \cos\beta\tau$	$\begin{bmatrix} -2\alpha & 1 \\ -b^2 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} d \\ bd \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\frac{p+b}{p^2 + 2\alpha p + b^2}$

Описанный путь определения параметров формирующего фильтра с использованием выражения (8.114) может служить основой и для получения случайных последовательностей, учитывая материал *разд. 8.6.3*. Этот путь принципиально может быть распространен и на генерацию векторных процессов и последовательностей. Однако трудности решения задач факторизации в матричном варианте не позволяют считать этот способ получения векторных процессов практически удобным и перспективным.

Другой подход, не требующий решения задач факторизации, рассмотрен в [16]. Этот подход базируется на табличном (численном) задании корреляционных функций (матриц) и позволяет с помощью достаточно простого алгоритма получить параметры разностных уравнений формирующих фильтров для генерации скалярных и векторных случайных последовательностей. В этой постановке предполагается, что случайная последовательность получается на выходе динамического звена с передаточной функцией $W(p)$.

Пусть на вход динамического звена порядка $n \geq 1$ поступает скалярная последовательность типа белого дискретного шума с интенсивностью q_1 . Пусть также даны значения корреляционной матрицы $\mathbf{K}_j$ ($j = 0, N$) стационарного случайного вектора $\mathbf{x}_{\Phi k}$, $k = 0, L$. Значения $\mathbf{K}_j$ и $\mathbf{K}_{j+1}$ разделены постоянным ша-

гом времени T . Требуется получить параметры ее разностного (дискретного) эквивалента формирующего фильтра

$$\mathbf{x}_{\Phi k+1} = \Phi_{\Phi}(T) \mathbf{x}_{\Phi k} + \Gamma_{\Phi}(T) w_k, \quad \mathbf{x}_{\Phi}(0) = \mathbf{x}_{\Phi 0}. \quad (8.115)$$

Здесь $\mathbf{x}_{\Phi k}$ — $(n \times 1)$ -вектор состояния фильтра; w_k — скалярный дискретный белый шум с интенсивностью q_1 и нулевым средним.

Уравнению соответствует ковариационное уравнение вида (8.99):

$$\mathbf{P}_{\Phi k+1} = \Phi_{\Phi}(T) \mathbf{P}_{\Phi k} \Phi_{\Phi}^T(T) + \Gamma_{\Phi}(T) q_1 \Gamma_{\Phi}^T(T), \quad (8.116)$$

где $\mathbf{P}_{\Phi k}$ — ковариационная матрица для вектора $\mathbf{x}_{\Phi k}$, $\mathbf{P}_{\Phi 0}$ — задана.

Поскольку значения $\mathbf{K}_j = \mathbf{K}(jT)$ и $\mathbf{K}_{j+1} = \mathbf{K}[(j+1)T]$ разделены постоянным интервалом времени T и удовлетворяют соотношению (8.112), то

$$\mathbf{K}[(j+1)T] = \Phi_{\Phi}(T) \mathbf{K}(jT). \quad (8.117)$$

Из (8.117) следует, что каждая пара корреляционных матриц, разделенных отрезком T , обеспечивает возможность получения матрицы $\Phi_{\Phi}(T)$.

Выражения (8.117) для значений $j = 0, N$ дают систему из N матричных уравнений, решая которую методом наименьших квадратов [16], получаем искомую матрицу $\Phi_{\Phi}(T)$ фильтра (8.115) по всему множеству данных:

$$\Phi_{\Phi}(T) = \left(\sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{K}_{j+1} \mathbf{K}_j^T \right) \left(\sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{K}_j \mathbf{K}_j^T \right)^{-1}. \quad (8.118)$$

Из условия стационарности (8.91) при $\mathbf{P}_{\Phi k+1} = \mathbf{P}_{\Phi k} = \mathbf{P}_{\Phi}$ и ковариационного уравнения (8.116) находим матрицу $\Gamma_{\Phi}(T)$, чем завершается определение параметров формирующего фильтра (8.115). В работе [16] приводятся примеры применения описанного алгоритма (8.115)—(8.118).

Получение параметров разностного уравнения формирующего фильтра позволяет, в случае необходимости, найти его передаточную функцию $W(p)$ или дифференциальные уравнения в форме Коши. Эта возможность обеспечивается применением взаимно обратных преобразований моделей [17].

Уравнения формирующих фильтров служат неотъемлемой частью математической модели стохастических систем, позволяя сводить практические задачи анализа к исходным формам (8.76) или (8.94) и использовать при анализе систем весь арсенал средств, разработанных для этих форм.

Пример 8.5. Для варианта корреляционной функции, приведенного во второй строке табл. 8.1:

а) проверить соответствие передаточной функции формирующего фильтра матрицам $(\mathbf{A}_{\Phi}, \mathbf{B}_{\Phi}, \mathbf{H}_{\Phi})$ дифференциальных уравнений в форме Коши;

б) найти спектральную плотность выходного сигнала формирующего фильтра при входном белом шуме единичной интенсивности.

□ Решение. Для проверки соответствия формы Коши передаточной функции следует составить формулу перехода от уравнений вида (8.76) к эквивалентным операторным (по Лапласу) соотношениям, связывающим вход и выход динамического звена. Пусть динамическое звено с одним входом (белый шум w) и одним выходом (y) описывается уравнениями вида (8.76):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot w; \quad y = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}; \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}. \quad (8.119)$$

Здесь $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ – n -мерный вектор состояний.

Переходя в область изображений по Лапласу, из приведенного выражения получим: $p \cdot \mathbf{x}(p) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(p) + \mathbf{B} \cdot w(p)$; $y(p) = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}(p)$, где p — оператор Лапласа. Из операторного соотношения получаем выражение, связывающее передаточную функцию $W(p)$ звена с матрицами $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ в (8.119):

$$y(p) = W(p) w(p); W(p) = \mathbf{H} \cdot (p \cdot \mathbf{E}_n - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B}, \quad (8.120)$$

где $\mathbf{E}_n$ — единичная матрица порядка n .

На рис. 8.10 приведены результаты решения данного примера в среде Mathcad с использованием элементов символьных вычислений.

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} -2 \cdot a & 1 \\ -b^2 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} := \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \cdot b \cdot d \end{pmatrix} \quad \mathbf{H} := (1 \ 0) \quad \mathbf{E} := \text{identity}(2)$$

$$\boxed{a)} \quad W(p) := \mathbf{H} \cdot (p \cdot \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B} \quad \frac{W(p)}{d} \rightarrow \frac{1}{p^2 + 2 \cdot p \cdot a + b^2} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot b$$

$$\boxed{б)} \quad |S(\omega)| := \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot W|i \cdot \omega| \cdot W|-i \cdot \omega|$$

$$|S(\omega)| \begin{cases} \text{complex} \\ \text{simplify} \end{cases} \rightarrow b^2 \cdot \frac{d^2}{\left(\omega^4 - 2 \cdot \omega^2 \cdot b^2 + b^4 + 4 \cdot \omega^2 \cdot a^2 \right) \cdot \pi}$$

Рис. 8.10. Решение примера 8.5

Результаты подтвердили правильность структуры передаточной функции, указанной в табл. 8.1. При вычислении $S_y(\omega)$ использована формула (8.114). ■

Завершая описание элементов теории случайных процессов, отметим, что приведенный материал далеко не исчерпывает все многообразие форм и методов исследования динамических систем, подверженных случайным воздействиям. В этом разделе приведены лишь некоторые подходы, которые прочно вошли в практику прикладных исследований стохастических систем, их анализа и синтеза.

Некоторые специальные виды случайных процессов описаны в прил. 6—8.

Часть II. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Основы теории вероятностей, рассмотренные в первой части, служат теоретической базой широкого круга прикладных задач, связанных с практическим проведением различного рода испытаний и обработкой их результатов. Методы теории вероятностей позволяют выявить теоретические свойства случайных событий различной природы. Поэтому теория вероятностей в большей степени связана с теоретическим обоснованием принятия решений о вероятностях появления одиночных или совокупных событий в различных условиях их возникновения.

Математическая статистика имеет прикладной характер. Она опирается на количественные, числовые характеристики событий и связана с обработкой данных, полученных экспериментально. К числу задач, которые решаются методами математической статистики, можно отнести, например:

- сбор и обработку результатов экспериментов (наблюдений, измерений) для получения научных и практических выводов;
- использование накопленных статистических данных для оценки числовых характеристик распределений, прогнозирования и интерполяции данных;
- проверку статистических гипотез;
- определение эмпирических зависимостей, наилучшим образом представляющих массивы статистических данных;
- выявления взаимосвязей и взаимозависимостей между исследуемыми явлениями.

Каждая из задач этих классов имеет множество вариантов решений и связана, как правило, с той или иной степенью априорной неопределенности, затрудняющей получение конечного результата. Кроме того, решение задач математической статистики сопряжено обычно с выполнением значительных объемов вычислений, в процессе которых выполняется множество простых вычислительных операций. Это предопределяет необходимость широкого использования средств вычислительной техники. В то же время, составление программ решения задач математической статистики, учитывая их разнородность и многовариантность, также создает дополнительные трудности.

В качестве примера можно представить реализацию алгоритмов, например, поиска экстремумов в задачах получения оценок и регрессионного анализа на языках высокого уровня. Учитывая множество особенностей прикладных статистических задач, такая программа должна быть универсальной. Она должна удовлетворять широкому набору требований. К ним можно отнести: возможность выбора метода поиска экстремума, гарантию точности результата на заключительных этапах поиска, возможность графического отображения, удоб-

ство пользовательского интерфейса и проч. Понятно, что разработка, отладка и апробация подобной программы может потребовать значительного времени. Это делает практически невозможным оперативное решение возникшей статистической задачи и надолго отвлечет исследователя от решения статистических проблем.

Большую практическую помощь при решении задач прикладной статистики в состоянии оказать универсальные программные системы компьютерной математики (СКМ). Подобные системы широко используются учеными и специалистами во всем мире, не требуют от исследователя высокой квалификации программиста и пользователя компьютером, позволяя уделять основное внимание сущности решаемой задачи, а не программированию и организации вычислительного процесса. Кроме того, практическое применение СКМ резко расширяет спектр возможностей исследователя (преподавателя), высвобождает его время для новых разработок, позволяя успешно решать новые, практически значимые профессиональные задачи, рассмотрение которых без применения компьютеров было проблематичным.

Во ВВЕДЕНИИ отмечалось, что решение задач математической статистики может осуществляться с применением многих специализированных СКМ. Каждая из таких систем характеризуется высокой степенью интеграции, что не позволяет использовать их в качестве основы при изучении основ математической статистики. Поэтому нижеследующий материал сопровождается, как и ранее, серией примеров с решениями типовых статистических задач в среде СКМ Mathcad, которая является универсальной программной системой компьютерной математики.

Автор надеется, что приведенные в этой части решения типовых задач в Mathcad позволят читателю получить результат в возникающих аналогичных задачах и послужат основой разработки собственных типовых программных структур. Ознакомление с этими решениями, кроме того, может быть полезно для формирования множества индивидуальных заданий, при проведении практических занятий с применением компьютеров и организации НИРС.

С рядом задач (точечных и интервальных оценок, регрессии, формирования выборочных данных с заданными числовыми характеристиками и др.) части II можно практически поработать в разделе <<Математическая статистика>> проекта <http://mas.exponenta.ru>. Как указывалось ранее, использование размещенных там интерактивных ресурсов не требует установки СКМ Mathcad на пользовательских компьютерах.

Глава 1. ВЫБОРКИ И ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

1.1. Типы выборок и способы их формирования

Независимо от причин и особенностей появления событий, эти события в большинстве своем могут иметь количественные признаки, выраженные числовыми значениями. С помощью независимых испытаний, осуществляемых в одинаковых условиях, получают элементы множества признаков исследуемых случайных величин — мгновенные значения напряжения в силовой сети, время ожидания в очереди, длительность телефонных разговоров, веса деталей и проч. Эти признаки являются функциями непредсказуемых факторов и их числовые значения составляют значения случайных величин. Например, изучаемой случайной величиной может быть отклонение X напряжения в электрической цепи от номинального значения, погрешность электронных весов и т. д. Совокупность возможных значений случайной величины X , которые принципиально могут быть получены в результате экспериментов, ряд источников по математической статистике (например, [4, 5]) называют «генеральной совокупностью».

Как отмечалось ранее, теоретическое множество значений случайной величины может быть конечным или бесконечным. В математической статистике свойства случайной величины X изучаются на основе некоторого ограниченного множества данных, полученных в результате экспериментов. Это ограниченное множество носит название **выборки**, а ее значения составляют так называемую **выборочную совокупность**. Любая функция выборки носит название **статистики**.

При формализации задач математической статистики выборку с элементами $x_1, x_2, \dots, x_n$ удобно представлять в виде вектора-столбца $\mathbf{X}$ с элементами $x_i, (i=1, n)$ или — в виде точки n -мерного пространства. Число n элементов вектора $\mathbf{X}$ принято называть **объемом выборки**.

С точки зрения объема различаются малые и большие выборки. В общем случае такое деление весьма условно, поскольку зависит от специфических особенностей исследуемой случайной величины. Однако в математической статистике используются различные подходы к анализу малых и больших выборок. Так, для больших выборок могут применяться асимптотические методы анализа, основанные на центральной предельной теореме. Примерной границей для отнесения выборки к тому или иному типу служит $n = 30$. Принято считать [5], что выборки объема $n > 30$ могут быть отнесены к классу больших выборок.

Формирование вектора $\mathbf{X}$ выборочных данных неоднозначно. Выборка может осуществляться несколькими путями, среди которых:

□ простая (бесповторная) выборка, когда элементы выборочной совокупности формируются случайно, без возвращения их в исходное множество;

□ повторная выборка, когда элементы множества случайно отбираются, изучаются, а затем возвращаются в исходную совокупность. При этом, если один и тот же элемент отбирается дважды, то он учитывается в векторе $\mathbf{X}$ один раз, а его частота (число его появлений) запоминается и учитывается в последующем анализе.

В математической статистике наиболее часто используется повторная выборка. Более того, методы математической статистики разработаны именно для этого способа формирования выборочных данных. Поэтому далее будем предполагать повторную выборку.

При формировании выборки необходимо учитывать следующие теоретические свойства выборочных данных:

1. Повторяя несколько раз процесс формирования n элементов выборочной совокупности, мы будем каждый раз получать новый вектор $\mathbf{X}$ статистических данных с новыми значениями элементов. Это означает, что по совокупности выборок вектор $\mathbf{X}$ может быть классифицирован как случайный вектор, элементы которого X_i ($i = \overline{1, n}$) — случайные величины.

2. Учитывая независимость наблюдений (измерений) в процессе экспериментов, составляющие вектор $\mathbf{X}$ случайные величины X_i следует рассматривать как взаимно независимые.

3. Случайные величины X_i в составе вектора $\mathbf{X}$ одинаково распределены, поскольку выбор элементов $\mathbf{X}$ осуществляется из множества значений изучаемой случайной величины X . Закон распределения X_i — такой же, как у случайной величины X .

Обобщая перечисленные свойства, отметим, что вектор $\mathbf{X}$ выборочных данных рассматривается, таким образом, в качестве случайного вектора, элементами которого служат независимые одинаково распределенные случайные величины.

При формировании вектора $\mathbf{X}$ часто используются искусственные приемы, необходимость которых может быть обусловлена особыми свойствами изучаемых объектов. Так, при получении выборочных данных могут отдельно или в комбинации с другими использоваться:

- механический отбор, который осуществляется по заранее оговоренному правилу (например, применяя постоянный интервал времени между измерениями, фиксацию каждого десятого импульса электронной схемы и проч.);

- типический отбор, предполагающий разбиение множества возможных значений на части и формирование выборки отбором элементов из каждой части в количестве, пропорциональном объему части;

- серийный отбор, в процессе которого выбирается серия элементов, связанных функциональным назначением. Например: изделие в сборе, состоящее из группы взаимодействующих деталей; упаковка штучных товаров и проч.

Важным принципом формирования выборки является обеспечение случайного отбора в одинаковых условиях, что гарантирует объективность получения статистических данных и способствует выявлению закономерностей, присущих изучаемой случайной величине. В этой связи вводится обобщающее понятие представительности (репрезентативности) выборки, которое служит необходимым условием исключения ошибочных суждений в процессе статистического анализа.

1.2. Статистическое распределение выборки

В теории вероятностей, при рассмотрении дискретных случайных величин (см. разд. 4.2, ч. I) отмечалось, что их распределение задается совокупностью возможных значений и вероятностей каждого из этих значений. В математической статистике используется близкий по смыслу подход на основе частотного анализа и статистического подхода (см. разд. 1.4, ч. I).

Применительно к выборочной совокупности данных в математической статистике вводится понятие статистического распределения, под которым понимается совокупность элементов множества значений и соответствующих частот каждого из элементов.

Рассмотрим выборку объемом n , причем в процессе формирования выборки элемент y_1 наблюдался n_1 раз, y_2 — n_2 раз, ... y_k — n_k раз ($n_1 + \dots + n_k = n$). Статистическое распределение выборки, согласно приведенному выше определению, в данном случае соответствует совокупности отобранных (измеренных) значений y_j и соответствующих им частот n_j , $j = 1, 2, \dots, k$. В статистических распределениях используются также и относительные частоты n_j / n .

Упорядоченные статистические данные порождают понятия вариационного и статистического ряда.

Вариационным рядом называют совокупность *всех* элементов $x_{(j)}$ выборки, записанных в неубывающем порядке. Из этого определения следует, что в вариационном ряде могут присутствовать одинаковые элементы (если они имеют место в выборочных данных), а максимальный и минимальный элементы служат крайними элементами вариационного ряда, т. е. $x_{\min} = x_{(1)}$, $x_{\max} = x_{(k)}$. Разность $R = x_{\max} - x_{\min}$ крайних значений вариационного ряда определяет размах (ширину) выборки, а отдельные элементы $x_{(j)}$ вариационного ряда носят название **порядковых статистик**.

Статистическим рядом называют последовательность *различных* элементов выборки $y_1, y_2, \dots, y_m$, записанных в возрастающем порядке, и частот $n_1, n_2, \dots, n_m$, с которыми эти элементы содержатся в выборке.

Удобной служит табличная форма представления статистического ряда:

y_1	y_2	...	y_m
n_1	n_2	...	n_m

$$\sum_{i=1}^m n_i = n.$$

При решении прикладных статистических задач часто используется статистический ряд, составленный для относительных частот $w_i = n_i / n$:

y_1	y_2	$\dots$	y_m
w_1	w_2	$\dots$	w_m

$$\sum_{i=1}^m w_i = 1.$$

Графически статистический ряд представляется в виде **полигона частот**, по оси абсцисс которого откладываются элементы y_i , а по ординатам — абсолютные или относительные частоты; точки полученного графика соединяют отрезками прямых.

В практике математической статистики достаточно часто встречаются выборки значительных объемов. Например, при проведении траекторных измерений параметров космических объектов объемы выборок могут достигать нескольких тысяч. Решение ряда задач в этих условиях может потребовать «сжатия» полученных данных, что обеспечивается использованием так называемого группированного статистического ряда. Этот ряд образуется путем разделения диапазона $[x_{\min}, x_{\max}]$ выборочных данных на b промежутков (разрядов) $\square x_k$ ($k = 0, 1, \dots, b - 1$) и определения чисел n_k попаданий выборочных данных в каждый промежуток. Исходная выборка при этом заменяется значениями середин промежутков и частот n_k .

Группированным статистическим рядом называют совокупность середин промежутков $z_k = (x_k + x_{k+1})/2$ и соответствующих им частот n_k .

Ряд этого типа также удобно представлять в виде таблицы. Группированный статистический ряд преимущественно используется при анализе вида распределения случайных величин по данным наблюдений. Полезно отметить, что преобразование исходных данных наблюдений с целью построения группированного статистического ряда, искажая информацию, полученную в результате экспериментов, ведет к появлению дополнительных погрешностей методического плана. Однако уровень таких погрешностей не является значительным.

Пример 1.1. Проведено $n = 10$ измерений отклонения напряжения сети от номинального уровня. Полученные данные, с точностью до вольт, составили следующую выборку:

$$\mathbf{X} = [0, -1, -3, 2, 1, 0, -1, -2, 1, -1]^T. \quad (1.1)$$

Сформировать вариационный, статистический и группированный ряды.

□ **Решение.** Вариационным рядом для этой выборки служит последовательность значений: $-3, -2, -1, -1, -1, 0, 0, 1, 1, 2$, причем $x_{\min} = -3$; $x_{\max} = 2$; $R = 5$.

Статистический ряд с абсолютными частотами для исходной выборки:

y_i	-3	-2	-1	0	1	2
n_i	1	1	3	2	2	1

Тот же ряд с относительными частотами примет вид:

y_i	-3	-2	-1	0	1	2
w_i	0.1	0.1	0.3	0.2	0.2	0.1

Полигон относительных частот для рассматриваемого примера изображен на рис. 1.1 (Mathcad).

$$\mathbf{y} := (-3 \ -2 \ -1 \ 0 \ 1 \ 2)^T \quad \mathbf{w} := (0.1 \ 0.1 \ 0.3 \ 0.2 \ 0.2 \ 0.1)^T$$

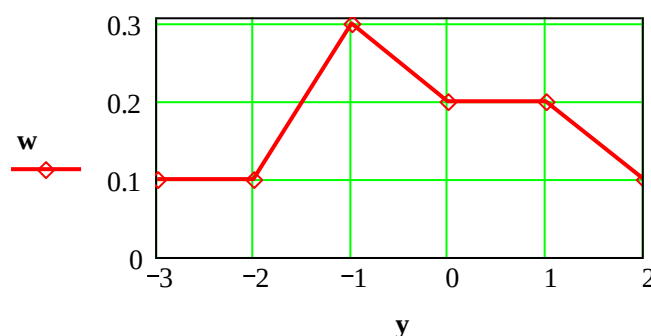


Рис. 1.1. Полигон относительных частот

Группированный ряд для данной выборки образуем, назначая в диапазоне выборочных данных три промежутка шириной ~ 1.67 . Тогда группированный статистический ряд для нашего примера будет представлен таблицей вида:

z_k	-2.17	0.5	1.17
n_k	2	5	3

В таблице приведены средние значения промежутков и частоты. ■

Статистическое распределение выборки может быть охарактеризовано выборочной (эмпирической) функцией распределения.

Выборочной функцией распределения $F_B(y_0)$ называется относительная частота события $Y < y_0$, полученная по конкретной выборке. Согласно этому определению для выборки объема n имеем:

$$F_B(y_0) = \frac{1}{n} \sum_{y_i < y_0} n_i = \sum_{y_i < y_0} w_i. \quad (1.2)$$

Здесь $w(Y < y_0)$ — относительная частота события $Y < y_0$, для получения которой в статистическом ряде, составленном для рассматриваемой выборки, следует просуммировать все относительные частоты, для которых y_i меньше заданного значения y_0 .

Значения эмпирической функции распределения для выборки (1.1) из примера 1.1 приведены на рис. 1.2 как результат вычислений в среде Mathcad. Функция распределения, обозначенная в файле (см. рис. 1.2) как F , получена в виде вектора-столбца по результатам последовательного суммирования элементов вектора относительных частот из примера 1.1.

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{i} := 0..5 \\
 & \mathbf{F} := \text{stack}(0, \mathbf{F}) \quad \mathbf{F}_i := \sum_{j=0}^i \mathbf{w}_j \quad \mathbf{w} := (0.1 \ 0.1 \ 0.3 \ 0.2 \ 0.2 \ 0.1)^T \\
 & \mathbf{F}^T = (0 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.5 \ 0.7 \ 0.9 \ 1)
 \end{aligned}$$

Рис. 1.2. Значения эмпирической функции распределения

Задание эмпирической функции распределения для примера 1.1 и ее графическая интерпретация представлены на рис. 1.3. Для задания $F_B(y)$ использованы операторы **Add Line** и **if** программных блоков системы Mathcad, существенно упрощающие представление $F_B(y)$ и построение графика.

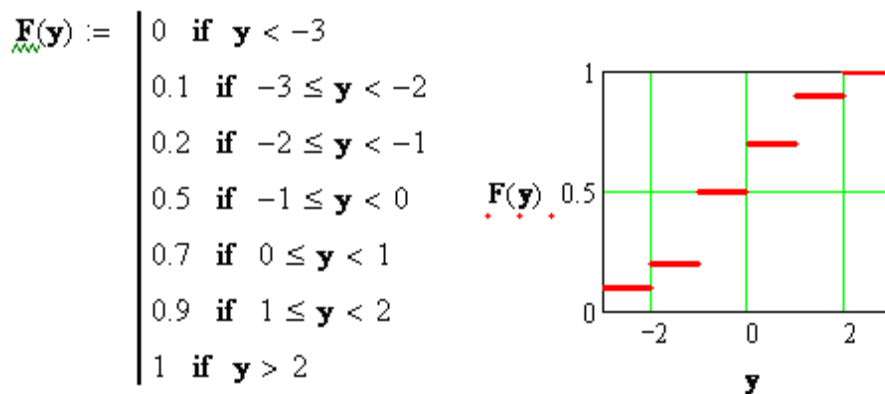


Рис. 1.3. Задание эмпирической функции распределения

Рассмотрим взаимосвязь выборочной функции распределения с соответствующей теоретической функцией, которой характеризуется случайная величина X .

В разд. 6.3, ч. I была доказана теорема Бернулли, согласно которой относительная частота появления события по вероятности стремится к вероятности этого события. Это позволяет сформулировать следующую теорему, раскрывающую свойство выборочной функции распределения (1.2) при неограниченном увеличении объема выборки n .

Теорема. Для любого фиксированного значения y_0 выборочная функция распределения $F_B(y_0)$ стремится по вероятности к функции распределения случайной величины Y .

▷ Доказательство теоремы непосредственно следует из прямого применения теоремы Бернулли к выборочной функции распределения (1.2), поскольку относительная частота $W(Y < y_0)$ стремится по вероятности к вероятности $P(Y < y_0) = F(y_0)$. Из приведенной теоремы можно сделать вывод, что выборочная функция распределения $F_B(y_0)$ может служить приближенным значением теоретической функции распределения $F(y_0)$ случайной величины Y , причем отличие значения $F_B(y_0)$ от $F(y_0)$ при увеличении объема выборки n будет уменьшаться. ◀

1.3. Числовые характеристики выборочных распределений

В разд. 4.4—4.8, ч. I подробно рассматривались числовые характеристики случайных величин. Среди этих характеристик выделялись характеристики положения (математическое ожидание, квантиль, медиана, мода), характеристики рассеивания (дисперсия, коэффициент вариации), характеристики формы распределений случайных величин (асимметрия и эксцесс). Все эти параметры объединялись понятиями начальных и центральных моментов распределений соответствующих порядков.

Применительно к выборочным распределениям в математической статистике вводятся аналогичные характеристики, получение значений которых осуществляется по результатам преобразований выборочных данных. Эти значения всегда будут отличаться от соответствующих теоретических значений и, по этой причине, могут рассматриваться лишь как оценки истинных (теоретических) значений числовых характеристик распределений. Числовые характеристики выборочных распределений объединяются выборочными моментами, которые, как и в теории вероятностей, подразделяются на начальные и центральные выборочные моменты распределений.

Выборочным начальным моментом k -го порядка называют взвешенную сумму вида:

$$M_k = \sum_{i=1}^m (y_i)^k \cdot w_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (y_i)^k \cdot n_i. \quad (1.3)$$

Весами в (1.3) служат относительные частоты w_i значений y_i .

В случае, когда все элементы выборки X имеют различные значения, $n_i = 1$ и выражение (1.3) упрощается:

$$M_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i)^k. \quad (1.4)$$

Начальный выборочный момент первого порядка носит название **выборочного среднего**:

$$\bar{x}_B = M_1 = \sum_{i=1}^m y_i \cdot w_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m y_i \cdot n_i, \quad (n_i \geq 1); \quad (1.5)$$

$$\bar{x}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (n_i = 1). \quad (1.6)$$

Для получения центральных выборочных моментов предварительно осуществляется операция центрирования, которая заключается в вычитании выборочного среднего (1.5), (1.6) из статистических данных. Центрированные элементы выборки y_i^0 , таким образом, удовлетворяют соотношению:

$$y_i^0 = y_i - \bar{x}_B. \quad (1.7)$$

Выборочным центральным моментом k -го порядка называют:

$$m_k = \sum_{i=1}^m (y_i^0)^k \cdot w_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (y_i^0)^k \cdot n_i, \quad (n_i \geq 1); \quad (1.8)$$

$$m_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^0)^k, \quad (n_i = 1). \quad (1.9)$$

Выборочное среднее относится к числу наиболее часто используемых числовых характеристик выборочных распределений. Другой числовой характеристикой выборочных распределений, которая также часто используется в практике решения статистических задач, служит **выборочный центральный момент второго порядка** или **выборочная дисперсия**:

$$D_B = \sigma_B^2 = m_2 = \sum_{i=1}^m (y_i^0)^2 \cdot w_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (y_i^0)^2 \cdot n_i, \quad (n_i \geq 1); \quad (1.10)$$

$$D_B = \sigma_B^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^0)^2, \quad (n_i = 1), \quad (1.11)$$

где $\sigma_B = \sqrt{D_B}$ — выборочное среднее квадратическое отклонение.

Кроме перечисленных, наиболее часто используемых числовых характеристик выборочных распределений, в математической статистике рассматриваются и другие числовые характеристики: выборочные медиана и мода, выборочная квантиль, выборочные асимметрия и эксцесс, а также другие. Эти параметры имеют смысловую аналогию с соответствующими теоретическими числовыми характеристиками, которые были рассмотрены в первой части (см. главу 4). Дадим определение некоторых из перечисленных характеристик выборочных распределений.

Выборочной модой называется элемент выборки, имеющий наибольшую частоту, т. е. абсцисса максимума полигона частот. Как и аналогичная теоретическая характеристика (см. разд. 4.5, ч. I), выборочная мода существует не всегда (например, при равномерном распределении). Выборка может иметь одну (унимодальное распределение) или несколько (полимодальное распределение) мод. Рассмотренный ранее полигон частот (см. рис. 1.1) характеризует унимодальное распределение, мода которого равна (-1) .

В разд. 4.7, ч. I были введены коэффициенты асимметрии (4.32) и эксцесса (4.33). Аналогично, с помощью выборочных моментов, определяются **выборочная асимметрия**:

$$A_B = m_3 / \sigma_B^3 \quad (1.12)$$

и **выборочный эксцесс**:

$$E_B = m_4 / \sigma_B^4 - 3. \quad (1.13)$$

Выборочные квантили, аналогично теоретическим квантилям (см. разд. 4.5, ч. I) подразделяются на выборочные квартили, децили и процентиля. Для определения выборочных квантилей можно использовать аналог выражения

(4.22) первой части, заменив в нем теоретическую функцию распределения выборочной (эмпирической) функцией распределения $F_B(y_0)$ (1.2). Таким образом, выборочная квантиль $z_B(p)$ порядка p определяется решением уравнения

$$F_B [z_B(p)] = p. \quad (1.14)$$

Однако последнее соотношение определяет $z_B(p)$ неоднозначно, учитывая ступенчатый характер эмпирической функции распределения. С помощью уравнения (1.14) можно определить лишь границы выборочных значений. Более рациональным служит подход, при котором выборочная квантиль определяется через элементы вариационного ряда, т. е. порядковые статистики $x_{(j)}$.

Выборочная квантиль $z_B(p)$ порядка p определяется выражением [5]:

$$z_B(p) = x_{(j)}; \quad j = \begin{cases} [np] + 1, & \text{при } np \text{ дробном;} \\ np, & \text{при } np \text{ целом.} \end{cases} \quad (1.15)$$

Здесь $[*]$ — обозначение целой части числа.

Определение (1.15) позволяет записать формулы для нахождения выборочных квартилей и выборочной медианы.

Выборочные квартили $z_B(0.25)$ и $z_B(0.75)$, учитывая отмеченное выше равенство вероятностей элементов вариационного ряда, занимают в вариационном ряде места, симметричные относительно его крайних элементов, поэтому:

$$z_B(0.25) = x_{(g)}; \quad g = \begin{cases} [0.25n] + 1, & \text{при } 0.25n \text{ дробном;} \\ 0.25n, & \text{при } 0.25n \text{ целом;} \end{cases}$$

$$z_B(0.75) = x_{(n-g+1)}.$$

Выборочная медиана $z_B(0.5)$ определяется серединой выборочного ряда и зависит от четности объема выборки:

$$z_B(0.5) = \begin{cases} x_{(k+1)}, & \text{при } n = 2k + 1; \\ (x_{(k)} + x_{(k+1)})/2, & \text{при } n = 2k. \end{cases}$$

Пример 1.2. Найти значения числовых характеристик выборки, рассмотренной в примере 1.1.

□ Решение. Для получения числовых характеристик воспользуемся приведенными выше формулами для выборочных моментов распределения, а так же — встроенными функциями Mathcad, которые реализуют соответствующие вычисления выборочных числовых характеристик (рис. 1.4).

Для получения числовых характеристик исходной реализации предварительно формируются (см. рис. 1.4, а) так называемые функции пользователя — выражения общего вида, последующее использование которых возможно при любом значении аргументов. С помощью функций пользователя в примере представлены начальные и центральные выборочные моменты k -го порядка.

Продолжение mcd-файла, изображенного на рис. 1.4, а, представлено на рис. 1.4, б. В этом фрагменте с помощью выражений (1.5)—(1.13) находятся

$Y := (-3 \ -2 \ -1 \ -1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2)^T$	<u>Вариационный ряд</u>
$y := (-3 \ -2 \ -1 \ 0 \ 1 \ 2)^T$	<u>Статистический ряд</u>
$w := (0.1 \ 0.1 \ 0.3 \ 0.2 \ 0.2 \ 0.1)^T$	<u>Относительные частоты</u>
$n := \text{length}(Y)$ $n = 10$	

Выборочные моменты k-го порядка
(функции пользователя)

<u>Начальные</u>	<u>Центральные</u>
$M(k) := \sum_{i=0}^5 (y_i)^k \cdot w_i$	$m(k) := \sum_{i=0}^5 (y_i - M(1))^k \cdot w_i$
$MV(k) := \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^9 (Y_j)^k$	$mv(k) := \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^9 (Y_j - MV(1))^k$

Рис. 1.4, а. Формирование функций пользователя в среде Mathcad

Вычисления

<u>Выборочное среднее</u>	$M(1) = -0.4$ $MV(1) = -0.4$	$\text{mean}(Y) = -0.4$
<u>Выборочная дисперсия</u>	$m(2) = 2.04$ $mv(2) = 2.04$	$\text{var}(Y) = 2.04$
<u>Выборочное СКО</u>	$s := \sqrt{m(2)}$ $s = 1.428$	$\text{stdev}(Y) = 1.428$
<u>Выборочная асимметрия</u>	$m(3) \div s^3 = -0.099$	
<u>Выборочный эксцесс</u>	$m(4) \div s^4 - 3 = -0.752$	
<u>Выборочная медиана</u>		$\text{median}(Y) = -0.5$
<u>Выборочная мода</u>		$\text{mode}(Y) = -1$

Рис. 1.4, б. Решение примера 1.2 в среде Mathcad

числовые характеристики, которые вычисляются также с применением встроенных функций Mathcad, выделенных на рис. 1.4 заливкой. ■

Рассмотренный пример иллюстрирует удобство и простоту использования встроенных функций Mathcad при обработке данных наблюдений.

1.4. Гистограмма

В целях предварительного (визуального) анализа свойств распределения выборочных данных в математической статистике широко используются гистограммы, т. е. диаграммы распределения частот попадания выборочных данных в заранее выбранные промежутки (разряды). Другой, достаточно широкой, областью применения гистограмм, служит совокупность задач проверки статистических гипотез о виде распределения. Сопоставляя гистограмму с графиками теоретических плотностей распределения, имеется возможность выдвинуть предварительное суждение (гипотезу) о распределении изучаемой случайной величины и осуществить проверку гипотезы.

Широкое распространение гистограмм объясняется тем, что они служат практически удобным средством обобщения статистических данных, число элементов которых может достигать многих тысяч. Выборки подобного объема характерны, например, при исследовании непрерывных случайных величин, когда данные формируются достаточно точными измерительными устройствами, работающими с высокой частотой. Понятно, что любые операции с выборками таких объемов требуют применения вычислительной техники.

Построение гистограмм осуществляется путем выполнения последовательности связанных этапов.

Опуская детали, перечислим этапы применительно к выборке X объема n :

1. Промежуток $(x_{\min}, x_{\max})$ между крайними элементами выборки разбивается на b частичных промежутков (разрядов) равной длины h . Обозначим разряды через $\square x_1, \square x_2, \dots, \square x_b$, а начало каждого разряда через $a_0, a_1, \dots, a_{b-1}$. Совокупность $a_0, a_1, \dots, a_b$ объединим в вектор-столбец длиной $(b+1)$, причем $a_0 = x_{\min}, a_b = x_{\max}$. Тогда получим разряды

$$\square x_1 = (a_0, a_1), \square x_2 = (a_1, a_2), \dots, \square x_b = (a_{b-1}, a_b). \quad (1.16)$$

2. Для каждого i -го разряда $\square x_i$ определяется число n_i элементов выборки, попавших в данный разряд, $i = 1, 2, \dots, b$. Числа носят название частот попадания, а n_i/n — относительных частот попадания элементов в разряды.

3. Определяя для каждого разряда величины приведенных относительных частот $\delta_i = n_i / (nh)$ и размещая полученные значения на серединах разрядов, строим зависимость δ_i от $\square x_i$. Соединяя точки отрезками прямых линий, получают график, который выше был назван полигоном относительных приведенных частот. В этих же осях строится гистограмма, которая образуется совокупностью прямоугольников с основаниями $\square x_i = h$ и высотами δ_i .

Описанная последовательность этапов отражает лишь общий алгоритм построения гистограммы, без указания, например, процедур выбора взаимосвязанных параметров b и h , от которых в сильной степени зависит качество гистограммы. Определение этих параметров обсуждается ниже.

Отметим некоторые особенности гистограмм. При их построении фактически предполагается, что все множество элементов выборки заменяется груп-

пированным статистическим рядом, т. е. — совокупностью b групп, в каждой из которых выбирается «полномочный представитель», в качестве которого выбирается середина x_{cpi} каждого разряда $\square x_i$. При этом предполагается, что i -ый представитель группы встречается в выборке n_i раз, т. е. имеет частоту n_i .

Сделанные предположения позволяют вычислять оценки выборочных моментов, опираясь на сгруппированные данные, например:

$$M_k \cong \frac{1}{n} \sum_{i=1}^b (x_{cpi})^k \cdot n_i; \quad \bar{x}_B \cong \frac{1}{n} \sum_{i=1}^b x_{cpi} \cdot n_i. \quad (1.17)$$

Понятно, что подобное усреднение данных по группам может сопровождаться некоторым искажением свойств выборки, но анализ показывает, что это искажение с ростом объема выборки уменьшается, становясь несущественным при больших объемах выборки [4].

Важным вопросом при построении гистограмм является определение ширины разрядов h или их числа b . При малых значениях h (больших значениях b) гистограммой будет в большей степени выявляться «тонкая» структура распределения выборки, проявляться локальные колебания частот. При слишком большом значении h (малых значениях b) особенности выборочного распределения будут сглаживаться, поскольку осреднению будут подвержены протяженные участки вариационного ряда.

Существует несколько рекомендаций по выбору взаимосвязанных значений h и b . Так, в работе [11] ширину разряда рекомендуется выбирать в зависимости от величины выборочного среднего квадратического отклонения $\sigma_B = \sqrt{D_B}$ (1.11) таким образом, чтобы значения σ_B примерно соответствовали бы величине $2.5h$, т. е.:

$$h \cong \sigma_B / 2.5; \quad b = [(x_{\max} - x_{\min}) / h]. \quad (1.18)$$

Другие рекомендации [4, 5] связаны с выбором числа разрядов:

$$b = [1 + \log_2 n]; \quad b = [1.72 \cdot \sqrt[3]{n}]; \quad h = \{[x_{\max}] - [x_{\min}]\} / b. \quad (1.19)$$

В выражениях (1.18), (1.19) $[*]$ — целая часть числа.

Как отмечалось, гистограммы обычно используются для предварительного анализа законов распределения исследуемой случайной величины, выдвижения гипотезы о виде распределения. С этой целью удобно строить гистограмму и график теоретической плотности гипотетического распределения в одних осях, прибегая к масштабированию одного из графиков при необходимости.

В случае, когда гистограмма строится с использованием приведенных относительных частот $\delta_i = n_i / (nh)$, необходимость масштабирования отсутствует. Действительно, площадь i -го прямоугольника такой гистограммы равна относительной частоте попадания элементов выборки в разряд $\square x_i$. Согласно теореме Бернулли (см. разд. 6.3, ч. I), эта относительная частота по вероятности стремится к вероятности попадания случайной величины в промежуток $\square x_i$ (1.16). Тогда площадь всей гистограммы, построенной с использованием δ_i , равна единице, что позволяет непосредственно сопоставлять такую гисто-

грамму с плотностями вероятностей $f(x)$, без масштабирования. Такое сопоставление графически предполагает, что кривая $f(x)$ должна проходить через точки, абсциссы которых соответствуют серединам разрядов. Для этого на заключительном этапе построения гистограммы ее сдвигают на $0.5h$ влево.

При построении гистограммы с использованием относительных или абсолютных частот необходимо масштабирование, т. е. на том же графике строят кривые $nf(x)$ или $nhf(x)$ соответственно.

Трудоемкие процедуры построения гистограмм и их сопоставление с теоретическими плотностями существенно облегчаются при использовании программных систем компьютерной математики. Так, в среде Mathcad для построения гистограмм используются функции:

hist(B,X) — выводит абсолютные частоты попаданий значений случайной величины в промежутки, границы которых в порядке возрастания объединяет вектор **B**; **X** — вектор выборочных значений случайной величины;

histogram(b,X) — выводит двухстолбцовую матрицу (группированный статистический ряд), первый столбец которой содержит середины промежутков, второй — абсолютные частоты попаданий значений случайной величины (вектор **X**) в равные промежутки, число которых равно b . Ширина промежутка определяется функцией **histogram** по формуле (1.18):

$$h = \{[x_{\max}] - [x_{\min}]\} / b.$$

Функция **hist** позволяет строить гистограммы с использованием промежутков как одинаковой, так и различной длины. Вторая функция (**histogram**) предполагает упрощенную процедуру построения гистограмм, при которой в качестве аргументов функции **histogram** необходимо задать лишь число промежутков и указать имя вектора выборочных данных **X**.

Для обеспечения возможности сопоставления гистограмм, построенных на основе указанных функций, с плотностями распределения вероятностей $f(x)$, как отмечено выше, требуется масштабирование и сдвиг кривой $f(x)$ на половину промежутка влево. Сдвиг следует делать только применительно к встроенной функции **hist**, поскольку в процедуре функции **histogram** такой сдвиг уже предусмотрен. Пример построения гистограммы с применением функции **histogram** приведен на рис. 1.5.

Исходный массив **X** образован выборкой (объемом $n = 1000$) нормально распределенных случайных чисел с параметрами $m = 5$, $\sigma = 1.5$. Размах (ширина) выборки обозначен через R . Число разрядов (промежутков), равное 17, определено по формуле (1.18). Для выделения целой части b использована встроенная функция **ceil** (выводит наименьшее целое, большее или равное значению ее аргумента).

Функция **histogram** формирует первый столбец (середины промежутков) результирующей матрицы (матрицы **F1** на рис. 1.5) по следующему алгоритму: минимальное и максимальное значения выборочных данных округляются до ближайших больших по модулю значений, а полученный диапазон (для выборки рис. 1.5 диапазон, определенный функцией **histogram**, равен 21) делится на значение b , указанное в качестве первого аргумента функции.

```

X := rnorm(1000, 5, 3)          s := stdev(X)      m := mean(X)
n := length(X)                  n = 1000           s = 2.953       m = 4.821
l := min(X)                     u := max(X)       R := u - l       h1 :=  $\frac{s}{2.5}$ 
l = -5.274                      u = 14.185       R = 19.459      h1 = 1.181

```

```

b := ceil( $\frac{R}{h1}$ )      b = 17          F1 := histogram(b, X)

```

```

f0 := F1<0>          f1 := F1<1>          h := f03 - f02      h = 1.235

```

```

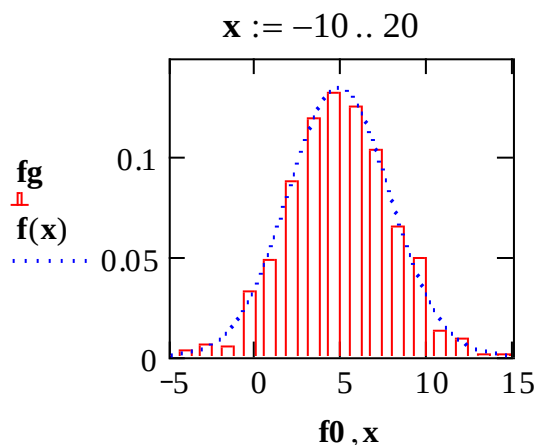
fg := f1 ÷ (n · h)    f(x) := dnorm(x, m, s)

```

```

f04 - f03 = 1.235      f014 - f013 = 1.235

```



F1 =

	0	1
0	-5.382	1
1	-4.147	4
2	-2.912	8
3	-1.676	7
4	-0.441	41
5	0.794	60
6	2.029	109
7	3.265	148
8	4.5	164
9	5.735	155
10	6.971	129
11	8.206	81
12	9.441	61
13	10.676	16
14	11.912	12
15	13.147	2

$$\sum_{i=0}^{16} f1_i = 1000 \quad \sum_{i=0}^{16} (h \cdot fg)_i = 1$$

Рис. 1.5. Построение гистограммы с помощью функции **histogram**

Для выборки, показанной на рис. 1.5, полученная таким способом функцией **histogram** ширина разрядов $h = (15 + 6)/17 = 21/17 = 1.235$. Тогда первый элемент первого столбца матрицы **F1** равен $(-6 + h/2) = -5.382$, что и наблюдаем в первой строке матрицы **F1** на рис. 1.5. Этим диапазон выборочных значений несколько расширяется, чем гарантируется учет всех значений данных наблюдений при формировании группированного статистического ряда.

Второй столбец **f1** результирующей матрицы **F1** содержит абсолютные частоты попаданий в промежутки. Для построения на одном графике плотности полученного распределения и гистограммы второй столбец матрицы **F1** нормируется (см. рис. 1.5) произведением длины реализации n на ширину разряда h ; в результате получаем вектор **fg** приведенных относительных частот. В нижней части рис. 1.5 приведены: сумма абсолютных частот, которая равна

длине реализации n и сумма элементов вектора **fg** приведенных относительных частот, равная единице. Для придания графику абсолютных частот традиционного вида гистограммы к кривой **fg(f0)** применен тип **bar** (диаграммы) в списке **Type** (вкладка **Traces**) диалогового окна форматирования графика.

На рис. 1.6 для случая равных промежутков приведен пример построения гистограммы с использованием другой встроенной функции (**hist**).

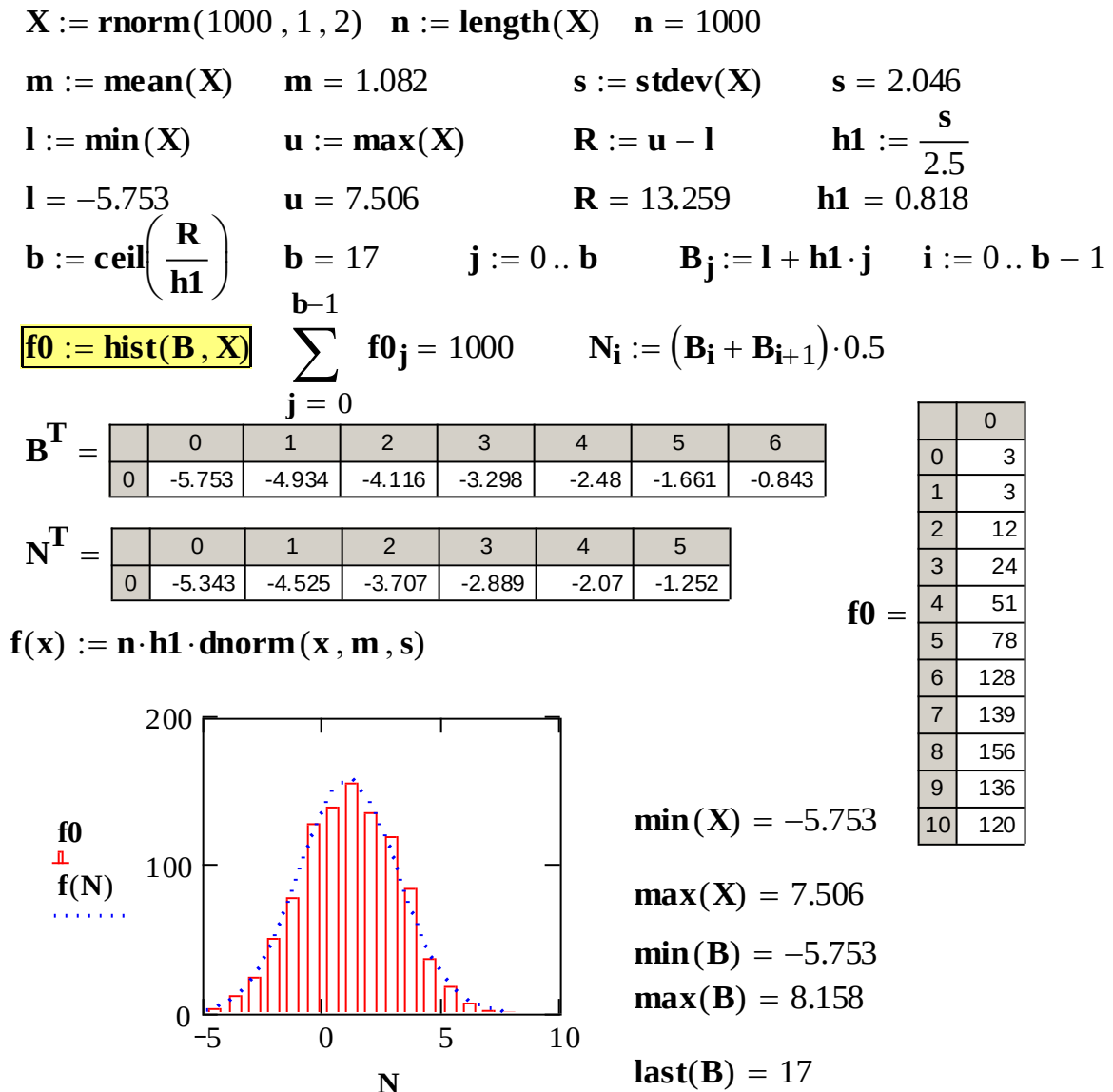


Рис. 1.6. Пример построения гистограммы с применением функции **hist**

Исходная выборка, содержащая 1000 значений нормально распределенной случайной величины с параметрами $m = 1$, $\sigma = 2$, получена с помощью встроенной функции **rnorm**. Значения выборочного среднего и выборочного СКО вычислены встроенными функциями **mean** и **stdev**. Для выбора ширины ($h1$) разрядов в рассматриваемом примере использовано соотношение (1.18).

Границы разрядов объединяет вектор **B**, значения элементов которого получены последовательным прибавлением ширины разряда $h1$ к левому граничному значению диапазона. Все значения случайной величины (вектор **X**)

находятся внутри выбранного диапазона, о чем свидетельствуют вычисленные минимальные и максимальные значения векторов **X** и **B** (см. рис. 1.6). Применение функции **hist** дает вектор **f0** (фрагмент этого вектора приведен на рис. 1.6 справа в нижней части) абсолютных частот попадания значений выборки в каждый из разрядов; сумма элементов этого вектора должна быть равна длине исходной реализации, что и подтверждают вычисления (см. рис. 1.6).

Для отнесения определенных функцией **hist** частот к серединам разрядов вычисляется вектор **N** средних значений разрядов. На графике (см. рис. 1.6) построены элементы вектора **f0** и функция $f(x)$ — соответствующая теоретической плотности исходного (нормального) распределения с параметрами, вычисленными по выборке. Для возможности построения гистограммы и функции $f(x)$ в одних осях плотность нормального распределения (определена на рис. 1.16 функцией **dnorm**) масштабируется множителем nh . Полученная гистограмма визуально достаточно хорошо согласуется с теоретической плотностью распределения.

Сопоставляя процедуры построения гистограмм с помощью функций **hist** и **histogram** (см. рис. 1.6 и 1.5), можно заметить, что применение функции **histogram** проще в случае одинаковых разрядов, однако функция **hist** предоставляет большие возможности для выбора необходимой ширины разрядов и обеспечивает возможность построения гистограмм при неодинаковых разрядах.

Использование любой из указанных функций при построении гистограммы требует предварительного определения варианта разбиения диапазона R на разряды. При этом возможны два варианта: диапазон разбивается на разряды одинаковой ширины (в этом случае гистограмма может быть построена с помощью функций **hist** или **histogram**) и разряды различной ширины (в этом случае применяется функция **hist**). При разбиении диапазона R на b равных промежутков их ширина h выбирается с использованием (1.18) или (1.19).

Если диапазон разбивается на промежутки различной ширины, число таких промежутков выбирают в зависимости от объема выборки n . В табл. 1.1 для этого случая приведены минимальные значения чисел промежутков при различных значениях n [11].

Таблица 1.1

Длина вы- борки n	200	400	600	800	1000	1500	2000
Число про- межутков	16	20	24	27	30	35	40

При любом способе разбиения диапазона выборочных данных на разряды обычно стремятся к тому, чтобы в каждый разряд попадало не менее пяти элементов выборки.

Глава 2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТОЧЕЧНОГО ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Теория оценивания составляет содержание одного из основных разделов общей теории систем. Неразрывно связанная с другими разделами этой теории, такими как теория управления, теория системного анализа и др., теория оценивания изучает общие подходы, методы и алгоритмы получения неизвестных параметров Θ с использованием данных, полученных в результате наблюдений, опытов, испытаний.

Под оценкой $\hat{\Theta}$ параметра Θ в общем случае понимают функцию $\hat{\Theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ измеренных данных $x_1, x_2, \dots, x_n$, обладающую такими свойствами, которые позволяют принять $\hat{\Theta}$ за значение неизвестного параметра Θ или определить интервал нахождения Θ . Ниже определение оценки будет уточнено применительно к конкретным случаям. Задачи отыскания $\hat{\Theta}$ или интервалов нахождения неизвестных параметров носят названия задач оценивания или задач оценки.

Задачи оценки — весьма широкий класс математических задач. К ним относятся задачи оценки параметров распределений, регрессионный анализ, задачи аппроксимации данных наблюдений, задачи построения математических моделей наблюдаемых процессов, оценка состояний динамических систем и многие другие задачи. В рамках настоящего пособия основное внимание будет уделено задачам оценки параметров распределения и регрессионному анализу как основным составляющим прикладной математической статистики.

В математической статистике термин оценка может быть отнесен к задачам получения точечных и интервальных оценок. Определение этих видов оценок будут даны ниже. Поэтому здесь предварительно отметим лишь то, что точечная оценка каждого искомого параметра характеризуется одним значением, тогда как под интервальной оценкой параметра подразумеваются левое и правое граничные значения того интервала, в котором с определенной вероятностью может находиться искомый параметр. Ниже оценки этих двух видов рассматриваются более подробно.

2.1. Точечные оценки и их свойства

Исследуемая случайная величина в каждом конкретном случае характеризуется тем или иным распределением, параметры Θ которого выступают в качестве истинных (теоретических). Для оценки этих параметров исследователь располагает выборочными данными, которые получены в результате экспериментов. Общая постановка задачи определения точечной оценки параметра Θ заключается в следующем.

Пусть выборка (n -мерный вектор выборочных данных) X с элементами $x_1, x_2, \dots, x_n$ имеет плотность распределения $f(x, \Theta)$. В предположении, что функциональная зависимость $f(x, \Theta)$ известна с точностью до параметра Θ , требуется найти такую оценку $\hat{\Theta} = \hat{\Theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, значение которой можно было бы принять за значение неизвестного параметра Θ .

Точечной оценкой Θ называют функцию измеренных данных $\hat{\Theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, приближенно равную значению параметра Θ , т. е.

$$\hat{\Theta} = \hat{\Theta}(x_1, x_2, \dots, x_n) \approx \Theta. \quad (2.1)$$

Ранее отмечалось, что любая функция, которая зависит от наблюдаемых (измеренных) значений, называется статистикой. Однако не всякая статистика может считаться оценкой. Для того чтобы такая функция была оценкой, она должна удовлетворять некоторой совокупности свойств, позволяющих охарактеризовать качество оценки. Среди основных свойств отметим несмещенность, эффективность и состоятельность оценки.

Несмещенность оценок. В общем случае под несмещенной оценкой понимают такую оценку $\hat{\Theta}$ параметра Θ , математическое ожидание которой равно математическому ожиданию искомого (неизвестного) параметра, т. е.

$$M(\hat{\Theta}) = M(\Theta). \quad (2.2)$$

Разность

$$e = \hat{\Theta} - \Theta \quad (2.3)$$

будем называть **ошибкой оценки**. С использованием понятия ошибки оценки (2.3) условие несмещенности (2.2) можно записать в виде:

$$M(e) = 0. \quad (2.4)$$

В частном случае, когда неизвестные параметры — неслучайные, условие несмещенности (2.3) принимает вид:

$$M(\hat{\Theta}) = \Theta. \quad (2.5)$$

Условие (2.5) имеет место в задачах оценки параметров (числовых характеристик) распределений, которые неслучайны по определению (см. разд. 4.4—4.8, ч. I). В этом случае дисперсия ошибки оценки (2.3) будет равна дисперсии самой оценки. Действительно, в задачах оценки параметров Θ распределений (Θ — не случайные параметры), центрированная ошибка оценки будет равна центрированной оценке, откуда, для несмещенных оценок параметров, следует вывод о равенстве дисперсий:

$$D(e) = D(\hat{\Theta}). \quad (2.6)$$

Следует отметить, что несмещенность не позволяет однозначно характеризовать качество оценки, поскольку свойство (2.2) основано на сопоставлении оценки (2.1) и искомого параметра лишь в среднем. В связи с этим условие (2.2) выступает в роли лишь частного критерия близости оценки (2.1) к параметру Θ .

Эффективность оценок. При выборе из нескольких несмещенных оценок оценкой, имеющей более высокое качество, будет считаться та, дисперсия

ошибки оценки которой меньше. Как отмечено выше, применительно к задачам оценки параметров распределений качество оценки будет повышаться с уменьшением дисперсии оценки.

Эффективной оценкой параметра распределения называют несмещенную оценку с минимальной дисперсией.

Эффективность оценки служит важным дополнением условия несмещенности, позволяющим существенно уменьшить множество возможных оценок. Более того, совокупность критериев несмещенности и эффективности является наиболее важной с практической точки зрения и, в задачах получения точечных оценок определяет понятие оптимальности оценок. Таким образом, под **оптимальной оценкой** обычно понимают оценку $\hat{\Theta}$, удовлетворяющую критериям несмещенности и эффективности.

В ряде задач математической статистики рассматриваются также асимптотически эффективные оценки, т. е. оценки, обладающие минимальной дисперсией лишь при неограниченном увеличении объема выборки ($n \rightarrow \infty$).

Состоятельность оценок. Оценка $\hat{\Theta} = \hat{\Theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, называется состоятельной, если она стремится по вероятности к истинному значению параметра Θ . В силу данного определения состоятельная оценка удовлетворяет для любого $\varepsilon > 0$ соотношению:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\Theta} - \Theta| < \varepsilon) = 1. \quad (2.7)$$

Состоятельность означает, что отличие оценки от истинного значения параметра будет уменьшаться с ростом объема выборки.

Рассмотренные три критерия имеют большой практический смысл, поскольку позволяют осуществлять анализ качества различных статистик. Применим эти критерии к анализу свойств выборочного среднего $\bar{x}_B$ и выборочной дисперсии $D_B = \sigma_B^2$, введенных в *разд. 1.3*, и ответа на вопрос, могут ли $\bar{x}_B$ и σ_B^2 служить оценками параметров распределения случайной величины X . Последующие два раздела посвящены такому анализу.

2.2. Свойства выборочного среднего

Рассмотрим случайную величину X , математическое ожидание которой и дисперсия существуют и равны a и D соответственно.

Предположим теперь, что в результате наблюдений получена выборка X объема n с различными элементами x_j , $j = \overline{1, n}$. Поставим вопрос: какой оценкой математического ожидания случайной величины X является выборочное среднее $\bar{x}_B$.

В согласии с отмеченными выше свойствами выборки (*см. разд. 1.1*), выборочное среднее $\bar{x}_B$ (1.6) будем рассматривать как случайную величину, а x_j по множеству экспериментов — как независимые одинаково распределенные

случайные величины X_j , распределение которых такое же, как и распределение случайной величины X . Отсюда следует, что математические ожидания X_j для любого j одинаковы и равны

$$M(X_j) = M(X) = a. \quad (2.8)$$

Тогда выборочное среднее

$$\bar{x}_B = (\sum_{j=1}^n x_j) / n \quad (2.9)$$

будет иметь математическое ожидание

$$M(\bar{x}_B) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n M(X_j) = na/n = a. \quad (2.10)$$

Из (2.10) следует, что выборочное среднее является несмещенной оценкой математического ожидания всегда, когда последнее существует.

Анализируя (2.9), можно убедиться в том, что выборочное среднее — состоятельная оценка математического ожидания. Этот вывод непосредственно следует из теоремы Чебышева (см. разд. 6.4, ч. I), которая утверждает, что среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины сходится по вероятности к ее математическому ожиданию:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{x}_B - M(X)| < \varepsilon) = 1. \quad (2.11)$$

Для анализа эффективности выборочного среднего составим выражение для его дисперсии $D(\bar{x}_B)$:

$$D(\bar{x}_B) = D\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j\right). \quad (2.12)$$

Учитывая независимость и одинаковую распределенность элементов x_j выборки, имеем:

$$D\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j\right) = \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{j=1}^n x_j\right) = \frac{1}{n^2} D(X_j) = n\sigma^2/n^2 = \sigma^2/n. \quad (2.13)$$

Здесь σ^2 — дисперсия случайной величины X .

Полученное выражение позволяет сделать вывод о том, что дисперсия выборочного среднего $\bar{x}_B$ меньше дисперсии σ^2 случайной величины X в n раз, где n — объем выборки.

Выражение (2.13) не позволяет сделать вывод об эффективности выборочного среднего в качестве оценки математического ожидания. На основе (2.13) может быть сделан вывод лишь об асимптотической эффективности $\bar{x}_B$, поскольку при $n \rightarrow \infty$ дисперсия $D(\bar{x}_B) \rightarrow 0$. Однако ниже (см. разд. 2.7.1) будет показано, что в частном случае, когда распределение случайной величины X — нормальное, выборочное среднее обладает свойством эффективности.

В общем случае дисперсия выборочного среднего удовлетворяет соотношению

$$D(\bar{x}_B) = M[(\bar{x}_B - a)^2] = M[(\bar{x}_B)^2] - a^2, \quad (2.14)$$

в чем легко убедиться, раскрывая квадрат разности под знаком математического ожидания и пользуясь свойствами математического ожидания.

2.3. Свойства выборочной дисперсии

Дисперсия D_B выборочной совокупности вычисляется по формулам:

для выборок с различными элементами имеем:

$$D_B = \sigma_B^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}_B)^2; \quad (2.15)$$

для выборок, включающих одинаковые элементы, относительная частота которых $n_j / n = w_j$ для выборочной совокупности ($\sum_i w_i = 1$):

$$D_B = \sum_{i=1}^k w_i (x_i - \bar{x}_B)^2. \quad (2.16)$$

Также, как и в предыдущем разделе, когда рассматривалась взаимосвязь математического ожидания случайной величины X и выборочного среднего $\bar{x}_B$, применительно к дисперсиям (2.15) и (2.16) возникает вопрос, какой оценкой дисперсии $D = \sigma^2$ случайной величины X служит выборочная дисперсия. Иными словами, поставим вопрос, является ли D_B состоятельной, несмещенной и эффективной оценкой дисперсии D . Свойства выборочной дисперсии сформулируем в виде утверждений, начиная с состоятельности.

Утверждение 1. Выборочная дисперсия D_B является состоятельной оценкой дисперсии D случайной величины X [3].

► Можно убедиться в справедливости этого утверждения, составив общее выражение для выборочной дисперсии, аналогичное выражению (4.29) (см. разд. 4.6, ч. I) для теоретической дисперсии, согласно которому дисперсия равна начальному моменту второго порядка без квадрата начального момента первого порядка. Раскрывая выражение для D_B (2.15), получим:

$$D_B = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j^2 - 2x_j \bar{x}_B + \bar{x}_B^2) = \overline{x^2} - 2\bar{x}_B^2 + \bar{x}_B^2 = \overline{x^2} - \bar{x}_B^2. \quad (2.17)$$

Здесь $\overline{x^2}$ — выборочный начальный момент второго порядка, т. е. среднее арифметическое квадратов элементов выборки.

Применяя теорему Чебышева (см. выражения (6.14) разд. 6.4, ч. I) к (2.17), делаем вывод, что первое слагаемое этого выражения сходится по вероятности к $M(X^2)$, а второе слагаемое — к квадрату математического ожидания случайной величины X . Отсюда следует, что выборочная дисперсия (2.17) сходится по вероятности к дисперсии D случайной величины X :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|D_B - D| < \varepsilon) = 1 \text{ для любого } \varepsilon > 0, \quad (2.18)$$

т. е. D_B — состоятельная оценка дисперсии случайной величины X . ◀

Утверждение 2. Выборочная дисперсия D_B — смещенная оценка дисперсии D случайной величины X , причем смещение равно $(-D/n)$.

▷ Действительно, из (2.15) имеем:

$$D_B = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}_B)^2.$$

Преобразуем это выражение, вычитая и добавляя математическое ожидание $M(X) = m$ случайной величины X в круглых скобках. Тогда, согласно (2.17), получаем:

$$D_B = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [(x_j - m) - (\bar{x}_B - m)]^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - m)^2 - (\bar{x}_B - m)^2. \quad (2.19)$$

Вычислим математическое ожидание D_B (2.19):

$$M(D_B) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n M[(X_j - m)^2] - M[(\bar{x}_B - m)^2]. \quad (2.20)$$

Ранее отмечалась независимость и одинаковая распределенность случайных величин, составляющих элементы выборки, поэтому первое слагаемое (2.20) равно дисперсии случайной величины X :

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n M[(X_j - m)^2] = \frac{1}{n} \cdot nD = D,$$

а второе слагаемое, в силу несмещенности выборочного среднего — дисперсия выборочного среднего D/n (2.13).

В результате математическое ожидание (2.20) составляет:

$$M(D_B) = D - D/n = D(n-1)/n, \quad (2.21)$$

что подтверждает справедливость Утверждения 2. ◀

Анализ показывает, что несмещенной оценкой дисперсии D случайной величины X будет величина

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_B = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}_B)^2, \quad (2.22)$$

которая носит название **исправленной выборочной дисперсии**.

Математическое ожидание s^2 (2.22) равно:

$$M(s^2) = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot D = D. \quad (2.23)$$

Сопоставляя выражения для выборочной дисперсии из (2.15) и исправленной выборочной дисперсии (2.22), отметим, что различия между этими оценками уменьшаются с ростом объема выборки n .

Эффективность выборочной дисперсии D_B как оценки дисперсии случайной величины X в общем случае не гарантируется. Можно, как и в случае выборочного среднего, сделать заключение лишь об асимптотической эффективности D_B [5].

2.4. Распределения числовых характеристик выборки

Решение задач оценивания параметров распределений требует знания вида распределения основных числовых характеристик выборки. Анализ этих распределений производится ниже. В процессе такого анализа будут введены в рассмотрение новые виды распределений: распределение Стьюдента (t -распределение), χ^2 -распределение (распределение хи-квадрат) и распределение Фишера (F -распределение), широко используемые в математической статистике при получении интервальных оценок, а также при решении задач проверки статистических гипотез. Основные свойства этих распределений рассмотрены в прил. 9, 10, 11.

2.4.1. Распределение выборочного среднего при известной дисперсии

Пусть X — нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием m и дисперсией D ^{*)}. Предполагая дисперсию известной, сформируем $(n \times 1)$ -вектор $\mathbf{X}$ выборочных данных. На основании свойств выборки (см. разд. 2.2), случайные величины X_j , порождающие выборочные данные с элементами x_j , $j = \overline{1, n}$, независимы и $X_j \sim N(m, D)$.

Выборочное среднее $\bar{x}_B$ (2.10) образуется в результате линейного преобразования элементов выборки. В разд. 5.7, ч. I было показано, что линейная функция нормально распределенного аргумента также имеет нормальное распределение. Отсюда следует, что выборочное среднее нормально распределенной выборки имеет нормальное распределение, параметры которого были определены ранее выражениями (2.11) и (2.13), т. е.

$$\bar{x}_B \sim N(m, D/n). \quad (2.24)$$

Тогда нормированное выборочное среднее

$$\bar{x}_B^* = z = \frac{(\bar{x}_B - m)}{\sqrt{D/n}} = \frac{(\bar{x}_B - m) \cdot \sqrt{n}}{\sigma}; \quad \sigma = \sqrt{D} \quad (2.25)$$

имеет нулевое математическое ожидание, единичную дисперсию и также распределено нормально в силу линейности преобразования (2.25):

$$z = \bar{x}_B^* \sim N(0, 1). \quad (2.26)$$

2.4.2. Распределение выборочной дисперсии

Используя выборочные данные, рассмотренные в разд. 2.4.1, проанализируем распределение выборочной дисперсии. Элементы выборочных данных x_j , $j = \overline{1, n}$ независимы и $X_j \sim N(m, D)$. Исправленная выборочная дисперсия для такой выборки находится по формуле (2.22):

^{*)} Принадлежность случайной величины X к нормальному распределению с указанными параметрами сокращенно обозначим, как и ранее, $X \sim N(m, D)$ или $X \sim N(m, \sigma^2)$.

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}_B)^2. \quad (2.27)$$

В работах [1, 11] показано, что

$$\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}_B)^2 = \sigma^2 \cdot \chi^*, \quad (2.28)$$

где χ^* — случайная величина, распределенная по закону хи-квадрат с $(n-1)$ степенями свободы (см. прил. 9); $\sigma^2 = D$. Из выражения (2.28) следует, что случайная величина χ^* может быть выражена через исправленную выборочную дисперсию s^2 (2.27) или выборочную дисперсию D_B (2.15):

$$\chi^* = \frac{s^2 \cdot (n-1)}{\sigma^2} = \frac{D_B \cdot n}{\sigma^2}. \quad (2.29)$$

Таким образом, выборочная дисперсия и исправленная выборочная дисперсия имеют распределение хи-квадрат с $(n-1)$ степенями свободы.

2.4.3. Распределение выборочного среднего при неизвестной дисперсии

Рассмотрим выборку со свойствами, аналогичными принятым в разд. 2.4.2, и предположим теперь, что дисперсия D нормально распределенных случайных величин X_j неизвестна. Таким образом, для выборочного среднего $\bar{x}_B = (\sum_{j=1}^n x_j)/n$, согласно (2.24), имеем $\bar{x}_B \sim N(m, D/n)$, причем дисперсия D — неизвестная величина. Используем вместо неизвестной D ее несмещенную оценку — исправленную выборочную дисперсию s^2 (2.27) и составим выражение для нормированной выборочной средней в виде:

$$\bar{x}_B^{**} = \frac{(\bar{x}_B - m)\sqrt{n}}{s}; s = \sqrt{s^2}.$$

Преобразуем полученное выражение $\bar{x}_B^{**}$ с учетом (2.25) и (2.29). В результате получим:

$$\bar{x}_B^{**} = \frac{\sigma z \sqrt{n}}{\sqrt{n \cdot \sqrt{\sigma^2 \chi^* / (n-1)}}} = \frac{z \cdot \sqrt{n-1}}{\sqrt{\chi^*}}, \quad (2.30)$$

где z определяется выражением (2.25).

В числителе соотношения (2.30) имеем нормированную нормально распределенную величину, в знаменателе (под корнем) — случайную величину, распределенную по закону хи-квадрат с $(n-1)$ степенями свободы. Это отношение (см. прил. 10) соответствует случайной величине T , распределенной по закону Стьюдента с $(n-1)$ степенями свободы^{*)}.

Таким образом, распределение выборочного среднего при неизвестной дисперсии случайной величины X описывается случайной величиной

^{*)} Числом степеней свободы функции называют число ее независимых аргументов

$$T = \frac{z \cdot \sqrt{n-1}}{\sqrt{\chi^*}}; z = \frac{(\bar{x}_B - m) \cdot \sqrt{n}}{\sigma} \quad (2.31)$$

и имеет распределение Стьюдента (t -распределение) с $(n - 1)$ степенями свободы.

2.4.4. Распределение отношения двух выборочных дисперсий

При проверке статистической гипотезы о равенстве двух выборочных дисперсий обычно анализируется случайная величина, равная отношению этих дисперсий. Определим ее распределение.

Предположим, что даны две выборки с независимыми элементами: выборка X объема n_x с элементами $(x_1, x_2, \dots, x_{n_x})$ и выборка Y объема n_y с элементами $(y_1, y_2, \dots, y_{n_y})$, сформированные в процессе изучения свойств двух нормально распределенных случайных величин X и Y с дисперсиями σ_x^2 и σ_y^2 соответственно. С использованием выражения (2.27) для этих выборок определяются исправленные выборочные дисперсии s_x^2 и s_y^2 .

На основании (2.29)

$$\frac{s_x^2}{\sigma_x^2} : \frac{s_y^2}{\sigma_y^2} = \frac{\chi_x^* \cdot (n_y - 1)}{\chi_y^* \cdot (n_x - 1)}. \quad (2.32)$$

Здесь χ_x^* и χ_y^* — случайные величины, распределенные по закону хи-квадрат с $(n_x - 1)$ и $(n_y - 1)$ степенями свободы.

Из материала, изложенного в прил. 11, следует, что случайная величина (2.32) имеет распределение Фишера (F -распределение) с $(n_x - 1)$ и $(n_y - 1)$ степенями свободы, т. е.:

$$\frac{s_x^2}{\sigma_x^2} : \frac{s_y^2}{\sigma_y^2} \sim F_{n_x-1, n_y-1}. \quad (2.33)$$

Отсюда следует, что отношение двух выборочных дисперсий в условиях, когда две исходные выборки нормально распределены, имеет распределение Фишера.

2.4.5. Асимптотические свойства выборочных моментов

Во многих задачах прикладной математической статистики требуется знание характеристик распределений статистических данных при больших объемах выборки n . Предельный случай такого анализа ($n \rightarrow \infty$) широко использует центральную предельную теорему (см. разд. 6.5, ч. I) и связан с выявлением асимптотических свойств распределений.

Рассмотрим поведение выборочных моментов при $n \rightarrow \infty$. Для начальных выборочных моментов M_k (1.3), (1.4) справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. Выборочный начальный момент M_k k -го порядка стремится по вероятности к начальному моменту v_k случайной величины X , т. е.:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|M_k - v_k| \geq \varepsilon) = 0, \quad (2.34)$$

для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, если моменты v_{2k} и v_k случайной величины X существуют и конечны.

▷ Для доказательства воспользуемся свойствами математических ожиданий и дисперсий. Учитывая, что M_k (1.4)

$$M_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i)^k$$

образован суммой значений независимых и одинаково распределенных случайных величин $(X_i)^k$ с математическими ожиданиями $M(X^k)$ и дисперсиями $D(X^k)$, математическое ожидание и дисперсия M_k будут равны

$$\bar{M}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[(X_i)^k] = M(X^k) = v_k; \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} D(M_k) &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D[(X_i)^k] = \frac{D(X^k)}{n} = \\ &= \frac{M[(X)^{2k}] - [M(X)^k]^2}{n} = \frac{v_{2k} - v_k^2}{n}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

По теореме Чебышева для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$

$$P(|M_k - v_k| \geq \varepsilon) \leq \left[\frac{D(M_k)}{\varepsilon^2} = \frac{v_{2k} - v_k^2}{n\varepsilon^2} \right],$$

откуда непосредственно следует справедливость утверждения (2.34). ◀

Рассмотренная теорема при достаточно больших значениях n позволяет использовать M_k в качестве оценки начального момента k -го порядка v_k случайной величины X . Чтобы конкретизировать неопределенный термин «достаточно больших n », укажем, что приемлемая точность оценок теоретических начальных моментов достигается уже при числе элементов выборки, достигающем нескольких десятков.

На рис. 2.1 приведены результаты вычисления в среде Mathcad выборочного среднего для различных объемов выборки.

Исходный массив выборочных данных в этом примере содержит 100 элементов и сформирован с применением встроенной функции **rnorm** с математическим ожиданием и СКО, равными 1. Текущие значения выборочного среднего приведены на графике и выведены в правой части рис. 2.1. Из приведенных результатов следует, что в этом примере приемлемая точность соответствия выборочного среднего заданной величине математического ожидания

достигается уже при $n > 30$. Следует отметить, что отмеченная здесь и ранее граница $n = 30$, как бы разделяющая большие и малые выборки, является сугубо приблизительной, поскольку в сильной степени зависит от качества статистических данных, составляющих выборку.

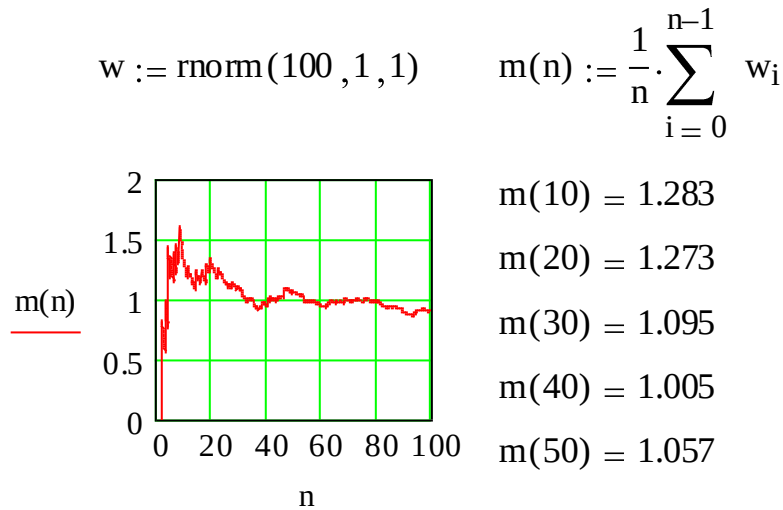


Рис. 2.1. Влияние объема выборки на точность оценки v_1

Утверждение, аналогичное теореме (2.34), может быть доказано и применительно к выборочным центральным моментам m_k (1.8), (1.9), т. е. при $n \rightarrow \infty$ выборочные центральные моменты m_k могут использоваться в качестве оценок соответствующих центральных моментов μ_k случайной величины X (см. разд. 4.8, ч. I). Сходимость по вероятности к соответствующим теоретическим числовым характеристикам остается справедливой и для других выборочных характеристик, представляющих собой функции от выборочных начальных и центральных моментов [5].

При неограниченном увеличении объема выборки могут быть установлены общие свойства выборочных моментов. Как отмечалось выше, выборочный момент есть сумма независимых и одинаково распределенных случайных величин. При достаточно общих условиях, касающихся равномерной малости влияния каждого элемента такой суммы на ее результирующее значение, согласно центральной предельной теореме (см. разд. 6.5, ч. I) нормированная случайная величина

$$(M_k - \bar{M}_k) / \sqrt{D(M_k)} = M_k^*, \quad (2.37)$$

образованная выборочным моментом M_k и его характеристиками (2.35), (2.36), имеет при $n \rightarrow \infty$ асимптотическое нормальное распределение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(M_k^* < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-u^2/2) du. \quad (2.38)$$

Параметрами асимптотического нормального распределения выборочного момента M_k служат: математическое ожидание (2.35) и дисперсия (2.36), ко-

торые выражаются через моменты v_k и v_{2k} случайной величины X . Так, например, параметрами асимптотического распределения выборочного среднего, в силу (2.38), (2.11), (2.13), служат a и D/n , т. е.

$$\bar{x}_B \sim N(a, D/n). \quad (2.39)$$

Рассмотренные свойства выборочных моментов могут быть использованы в качестве основы методов нахождения их точечных оценок. Среди таких методов наибольшее распространение получили: **метод моментов** (К. Пирсона) и **метод максимального правдоподобия** (Р. Фишера). В общем случае, как ранее отмечалось, к задачам точечного оценивания могут быть отнесены и задачи регрессионного анализа, задачи аппроксимации выборочных данных математическими зависимостями общего вида и проч. Ряд важных задач этого класса, например, оценка состояний динамических систем по данным косвенных измерений, выходит за рамки тем, рассматриваемых в настоящем учебном пособии.

Ниже рассматриваются метод моментов и метод максимального правдоподобия. В силу исключительной важности для прикладной статистики задачи регрессионного анализа вынесены ниже в отдельную главу.

2.5. Точечные оценки на основе метода моментов

Метод моментов, предложенный К. Пирсоном (1894 г.) для определения параметров распределений по выборочным данным, основан на сопоставлении выборочных начальных и центральных (эмпирических) моментов M_k и m_k с соответствующими теоретическими моментами v_k и μ_k . В результате такого сопоставления формируются уравнения, в которых теоретические моменты функционально связаны с неизвестными параметрами распределения Θ . Число уравнений, т. е. число сопоставляемых пар моментов, должно соответствовать числу неизвестных параметров. Общий вид уравнений, образованных в результате сопоставления начальных и центральных моментов, соответствует следующим выражениям:

$$\left. \begin{aligned} M_g &= v_g(\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_r); \quad g = 1, 2, \dots, r; \\ m_s &= \mu_s(\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_p); \quad s = 2, 3, \dots, p + 1. \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

Решения уравнений (2.40) служат точечными оценками параметров.

Рассмотрим простейший случай, когда имеется один неизвестный параметр распределения Θ . Пусть плотность вероятности, функционально связанная с параметром Θ , имеет известный вид $f(x, \Theta)$. В этом случае требуется составить всего одно уравнение вида (2.40), использующее, например, сопоставление выборочного момента первого порядка $M_1 = \bar{x}_B$ с соответствующим моментом случайной величины X :

$$v_1 = \bar{x}_B; \quad v_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x, \Theta) dx = \varphi(\Theta); \quad \bar{x}_B = \bar{x}_B(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.41)$$

Решая уравнение (2.41), получаем оценку параметра Θ в функции от элементов выборки $(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$\hat{\Theta} = \Psi(\bar{x}_B) = \Psi(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.42)$$

Для случая двух неизвестных параметров распределения Θ_1 и Θ_2 составляются два уравнения вида (2.40), например:

$$M_1 = v_1, \quad m_2 = \mu_2, \quad (2.43)$$

решением которых служат оценки

$$\hat{\Theta}_1 = \Psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \hat{\Theta}_2 = \Psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.44)$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 2.1. По выборке X с элементами $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ найти точечную оценку параметра λ показательного распределения методом моментов.

□ Решение. Для нахождения параметра λ может быть использовано уравнение (2.41) $v_1 = \bar{x}_B$. Первый начальный момент (математическое ожидание) случайной величины с показательным распределением (см. разд. 5.3, ч. I) $v_1 = 1/\lambda$, поэтому оценка искомого параметра в данном случае равна:

$$\hat{\lambda} = 1/\bar{x}_B. \quad (2.45)$$

На рис. 2.2 приведены результаты оценки параметра λ в среде Mathcad.

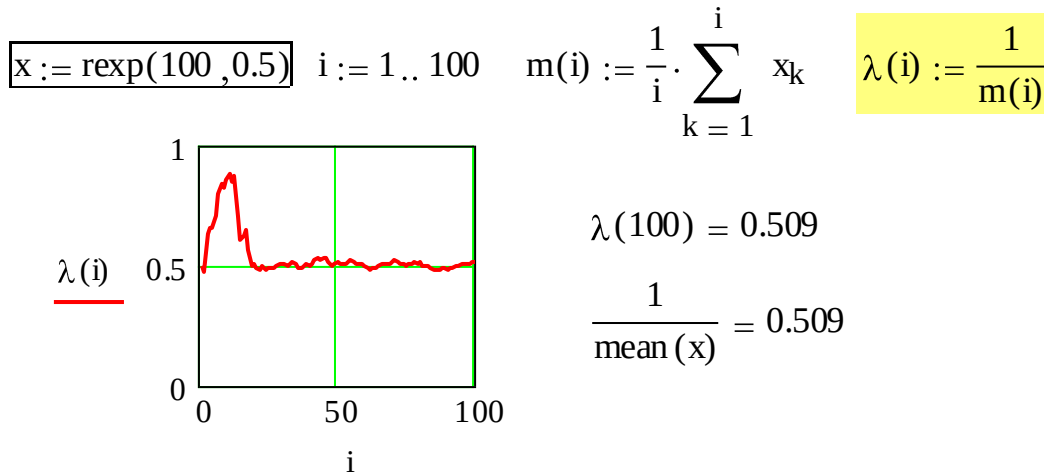


Рис. 2.2. Оценка параметра показательного распределения

Статистические данные в примере (см. рис. 2.2) сформированы совокупностью из 100 случайных чисел с показательным распределением при $\lambda = 0.5$, полученных с помощью встроенной функции **rexp**. Выражения для выборочного среднего $m(i)$ и оценки $\lambda(i)$ искомого параметра составлены для их вычисления при различных объемах выборки в пределах $i = 1, 2, \dots, 100$ (системная переменная **ORIGIN** при расчетах принята равной 1). На графике представлен процесс постепенного уточнения оценки λ с ростом объема выборки.

Справа от графика (см. рис. 2.2) приведены оценки искомого параметра, полученные по всем ($n = 100$) данным выборки с использованием приведенных в mcd-файле выражений, а также с помощью встроенной функции **mean** (вычисление выборочного среднего). ■

Пример 2.2. По выборке X с элементами $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ найти точечные оценки параметров нормального распределения методом моментов.

□ **Решение.** Для нахождения параметров используем два уравнения вида (2.43), причем: $M_1 = \bar{x}_B$; $m_2 = \sigma_B^2 = D_B$; $v_1 = a$; $\mu_2 = \sigma^2 = D$. Таким образом, оценки неизвестных параметров a и D нормального распределения получают-ся равными:

$$\hat{a} = \bar{x}_B, \quad \hat{D} = D_B. \quad (2.46)$$

Согласно (2.46), для нормально распределенной случайной величины оценкой математического ожидания случайной величины X служит выборочное среднее, а оценкой дисперсии — выборочная дисперсия, удовлетворяющие соотношениям (2.10) и (2.15).

На рис. 2.3 приведены результаты оценки параметров нормального распределения в среде Mathcad.

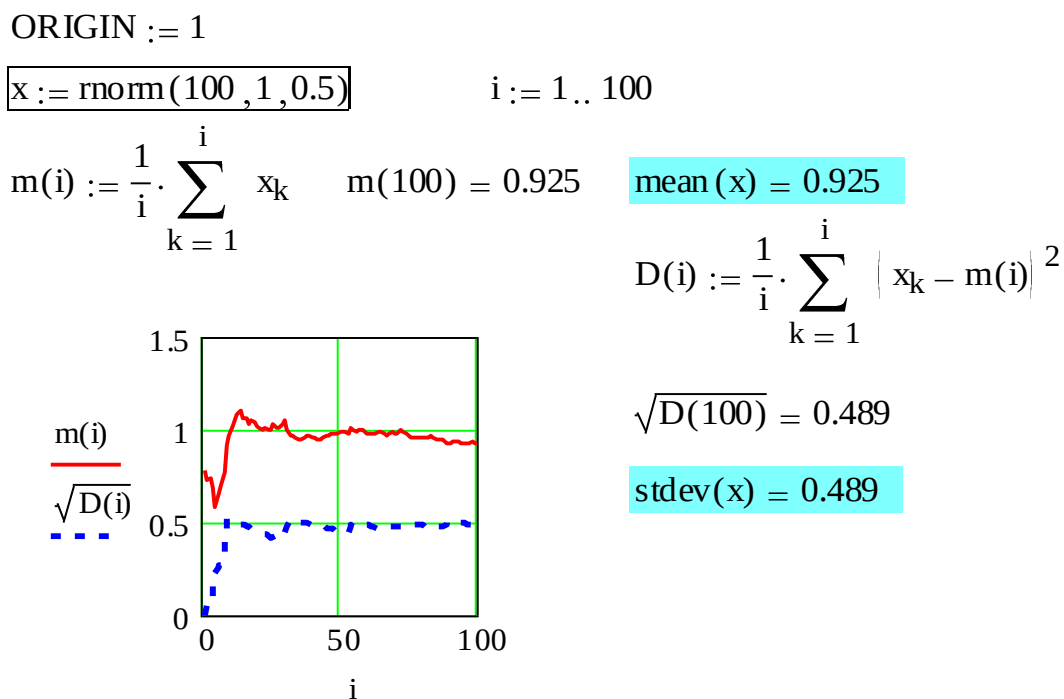


Рис. 2.3. Оценки параметров нормального распределения

Выборочные данные (см. рис. 2.3) сформированы совокупностью из 100 нормально распределенных случайных чисел с параметрами $a = 1$, $D = 0.25$, полученных с помощью встроенной функции **rnorm**. Выборочное среднее $m(i)$ и выборочная дисперсия D_B , являющиеся, в силу (2.46), оценками иско-мых параметров, могут вычисляться при различных объемах выборки в пределах i

$= 1, 2, \dots, 100$ (системная переменная **ORIGIN** при расчетах принята равной 1). Характер изменения значений оценок параметров v_1 и D отображен на графике. Справа от графика (см. рис. 2.3) приведены оценки искомого параметра, полученные по всем данным выборки, причем для вычисления выборочного среднего и выборочного СКО используются встроенные функции **mean** и **stdev** соответственно. ■

Оценки, получаемые с помощью метода моментов, обладают следующими свойствами. В силу состоятельности выборочных моментов (см. разд. 2.2, 2.3) как оценок моментов случайной величины X , оценки, найденные по методу моментов, являются состоятельными. Кроме того, в случае нормального распределения эти оценки обладают еще и свойством асимптотической эффективности. Однако в общем случае оценки по методу моментов могут быть смещенными.

2.6. Метод максимального правдоподобия (МП)

Одним из наиболее распространенных методов получения оценок неизвестных параметров Θ распределений служит метод максимального правдоподобия (МП). Этот универсальный метод был предложен английским математиком Р. Фишером в 1921 г. Основная его идея состоит во введении так называемых функций правдоподобия $L(X; \Theta) > 0$, представляющих собой вероятностные функции сложных событий, которые заключаются в совместном появлении значений элементов выборки. Максимизация по Θ функции правдоподобия позволяет получить оценки этих параметров. Отыскание соответствующих оценок может достигаться аналитически или численно, с использованием поисковых процедур. В материале этого раздела рассматривается ряд таких задач. Кроме того, с примерами решения задач оценки параметров ряда распределений методом МП можно познакомиться в разделе «Математическая статистика» портала <http://mas.exponenta.ru/>. Некоторые из этих интерактивных ресурсов включены в состав прилагаемого диска.

2.6.1. Метод МП для дискретных случайных величин

Пусть X — дискретная случайная величина с математическим ожиданием m и дисперсией D . Соответствующие элементы выборочные данных, составляющие $(n \times 1)$ -вектор $\mathbf{X}$, независимы и одинаково распределены.

Пусть также закон распределения дискретной случайной величины известен с точностью до параметров Θ , точечные оценки которых требуется найти.

Введем обозначение $p(x_i, \Theta)$ для вероятности того, что i -ая случайная величина принимает значение x_i , т. е. $X_i = x_i$, где x_i — элемент выборки. Учитывая независимость случайных величин X_i , значения которых служат элементами выборки $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, запишем функцию правдоподобия в виде вероятности совместного появления значений $(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \Theta) = p(x_1; \Theta) p(x_2; \Theta) \dots p(x_n; \Theta). \quad (2.47)$$

Здесь $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \Theta) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n; \Theta)$ — вероятность того, что случайные величины X_i принимают значения x_i ($i = \overline{1, n}$), составляющие выборку $\mathbf{X}$.

Оценкой максимального правдоподобия (МП) неизвестного параметра Θ распределения дискретной случайной величины называют такое значение $\hat{\Theta}_{\text{МП}}$ из множества допустимых значений параметра, для которого функция правдоподобия (2.47) принимает наибольшее значение при заданных выборочных данных $(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$\hat{\Theta}_{\text{МП}} = \arg \max_{\Theta} L(x_1, x_2, \dots, x_n; \Theta). \quad (2.48)$$

При аналитическом решении для нахождения максимально правдоподобной оценки решается **уравнение правдоподобия**, которое записывается в форме необходимого условия существования экстремума функции правдоподобия:

$$\frac{\partial}{\partial \Theta} L(x_1, x_2, \dots, x_n; \Theta) = 0. \quad (2.49)$$

Достаточным условием существования локального максимума в точке $\Theta = \hat{\Theta}_{\text{МП}}$ служит неравенство вида:

$$\frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} L(x_1, x_2, \dots, x_n; \Theta) < 0. \quad (2.50)$$

Учитывая, что в функции правдоподобия (2.47) $L > 0$ и в вероятностных характеристиках, функциях и плотностях распределений часто встречаются экспоненциальные зависимости, при аналитическом решении в качестве функций правдоподобия удобно использовать логарифм функции $L^*(\mathbf{X}, \Theta) = \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n; \Theta)$, имеющий максимум в той же точке, что и максимум функции (2.47). После логарифмирования функции правдоподобия выражения для нахождения оценки МП могут быть записаны в форме:

$$\frac{\partial L^*(\mathbf{X}, \Theta)}{\partial \Theta} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \Theta} L(\mathbf{X}; \Theta) = 0; \quad \frac{\partial^2 L^*(\mathbf{X}, \Theta)}{\partial \Theta^2} < 0. \quad (2.51)$$

Соотношения (2.47)—(2.51) сохраняют свой вид и при отыскании оценок МП нескольких неизвестных параметров $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_m$, причем стационарные точки ищутся в этом случае из решения системы m уравнений

$$\frac{\partial}{\partial \Theta} L(\mathbf{X}; \Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_m) = 0 \text{ или } \frac{\partial}{\partial \Theta} \ln L(\mathbf{X}; \Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_m) = 0. \quad (2.52)$$

В соотношениях (2.51) и (2.52) введено обозначение: $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Пример 2.3. По выборке $\mathbf{X}$ с элементами $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ найти параметр распределения Пуассона.

□ **Решение.** В этом примере число X появления событий, распределенное по закону Пуассона (см. разд. 5.5, ч. I), связано с элементами выборки $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ следующим образом. Каждое x_i рассматривается в качестве числа появления событий в i -ой серии испытаний ($i = \overline{1, n}$). Вероятность появления x_i событий определяется формулой Пуассона:

$$p(x_i) = P(X = x_i) = [\lambda^{x_i} \cdot \exp(-\lambda)] / (x_i)!.$$

Функция правдоподобия (2.47) для рассматриваемого случая:

$$L(\mathbf{X}; \lambda) = p(x_1; \lambda) p(x_2; \lambda) \dots p(x_n; \lambda) = \frac{\lambda^{\sum x_i} \cdot \exp(-\lambda)}{\prod_i (x_i)!}.$$

Логарифм этой функции и уравнение правдоподобия принимают вид:

$$\ln L(\mathbf{X}; \lambda) = \sum_i x_i \cdot \ln \lambda - n \lambda - \ln(x_1! \cdot x_2! \cdot \dots \cdot x_n!);$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln L(\mathbf{X}; \lambda) = [(\sum_i x_i) / \lambda] - n = 0. \quad (2.53)$$

Корнем уравнения (2.53) служит выборочное среднее:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_i x_i = \bar{x}_B. \quad (2.54)$$

Вторая производная от $\ln L(\mathbf{X}; \lambda)$ в точке $\lambda = \bar{x}_B$ строго отрицательна:

$$\frac{\partial^2 \ln L(\mathbf{X}, \lambda)}{\partial \lambda^2} = -(\sum_i x_i) / \lambda^2 = -n / \bar{x}_B; \quad \bar{x}_B > 0,$$

откуда следует, что полученная оценка (2.54) является оценкой МП. ■

2.6.2. Метод МП для непрерывных случайных величин

Получение оценок МП параметров распределений непрерывных случайных величин в целом аналогично описанному в разд. 2.6.1 подходу.

Пусть X — непрерывная случайная величина, значения которой составляют выборку $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, полученную в качестве возможных значений независимых и одинаково распределенных элементов X_i ($i = \overline{1, n}$). Как и ранее, элементы выборки будем объединять в $(n \times 1)$ -вектор $\mathbf{X}$.

Предположим также, что вид плотности распределения $f(x, \Theta)$ известен с точностью до параметров Θ , точечные оценки которых требуется найти. Таким образом, известны $f_X(x_i, \Theta)$, где x_i — элемент выборки. Учитывая независимость случайных величин X_i , значения которых служат элементами выборки $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, n -мерная плотность распределения векторной случайной величины $\mathbf{X}$ может быть выражена как произведение $f_X(x_i, \Theta)$. Это произведение используется в непрерывном случае в качестве функции правдоподобия.

Функцией правдоподобия непрерывной случайной величины называют:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \Theta) = f_{X_1}(x_1; \Theta) \cdot f_{X_2}(x_2; \Theta) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n; \Theta). \quad (2.55)$$

Оценкой максимального правдоподобия (МП) неизвестного параметра Θ распределения непрерывной случайной величины называют такое значение $\hat{\Theta}_{\text{МП}}$ из множества допустимых значений параметра, для которого функция правдоподобия (2.55) принимает наибольшее значение при заданных выборочных данных $(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$\hat{\Theta}_{\text{МП}} = \arg \max_{\Theta} L(x_1, x_2, \dots, x_n; \Theta).$$

Решение, как и ранее, достигается аналитически или численно. При аналитическом решении анализируется уравнение (или система уравнений) правдоподобия.

Уравнение правдоподобия (необходимое условие существования экстремума функции правдоподобия) и достаточные условия максимума (в точке $\Theta = \hat{\Theta}_{\text{МП}}$) записываются в форме:

$$\frac{\partial}{\partial \Theta} L(x_1, x_2, \dots, x_n; \Theta) = 0; \quad \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} L(x_1, x_2, \dots, x_n; \Theta) < 0. \quad (2.56)$$

При наличии нескольких локальных максимумов функции правдоподобия (2.55) их анализируют и находят наибольший, который и соответствует оценке максимального правдоподобия.

Аналогично дискретному случаю, рассмотренному в *разд. 2.6.1*, при аналитическом решении задач получения оценок МП удобно использовать логарифм функции $L^*(\mathbf{X}, \Theta) = \ln [L(x_1, x_2, \dots, x_n; \Theta)]$, имеющий максимум в той же точке, что и максимум функции (2.55). При использовании логарифма функции правдоподобия принимают вид:

$$\frac{\partial L^*[(\mathbf{X}, \Theta)]}{\partial \Theta} = 0; \quad \frac{\partial^2 L^*[(\mathbf{X}, \Theta)]}{\partial \Theta^2} < 0. \quad (2.57)$$

При наличии нескольких неизвестных параметров $(\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_m)$ рассматривают систему из m уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial \Theta} L(\mathbf{X}; \Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_m) = 0 \text{ или } \frac{\partial}{\partial \Theta} \ln [L(\mathbf{X}; \Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_m)] = 0. \quad (2.58)$$

В соотношениях (2.58) использовано обозначение: $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Пример 2.4. Найти оценку МП параметра $\lambda > 0$ показательного распределения с плотностью распределения $f_X(x) = \lambda[\exp(-\lambda x)]$, если в результате испытаний непрерывная случайная величина X , распределенная по показательному закону, приняла значения $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

□ Решение. Записывая функцию правдоподобия (2.55) и ее логарифм, получим следующее уравнение правдоподобия:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = L(\mathbf{X}; \lambda) = f_{X_1}(x_1; \lambda) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n; \lambda) = \lambda^n \cdot \exp(-\lambda \sum_i x_i);$$

$$\ln [L(\mathbf{X}; \lambda)] = n \ln (\lambda) - \lambda \sum_i x_i ; \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln [L(\mathbf{X}; \lambda)] = \frac{n}{\lambda} - (\sum_i x_i) = 0. \quad (2.59)$$

Из (2.59) следует, что оценка МП параметра λ равна выборочному среднему, что, естественно, совпадает с ранее полученным результатом (2.45):

$$\hat{\lambda} = 1/\bar{x}_B. \quad (2.60)$$

Вторая производная от $\ln L(\mathbf{X}; \lambda)$ в точке $\lambda = \hat{\lambda}$

$$\frac{\partial^2 \ln [L(\mathbf{X}, \lambda)]}{\partial \lambda^2} = -n / \lambda^2$$

сугубо отрицательна, что определяет оценку (2.60) как оценку МП. ■

Пример 2.5. Найти оценки МП параметров a и $\sigma^2 = D$ нормального распределения

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp[-(x-a)^2/2\sigma^2],$$

если нормально распределенная величина X в результате испытаний принимает значения $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

□ Решение. Следуя описанной выше процедуре, запишем функцию правдоподобия (2.55)

$$L = \prod_i f_{X_i}(x_i; \Theta_1, \Theta_2) = \frac{1}{\sigma^{1/n} (\sqrt{2\pi})^n} \cdot \exp[-\sum_i (x_i - a)^2 / 2\sigma^2];$$

$$\ln(L) = -n \ln(\sigma) + \ln[1 / (\sqrt{2\pi})^n] - \sum_i (x_i - a)^2 / 2\sigma^2$$

и уравнения правдоподобия:

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial a} = \frac{(\sum_i x_i) - na}{\sigma^2} = 0; \quad \frac{\partial \ln(L)}{\partial \sigma} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{n}{\sigma^2} + \frac{\sum_i (x_i - a)^2}{2\sigma^4} = 0.$$

В последних соотношениях использованы упрощенные обозначения:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \Theta_1, \Theta_2) = L; \quad \Theta_1 = a; \quad \Theta_2 = \sigma^2 = D.$$

Из уравнений правдоподобия имеем:

$$\hat{a} = \frac{1}{n} \sum_i x_i = \bar{x}_B, \quad \hat{D} = \frac{1}{n} \sum_i (x_i - a)^2 = D_B. \quad (2.61)$$

Для проверки того, что оценки (2.61) доставляют функции правдоподобия $\ln(L)$ максимум, составим симметричную матрицу $\mathbf{H}$ вторых производных (матрицу Гессе), образованную двукратным дифференцированием скалярной функции $\ln(L)$ по вектору-столбцу $\Theta = | a; \sigma^2 |^T$ искомых параметров в точке экстремума (2.61). Известно, что, при отрицательной определенности матрицы Гессе в этой точке, оценки (2.61) обеспечивают максимум функции правдоподобия. В рассматриваемом примере анализ матрицы Гессе в точке (2.61)

показывает, что эта матрица — диагональная, с элементами главной диагонали, равными $(-0.5n / D_B; -0.5n / D_B^2)$, что подтверждает наличие максимума.

Подобный анализ, в общем случае сопряженный с громоздкими выкладками, существенно упрощается при использовании систем компьютерной математики (СКМ) с их возможностями символьных вычислений и преобразований. В качестве иллюстрации практического удобства подобного подхода в прил. 12 приведены результаты символьного анализа функции $\ln(L)$ и получения матрицы Гессе в экстремальной точке с применением Mathcad.

Ранее отмечалось, что метод максимального правдоподобия может быть использован для численного получения оценок параметров. В этом случае решение целесообразно получать с применением СКМ, в которых имеются встроенные функции, реализующие процедуры поиска экстремумов. В среде Mathcad поиск безусловных и условных максимумов производится с применением функции **maximize** [17], которая реализует несколько процедур поиска; выбор метода осуществляется пользователем. Типовая структура максимизации в среде Mathcad функции правдоподобия $\ln(L)$ для рассмотренного выше примера представлена на рис. 2.4.

$x := \text{rnorm}(50, 5, 0.9)$ $\text{ORIGIN} := 1$ $n := \text{last}(x)$ $n = 50$

$$f(a, D) := -n \cdot \ln|\sqrt{D}| + \ln \left[\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2 \cdot \pi}}{D} \right)^n} \right] - \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - a|^2}{2 \cdot D}$$

$a := 0$ $D := 2$ Начальные приближения

Given

Ограничение

$D > 0$

$\Theta_0 := \text{Maximize}(f, a, D)$ $\Theta_0 = \begin{pmatrix} 5.155 \\ 0.843 \end{pmatrix}$ Результат

$\text{mean}(x) = 5.155$ Выборочное среднее (эталон равен 5)

$\text{var}(x) = 0.843$ Выборочная дисперсия

$\sqrt{\text{var}(x)} = 0.918$ Выборочное СКО (эталон равен 0.9)

Рис. 2.4. Максимизация функции правдоподобия в среде Mathcad

Исходная выборка ($n = 50$) независимых нормально распределенных чисел сформирована с помощью встроенной **rnorm**. В качестве максимизируемой функции выступает $\ln(L)$, выделенная рамкой; для решения применяется вычислительный блок Mathcad [17], границами которого служат ключевые слова **given** и **maximize** (встроенная функция для поиска условных или безусловных

максимумов функций многих переменных). Предварительно (перед вычислительным блоком) задаются начальные приближения.

В данном случае решается задача на условный экстремум; условие $D > 0$ используется как ограничение. Полученные оценки совпадают с соответствующими выборочными значениями (2.61), вычисление которых производится также с помощью встроенных функций (см. нижнюю часть рис. 2.4). Пример вычислительной структуры может быть использован и в других задачах поиска экстремумов. ■

Рассмотренный пример оценки параметров нормального распределения допускает как аналитическое, так и численное решение. Однако среди задач поиска оценок максимального правдоподобия встречаются такие, в которых получение аналитического решения невозможно. Применение СКМ в таких задачах становится, практически, единственно возможным, поскольку решение без использования СКМ будет сопряжено с необходимостью программной реализации соответствующих поисковых процедур. Рассмотрим пример такой задачи.

Пример 2.6. Найти оценку МП параметра смещения m распределения Коши с плотностью вероятности вида:

$$f_X(x; m) = \frac{1}{\pi[1 + (x - m)^2]}, \quad (2.62)$$

если случайная величина X с таким распределением в результате испытаний принимает значения $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

□ Решение. Свойства распределения Коши и встроенные функции для анализа этого распределения в Mathcad рассмотрены в прил. 13.

Составляя функцию правдоподобия, ее логарифм и уравнение правдоподобия, видим, что оценка должна определяться численным методом. На рис. 2.5 приведено решение задачи в среде Mathcad.

$x := \text{rcauchy}(100, 5, 1)$	$\text{ORIGIN} := 1$	$n := \text{last}(x)$
$f(m) := -n \cdot \ln \pi - \sum_{i=1}^n \ln \left[1 + x_i - m ^2 \right]$		$n = 100$
$m := 0$	<u>Начальное приближение</u>	
$m_0 := \text{Maximize}(f, m)$	$m_0 = 5.019$	<u>Результат</u>
$X := \text{sort}(x)$		
$\frac{X_{50} + X_{51}}{2} = 5.003$	<u>Выборочная медиана сортированного массива</u>	

Рис. 2.5. Вычисление ОМП параметра распределения Коши в среде Mathcad

Выборочные данные формируются как совокупность 100 независимых случайных чисел, имеющих распределение Коши с параметрами $m = 5$, $s = 1$. Максимизируемая функция (логарифм функции правдоподобия) выделена рамкой (см. рис. 2.5). В данном случае задача сводится к поиску безусловного экстремума, поэтому ключевое слово **given** при решении в среде Mathcad не используется, а решение ищется путем автономного использования встроенной функции **maximize**. Полученный результат характеризуется высокой точностью. Сопоставление полученной оценки с выборочной медианой (1.15) подтверждает близость этих значений, отмеченную в [5]. ■

Приведенные примеры иллюстрируют удобство и сравнительную простоту использования СКМ при получении как символьного, так и численного результата решения задач нахождения оценок МП.

2.7. Неравенство Рао—Крамера. Свойства оценок максимального правдоподобия

Полученные в предыдущем разделе оценки МП выражались через выборочное среднее, выборочную дисперсию или были им равны. Свойства этих выборочных числовых характеристик были рассмотрены ранее, в *разд.* 2.2 и 2.3. Однако рассмотренные случаи не позволяют ответить на вопрос, какими свойствами обладают оценки МП в общем случае. При анализе таких свойств большое значение имеет неравенство Рао—Крамера, позволяющее установить нижнюю границу дисперсии несмещенных оценок.

2.7.1. Неравенство Рао—Крамера

Из общих свойств функции правдоподобия (2.55) следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} L(x_1, \dots, x_n; \Theta) dx_1 \dots dx_n = 1; \quad L > 0. \quad (2.63)$$

Примем достаточно общие предположения, касающиеся дифференцируемости функции правдоподобия $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \Theta) = L$ по Θ , а также выполнения условий, допускающих возможность изменения порядка интегрирования и дифференцирования [4].

Дифференцирование левой части выражения (2.63) по Θ дает:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial L}{\partial \Theta} dx_1 \dots dx_n = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \ln L}{\partial \Theta} \cdot L dx_1 \dots dx_n = M \left[\frac{\partial \ln L}{\partial \Theta} \right]. \quad (2.64)$$

Здесь M — символ математического ожидания. В (2.64) использовано очевидное равенство

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \Theta} = \frac{1}{L} \cdot \frac{\partial L}{\partial \Theta}, \quad \text{откуда} \quad \frac{\partial L}{\partial \Theta} = L \cdot \frac{\partial \ln L}{\partial \Theta}. \quad (2.65)$$

Из (2.63) следует, что выражение (2.64) равно нулю. Тогда:

$$M\left[\Theta \cdot \frac{\partial \ln L}{\partial \Theta}\right] = \Theta \cdot M\left[\frac{\partial \ln L}{\partial \Theta}\right] = 0. \quad (2.66)$$

Для случая $n = 1$ приведенные соотношения позволяют записать:

$$\begin{aligned} M\left[\frac{\partial \ln f_X(x; \Theta)}{\partial \Theta}\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \ln f_X(x; \Theta)}{\partial \Theta} \cdot f(x; \Theta) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_X(x; \Theta)}{\partial \Theta} dx = \\ &= \frac{\partial}{\partial \Theta} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x; \Theta) dx = \frac{\partial}{\partial \Theta} 1 = 0. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Используя полученные соотношения, запишем условие несмещенности оценок МП в форме:

$$M(\hat{\Theta}) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\Theta}(x_1, \dots, x_n) L(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \Theta. \quad (2.68)$$

В целях упрощения последующих записей далее, в ряде выражений, будут использоваться упрощенные обозначения функции правдоподобия и оценки:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \Theta) = L; \quad \hat{\Theta}(x_1, \dots, x_n) = \hat{\Theta}.$$

Продифференцируем левую и правую части условия несмещенности (2.68), учитывая выражения (2.65),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\Theta}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial \ln L}{\partial \Theta} L dx_1 \dots dx_n = 1 \quad (2.69)$$

и представим (2.69) в иной форме. Поскольку, как отмечалось, выражение (2.64) равно нулю, то, применив (2.66), запишем (2.69) в виде:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\Theta} - \Theta) \cdot \frac{\partial \ln L}{\partial \Theta} L dx_1 \dots dx_n = 1, \text{ т. е. } M\left[(\hat{\Theta} - \Theta) \cdot \frac{\partial \ln L}{\partial \Theta}\right] = 1. \quad (2.70)$$

Запишем теперь выражение для дисперсии оценки МП:

$$D(\hat{\Theta}) = M[(\hat{\Theta} - \Theta)^2]. \quad (2.71)$$

Согласно неравенству Буняковского—Коши для математических ожиданий имеем: $M(XY) \leq M(X^2) \cdot M(Y^2)$ [5]. Составляя подобное неравенство из элементов выражения (2.70), получим:

$$M[(\hat{\Theta} - \Theta)^2] \cdot M\left[\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \Theta}\right)^2\right] \geq \left\{M\left[(\hat{\Theta} - \Theta) \cdot \left(\frac{\partial \ln L}{\partial \Theta}\right)\right]\right\}^2 = 1,$$

откуда для дисперсии несмещенной оценки МП можно записать:

$$D(\hat{\Theta}) = M[(\hat{\Theta} - \Theta)^2] \geq 1/M \left[\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \Theta} \right)^2 \right]. \quad (2.72)$$

Знаменатель последнего выражения можно представить в виде суммы:

$$\begin{aligned} M \left[\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \Theta} \right)^2 \right] &= M \left\{ \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln f_X(x_i; \Theta)}{\partial \Theta} \right]^2 \right\} = M \left[\left(\sum_{i=1}^n Z_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n Z_j \right) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n M(Z_i^2) + 2 \cdot \sum_{\substack{i \neq j \\ i < j}} M(Z_i) \cdot M(Z_j); \quad Z_i = \frac{\partial \ln f_X(x_i; \Theta)}{\partial \Theta}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Произведение математических ожиданий случайных чисел Z_i и Z_j во втором слагаемом выражения (2.73) является следствием независимости элементов выборки, которое было введено при определении функций правдоподобия (см. разд. 2.61 и 2.62).

Анализ суммы (2.73) показывает, что второе слагаемое, в силу (2.67), для любого значения i или j равно нулю. Поэтому

$$M \left[\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \Theta} \right)^2 \right] = \sum_{i=1}^n M(Z_i^2) = \sum_{i=1}^n M \left[\frac{\partial \ln f_X(x_i; \Theta)}{\partial \Theta} \right]^2.$$

Учитывая, кроме того, одинаковость закона распределения для элементов выборки, полученное соотношение можно окончательно переписать в форме:

$$M \left[\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \Theta} \right)^2 \right] = n \cdot M \left[\frac{\partial \ln f_X(x_i; \Theta)}{\partial \Theta} \right]^2. \quad (2.74)$$

Функцию

$$I(\Theta) = M \left[\frac{\partial \ln f_X(x_i; \Theta)}{\partial \Theta} \right]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \ln f_X(x_i; \Theta)}{\partial \Theta} \right]^2 f_X(x; \Theta) dx \quad (2.75)$$

называют **информацией по Фишеру** о параметре Θ .

Окончательно выражение (2.72) записывается в форме

$$D(\hat{\Theta}) \geq [1/n \cdot I(\Theta)], \quad (2.76)$$

которое носит название **неравенства Рао—Крамера**. В правой части этого неравенства — нижняя граница дисперсии несмещенной оценки максимального правдоподобия.

Знак равенства в выражении (2.76) соответствует случаю, когда дисперсия полученной оценки достигает своей нижней границы. При этом оценка параметра является эффективной. Такой случай возникает, когда выполняется условие [4]:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \Theta} = k(\Theta) \cdot (\hat{\Theta} - \Theta). \quad (2.77)$$

Это условие носит название условия эффективности оценок максимального правдоподобия. Для конкретной задачи, решаемой методом максимального правдоподобия, возможность составления выражения вида (2.77) означает, что получаемая оценка МП будет эффективной.

Однако в большинстве практических задач математической статистики эффективность оценок максимального правдоподобия гарантировать нельзя. В то же время при $n \rightarrow \infty$ оценки МП обладают свойством асимптотической эффективности.

Примером эффективной оценки, как следует из *разд. 2.2*, служит выборочное среднее нормально распределенной выборки. Выборочное среднее является эффективной оценкой математического ожидания нормально распределенной случайной величины X . Проверим это утверждение, используя условие (2.77) и уравнения правдоподобия, полученные в примере 2.5. Из первого уравнения правдоподобия (пример 2.5) следует:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \Theta} = \frac{n}{\sigma^2} \left(\frac{1}{n} \sum_i x_i - \Theta \right) = \frac{n}{\sigma^2} (\bar{x}_B - \Theta) = \frac{n}{\sigma^2} \cdot (\hat{\Theta} - \Theta).$$

Полученное равенство для фиксированного объема выборки n имеет вид (2.77), откуда следует, что выборочное среднее — эффективная оценка математического ожидания нормального распределения при известной дисперсии.

2.7.2. Свойства оценок максимального правдоподобия

Соотношения, полученные в *разд. 2.6* и *2.7.1*, а также рассмотренные примеры формирования оценок максимального правдоподобия, позволяют сформулировать основные свойства этих оценок. Перечислим их, опираясь на полученные выше результаты и работу [4]:

1. Если существует эффективная оценка $\hat{\Theta}_{\text{эфф}}$ скалярного параметра Θ , то она совпадает с оценкой МП: $\hat{\Theta}_{\text{МП}} = \hat{\Theta}_{\text{эфф}}$.

Это утверждение следует из условия эффективности (2.77). Действительно, в точке $\Theta = \hat{\Theta}_{\text{МП}}$ левая часть выражения (2.77) равно нулю. Тогда, из равенства нулю правой части (2.77) $k(\Theta) \cdot (\hat{\Theta}_{\text{эфф}} - \hat{\Theta}_{\text{МП}}) = 0$ следует сформулированное выше свойство.

2. Оценки МП $\hat{\Theta}_{\text{МП}}$ состоятельны.

3. Оценки МП $\hat{\Theta}_{\text{МП}}$ асимптотически нормальны, т. е. имеют распределение $N(\Theta, 1/\sqrt{n \cdot I(\Theta)})$.

4. Оценки МП $\hat{\Theta}_{\text{МП}}$ асимптотически эффективны, т. е. при $n \rightarrow \infty$ имеем:

$D(\hat{\Theta}_{\text{МП}}) = \frac{1}{n \cdot I(\Theta)} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, где $I(\Theta)$ — информация Фишера (2.75) о параметре Θ .

5. В общем случае несмещенность оценок МП $\hat{\Theta}_{\text{МП}}$ не гарантируется.

Условие эффективности, полученное выше в виде (2.77), может быть представлено несколько в ином виде. Действительно, из неравенства Рао—Крамера (2.76) следует, что эффективные оценки удовлетворяют равенству $D(\hat{\Theta}) = [1/n \cdot I(\Theta)]$, т. е. оценки, для которых справедливо соотношение

$$n \cdot I(\Theta) \cdot D(\hat{\Theta}) = 1, \quad (2.78)$$

будут эффективными. Выражение $n \cdot I(\Theta) \cdot D(\hat{\Theta})$ может быть использовано в качестве показателя эффективности, причем разность $[n \cdot I(\Theta) \cdot D(\hat{\Theta}) - 1]$ будет показателем степени близости полученной оценки к эффективной.

Глава 3. ИНТЕРВАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Теории точечного оценивания, основы которой рассмотрены в *главе 2*, содержит подходы к решению широкого круга задач оценки числовых характеристик распределений по выборочным данным. Эти подходы в большинстве случаев позволяют дать лишь качественное представление о степени близости оценок $\hat{\Theta}$ к истинным, неизвестным для исследователя, значениям Θ . В то же время, при решении задач прикладной статистики практически важно получить не только качественные, но и количественные данные о соответствии оценок истинным значениям.

Этим целям служит предложенная Ю. Нейманом (1937 г.) процедура оценки параметра Θ распределения с определением того интервала, в котором с заданной вероятностью содержится этот параметр. Сущность такого подхода составляет основу интервального оценивания, которое использует некоторые элементы теории точечного оценивания и дополняет ее.

3.1. Сущность задач интервального оценивания

Пусть случайная величина имеет известный с точностью до параметра Θ закон распределения. По выборке $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ объема n требуется получить оценку параметра Θ и оценить границы его вероятного расположения на числовой оси.

Предположим, что точечная оценка $\hat{\Theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, использующая данные выборки, предварительно получена. **Точность** такой **оценки** можно охарактеризовать неравенством

$$|\Theta - \hat{\Theta}| < \delta; \quad \delta > 0, \quad (3.1)$$

причем чем меньше значение δ , тем выше точность полученной оценки.

Надежность (степень доверия) **оценки** может быть охарактеризована вероятностью γ , с которой выполняется неравенство (3.1):

$$P[|\Theta - \hat{\Theta}| < \delta] = \gamma.$$

Переходя к двустороннему неравенству, получаем:

$$P[\Theta_1 < \Theta < \Theta_2] = \gamma; \quad \Theta_1 = \hat{\Theta} - \delta; \quad \Theta_2 = \hat{\Theta} + \delta. \quad (3.2)$$

Вероятность γ носит название **доверительной вероятности**, а интервал $[\Theta_1, \Theta_2]$ называют **доверительным интервалом**. Значения

$$\Theta_1 = \Theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n); \quad \Theta_2 = \Theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.3)$$

зависят от выборочных данных и, поэтому, случайны.

Задача интервального оценивания состоит в нахождении доверительного интервала при заданной доверительной вероятности.

Значения Θ_1, Θ_2 , служащие границами доверительного интервала, называют **интервальной оценкой** параметра Θ .

В практике решения задач интервального оценивания часто вместо доверительной вероятности γ задается ее дополнение до единицы или **уровень значимости**:

$$\alpha = 1 - \gamma. \quad (3.4)$$

Уровень значимости определяет вероятность нахождения неизвестного параметра Θ за границами доверительного интервала:

$$\alpha = P[\Theta < \Theta_1] + P[\Theta > \Theta_2]. \quad (3.5)$$

Введенные параметры α, γ, δ взаимосвязаны. Из общих соображений ясно, что стремление, например, увеличить значение доверительной вероятности γ (или уменьшить α) приведет к расширению доверительного интервала при той же выборке, т. е. к росту δ и потере точности. Точностью интервального оценивания принято считать половину ширины доверительного интервала:

$$\delta = (\Theta_2 - \Theta_1) / 2. \quad (3.6)$$

При определении доверительного интервала обычно исходят из того, что вероятности событий $\Theta \in (-\infty; \Theta_1)$ и $\Theta \in (\Theta_2; \infty)$ одинаковы, т. е.

$$P[-\infty < \Theta < \Theta_1] = P[\Theta_2 < \Theta < \infty] = \alpha / 2. \quad (3.7)$$

В то же время, вероятность нахождения параметра Θ внутри интервала (Θ_1, Θ_2) равна $\gamma = 1 - \alpha$. Рисунок 3.1 отражает принятые предположения.

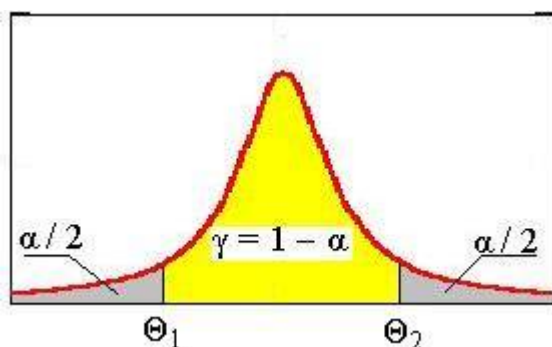


Рис. 3.1. Доверительная вероятность и уровень значимости

Укажем общий подход к определению δ , который характеризует точность интервальной оценки, а, следовательно, и границы доверительного интервала (3.3). Этот подход заключается в последовательном выполнении ряда этапов. Для определения δ необходимо

1. Получить точечную оценку $\hat{\Theta}$ искомого параметра.
2. Задать статистику $S(\Theta, \hat{\Theta})$, содержащую параметр Θ и его точечную оценку $\hat{\Theta}$ таким образом, чтобы:
 - функция распределения статистики $F_S(x)$ была известна точно или приближенно;
 - статистика $S(\Theta, \hat{\Theta})$ была бы непрерывной и строго монотонной.

3. Задать уровень значимости $\alpha = 1 - \gamma$. Для левой и правой внешних зон за пределами доверительного интервала (см. рис. 3.1) принять вероятности, равные $\alpha / 2$.

4. Определить квантили $z_{\alpha/2}$ и $z_{1-\alpha/2}$ распределения случайной величины $S(\Theta, \hat{\Theta})$ порядков $\alpha/2$ и $(1 - \alpha/2)$. При этом:

$$P[z_{\alpha/2} < S(\Theta, \hat{\Theta}) < z_{1-\alpha/2}] = F_s(z_{1-\alpha/2}) - F_s(z_{\alpha/2}) = (1 - \alpha/2) - \alpha/2 = \gamma. \quad (3.8)$$

5. Записать неравенство

$$z_{\alpha/2} < S(\Theta, \hat{\Theta}) < z_{1-\alpha/2} \quad (3.9)$$

и преобразовать его, выражая из $S(\Theta, \hat{\Theta})$ искомый параметр Θ и определяя тем самым δ (3.6). Знаки преобразованного неравенства будут зависеть от характера связи $S(\Theta, \hat{\Theta})$ с параметром Θ . При строго возрастающей зависимости $S(\Theta, \hat{\Theta})$ от Θ результирующее неравенство будет иметь знаки, совпадающие со знаками неравенства (3.9), т. е. иметь вид:

$$\Theta_1(z_{\alpha/2}) < \Theta < \Theta_2(z_{1-\alpha/2}). \quad (3.10)$$

В случае, когда $S(\Theta, \hat{\Theta})$ — строго убывающая функция от Θ , знаки неравенства (3.10) будут противоположного смысла.

Получение неравенства (3.10) путем преобразования (3.9) с выделением δ означает, что задача интервального оценивания завершена, доверительный интервал с границами $\Theta_1(z_{\alpha/2}) = \hat{\Theta} - \delta$; $\Theta_2(z_{1-\alpha/2}) = \hat{\Theta} + \delta$ получен.

В практике решения задач интервального оценивания наибольшее распространение получили значения доверительной вероятности γ , равные 0.9, 0.95, 0.99.

Следует отметить, что выбор статистики $S(\Theta, \hat{\Theta})$ в общем случае неоднозначен. Многолетней практикой решения задач математической статистики выработаны подходы и рекомендации по заданию статистик в конкретных постановках задач, гарантирующие их успешное решение. При изложении этих подходов будем называть их традиционными. Ряд из таких подходов, например, при интервальном оценивании математических ожиданий нормальных случайных величин, использует статистики в форме нормированных случайных величин. Причина, по которой указанные традиционные подходы включают требование нормировки, заключается в том, что квантили $z_{\alpha/2}$ и $z_{1-\alpha/2}$ в выражениях типа (3.9) находились с помощью специальных таблиц, содержащих значения квантилей нормированных распределений. Подобная практика была оправдана в периоды, когда вычислительная техника и математическое программное обеспечение были недостаточно развиты или они вовсе отсутствовали.

В современных условиях, когда математическое программное обеспечение получило широкое распространение и быстро развивается, определение квантилей и других числовых характеристик нормированных распределений осуществляется с такой же простотой, что и квантилей для распределений с про-

извольными параметрами. Поэтому при использовании СКМ для решения задач математической статистики рассматриваемого и других классов применение статистик в виде нормированных случайных величин становится необходимым. Ниже, в тех случаях, которые относятся к отмеченным особенностям использования СКМ в практике решения задач математической статистики, будут отдельно рассматриваться традиционный подход и альтернативный подход на основе СКМ, упрощающий решение задачи, но дающий, естественно, тот же результат. Одна из подобных задач рассматривается в следующем разделе.

3.2. Интервальная оценка математического ожидания нормального распределения с известной дисперсией

Определим доверительный интервал (получим интервальную оценку) для математического ожидания m_x нормально распределенной случайной величины X в предположении, что ее дисперсия σ^2 известна. Согласно описанному выше общему подходу к построению интервальных оценок, по выборке $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ объема n предварительно найдем точечную оценку математического ожидания m_x , для чего используем выражение (2.10) для выборочного среднего:

$$\bar{x}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (3.11)$$

Математическое ожидание выборочного среднего (3.11) и его дисперсия были определены ранее в *разд. 2.2* (см. выражения (2.11), (2.13)) и равны m_x и σ^2/n соответственно. В условиях сделанных предположений распределение выборочного среднего, согласно (2.24), будет нормальным:

$$\bar{x}_B \sim N(m_x, \sigma^2/n). \quad (3.12)$$

3.2.1. Традиционный подход

В качестве одного из вариантов статистики $S(\Theta, \hat{\Theta})$ введем в рассмотрение нормированное выборочное среднее (2.25):

$$z = \frac{(\bar{x}_B - m_x) \cdot \sqrt{n}}{\sigma}, \quad (3.13)$$

которое будет также иметь нормальное распределение (см. *разд. 2.4.1*) с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией:

$$z \sim N(0, 1). \quad (3.14)$$

Нетрудно убедиться в том, что статистика (3.13) обладает всеми требуемыми свойствами (см. *разд. 3.1, п. 1 последовательности этапов решения задачи интервального оценивания*).

Следуя рассмотренным выше этапам, зададим уровень значимости α и определим $z_{\alpha/2}$ и $z_{1-\alpha/2}$ — квантили нормированного нормального распределения (3.13), (3.14), в данном случае связанные очевидным соотношением:

$$z_{1-\alpha/2} = -z_{\alpha/2}; \quad z_{\alpha/2} < 0. \quad (3.15)$$

Доверительная вероятность $\gamma = 1 - \alpha$ для рассматриваемого случая определяется как вероятность нахождения случайной величины z в диапазоне $[z_{\alpha/2}, z_{1-\alpha/2}]$, т. е.

$$P[z_{\alpha/2} < z < z_{1-\alpha/2}] = F_z(z_{1-\alpha/2}) - F_z(z_{\alpha/2}) = \gamma. \quad (3.16)$$

В качестве неравенства (3.9) в нашем случае выступает неравенство, заключенное в квадратные скобки в (3.16): $[z_{\alpha/2} < z < z_{1-\alpha/2}]$. Используем его для определения параметра δ и, тем самым, интервальной оценки математического ожидания.

Статистика (3.13) — строго убывающая функция от $\Theta = m_x$, поэтому с учетом (3.13) и (3.15) это неравенство примет вид: $-z_{1-\alpha/2} < z < z_{1-\alpha/2}$, откуда

$$\bar{x}_B - \frac{\sigma \cdot z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} < m_x < \bar{x}_B + \frac{\sigma \cdot z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}. \quad (3.17)$$

Это соотношение определяет доверительный интервал $[\Theta_1, \Theta_2]$ для оценки m_x с доверительной вероятностью $\gamma = 1 - \alpha$:

$$[\bar{x}_B - \frac{\sigma \cdot z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}, \bar{x}_B + \frac{\sigma \cdot z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}]. \quad (3.18)$$

На основании соотношения (3.15) этот доверительный интервал можно переписать в форме:

$$[\bar{x}_B + \frac{\sigma \cdot z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}, \bar{x}_B - \frac{\sigma \cdot z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}]. \quad (3.19)$$

Анализ точности полученной интервальной оценки m_x показывает, что естественное стремление увеличить доверительную вероятность γ будет приводить к росту значений $\delta = \frac{\sigma \cdot z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}$, т. е. будет сопровождаться снижением

точности оценки.

Сохранение точности интервального оценивания при повышении значений γ может быть достигнуто лишь при одновременном повышении объема выборки n . Зависимость $\delta = f(\gamma, n)$ иллюстрируется ниже (см. рис. 3.3).

3.2.2. Альтернативная процедура оценивания

Применение СКМ позволяет рассмотреть альтернативный подход к решению задачи, рассмотренной в разд. 3.2.1. В качестве статистики $S(\Theta, \hat{\Theta})$ используем выборочное среднее $\bar{x}_B$, которое в рассматриваемом случае имеет

нормальное распределение (3.12) с математическим ожиданием m_x и дисперсией σ^2/n . Анализ выражений (3.17)—(3.19) позволяет сделать вывод о том, что границами доверительного интервала для задачи оценки центра распределения в рассматриваемой постановке служат квантили нормального распределения $N(\bar{x}_B, \sigma^2/n)$ с параметрами: $\bar{x}_B$ — выборочное среднее для заданной выборки объема n и σ^2/n — дисперсия выборочного среднего. Это утверждение непосредственно следует из того факта, что доверительный интервал, имеющий в качестве центральной точки значение $\bar{x}_B$, соответствует диапазону значений случайной величины, находящихся в нем с доверительной вероятностью $\gamma = 1 - \alpha$.

Границами этого интервала с центром $\bar{x}_B$ и вероятностью γ при двустороннем интервале служат квантили порядка $(1 - \alpha / 2)$ и $\alpha / 2$ нормального распределения $N(\bar{x}_B, \sigma^2/n)$. В среде Mathcad квантили (любого порядка) для нормального распределения с произвольными параметрами вычисляет встроенная функция **qnorm**.

Отмеченный факт позволяет резко упростить решение рассматриваемой задачи и выполнить лишь следующие две операции:

1. С применением встроенной функции **mean** вычислить точечную оценку $\bar{x}_B$ математического ожидания, в том числе — и для последующего использования в аргументе функции **qnorm**. Случайная величина $\bar{x}_B$ при этом выступает в качестве варианта задания статистики $S(\Theta, \hat{\Theta})$, альтернативного варианту (3.13), т. е. варианта, не требующего нормировки $\bar{x}_B$.

2. С применением встроенной функции **qnorm** вычислить квантили порядка $(1 - \alpha / 2)$ и $\alpha / 2$ нормального распределения $N(\bar{x}_B, \sigma^2/n)$. Эти значения квантилей и будут искомыми границами доверительного интервала.

Указанное упрощение достигается без потерь в точности решения и возможно при использовании систем компьютерной математики, в которых имеются процедуры вычисления квантилей произвольных распределений.

Рассмотрим несколько примеров, в которых осуществляется определение доверительного интервала для оценки математического ожидания нормально распределенной случайной величины, дисперсия которой известна. При получении результатов будем использовать программную систему Mathcad; традиционный подход (разд. 3.2.1) будем сочетать с альтернативным (разд. 3.2.2), что позволит проиллюстрировать преимущества последнего.

Пример 3.1. Пусть имеется нормально распределенная случайная величина X , дисперсия которой известна и равна 0.25. Осуществляя выборку объемом $n = 100$, построить доверительный интервал (получить интервальную оценку) для математического ожидания m_x случайной величины X при доверительной вероятности $\gamma = 0.95$.

□ Решение. Доверительный интервал определяется выражениями (3.18) или (3.19). Для нахождения его границ и точности интервальной оценки определим квантили (3.15) нормированного нормального распределения, для чего можно воспользоваться таблицами квантилей [4, 5] или вычислить их в среде Mathcad. Для заданного значения $\gamma = 0.95$ уровень значимости (3.4) составляет $\alpha = 0.05$, а квантиль $z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$. При этих данных (рис. 3.2) величина δ (3.6) получается равной

$$\delta = \frac{\sigma \cdot z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} = \frac{0.5 \cdot 1.96}{10} = 0.098.$$

Тогда неравенство (3.17) будет иметь вид: $\bar{x}_B - 0.098 < m_x < \bar{x}_B + 0.098$.

На рис. 3.2 приведены результаты решения (традиционный подход) рассматриваемой задачи в среде Mathcad с краткими комментариями.

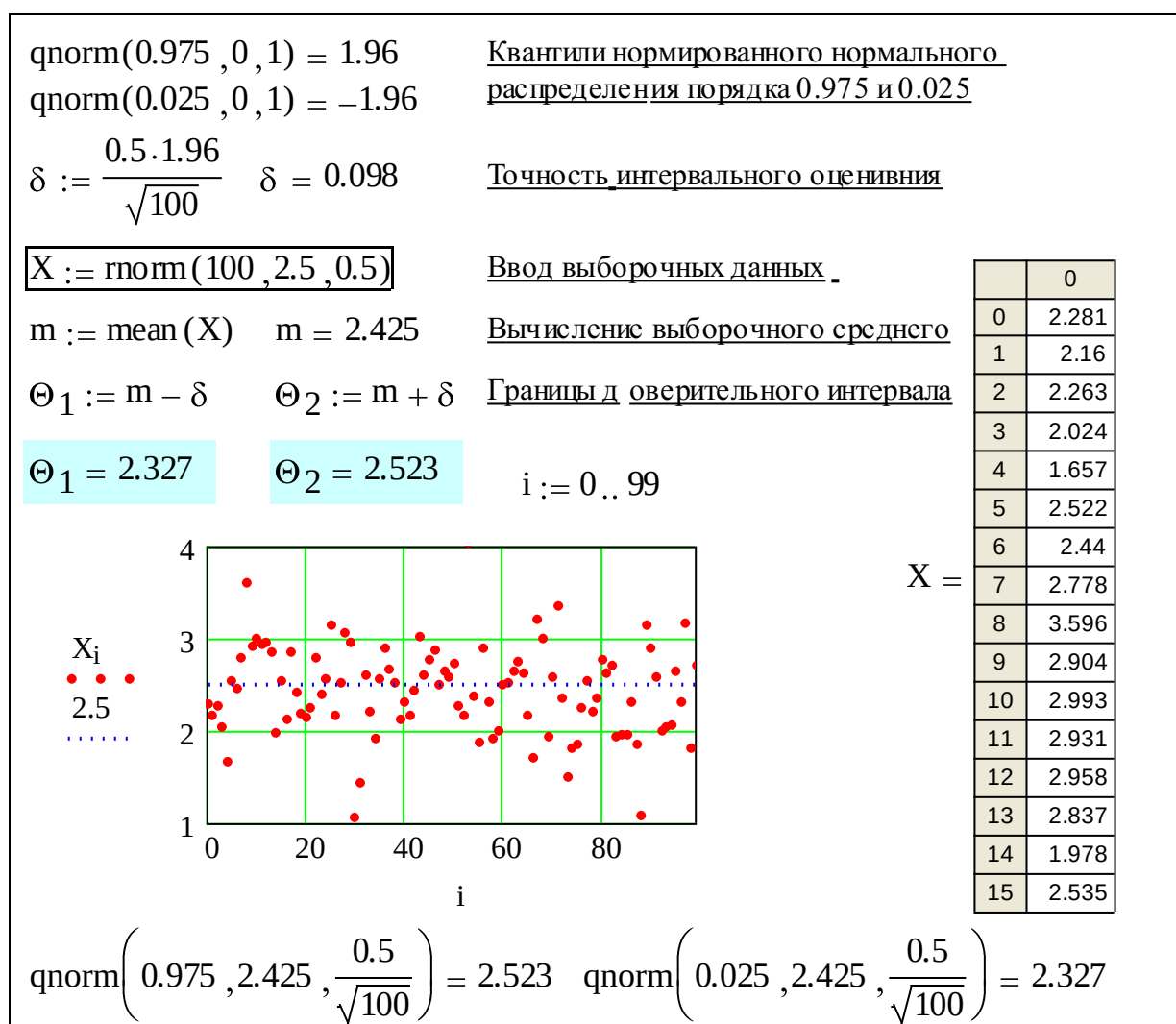


Рис. 3.2. Решение задачи интервального оценивания (пример 3.1)

Выборочное среднее $\bar{x}_B$, обозначенное на рис. 3.2 как m , вычислено встроенной функцией **mean**, реализующей алгоритм (3.11), и равно 2.425. При вы-

числении квантилей (3.15) соответствующих порядков для нормированного нормального распределения использована встроенная функция **qnorm**. Выборка из значений нормально распределенной случайной величины с параметрами $m_x = 2.5$; $\sigma = 0.5$ формируется в виде (100×1) -вектора **X** с помощью встроенной функции **rnorm**. (на рис. 3.2 выведены первые 16 элементов этой выборки). Выборочные данные показаны на графике (см. рис. 3.2). Доверительный интервал для рассматриваемой задачи: [2.327, 2.523].

В последней строке (см. рис. 3.2) приведено решение с применением альтернативного подхода, описанного в разд. 3.2.2. Решение достигается в два этапа — вычисление функцией **mean** выборочного среднего: $\bar{x}_B = 2.425$ (см. рис. 3.2); получение границ доверительного интервала вычислением квантилей распределения $N(\bar{x}_B, \sigma^2/n)$: [2.327, 2.523]. ■

Анализ, который сопровождал выражение (3.19) и касался взаимосвязи параметров δ , γ и n , может быть подкреплён расчетами. На рис. 3.3 приведены результаты анализа (Mathcad) зависимости точности δ от доверительной вероятности γ и объема выборки n для условий, заданных в примере 3.1.

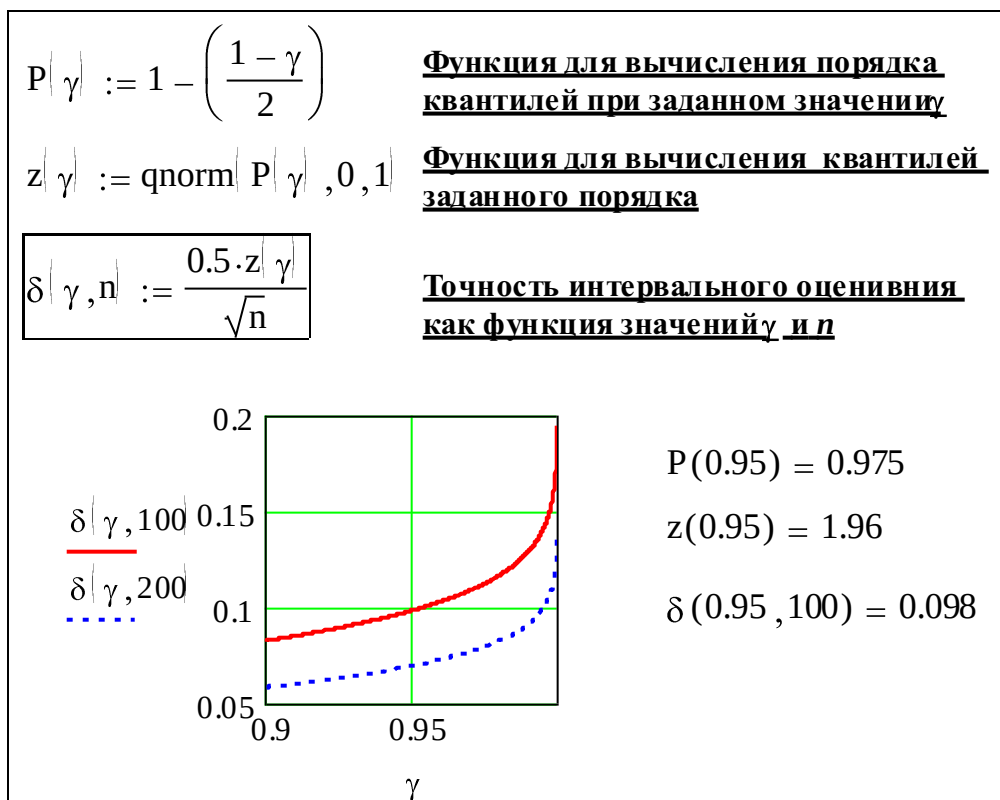


Рис. 3.3. Анализ точности интервального оценивания

Для получения результата предварительно вводятся: функции $P(\gamma)$ для вычисления порядка квантилей и δ для вычисления значений квантилей нормированного распределения в зависимости от γ и объема выборки. Эти функции используются в выражении (см. рис. 3.2) для точности интервального оценивания. На графике рис. 3.3 приведены две кривые, полученные для $\delta(\gamma)$ при объемах выборки $n = 100$ и $n = 200$. Кривые иллюстрируют степень повыше-

ния точности оценивания δ при уменьшении значений γ и увеличении объема выборки. Справа от графика (см. рис. 3.3) приведены данные, которые были получены при решении примера 3.1.

Значения $\delta = f(\gamma, n)$ для объемов выборки $n = 100$ и $n = 200$, при изменении доверительной вероятности γ в диапазоне $(0.9, 0.98)$ с шагом 0.02 приведены ниже (продолжение mcd-файла, представленного на рис. 3.3):

$$i := 0..4 \quad \boxed{\gamma_i := 0.9 + i \cdot 0.02}$$

$$\delta(\gamma, 100)^T = (0.082 \quad 0.088 \quad 0.094 \quad 0.103 \quad 0.116)$$

$$\delta(\gamma, 200)^T = (0.058 \quad 0.062 \quad 0.066 \quad 0.073 \quad 0.082)$$

Пример 3.2. Для исходных данных примера 3.1 найти интервальную оценку математического ожидания m_x , используя функцию Лапласа (см. разд. 3.4 первой части, выражение (3.32)):

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp(-t^2/2) dt.$$

□ Решение. Точечная оценка $\bar{x}_B$ (3.11) математического ожидания и свойства (3.12) служат основой построения интервальной оценки, которая находится из условия

$$P(|\bar{x}_B - m_x| < \delta) = \gamma = 0.95.$$

Из разд. 5.2 первой части (см. выражение (5.25)) следует, что для нормального распределения последнее выражение можно переписать в форме:

$$P(|\bar{x}_B - m_x| < \delta) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\delta \cdot \sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2 \cdot \Phi(d) = 0.95, \quad d = \frac{\delta \cdot \sqrt{n}}{\sigma}.$$

Значение d может быть найдено либо путем непосредственного решения уравнения $\Phi(d) = 0.95/2 = 0.475$, либо (см. рис. 4.8, 4.14, 4.15 и др., глава 4), либо с помощью таблиц функций Лапласа (см. прил. 1). Решение в Mathcad с применением вычислительного блока [17] приведено ниже.

$$d := 0 \quad \text{Given} \quad \int_0^d \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) dt = \frac{0.95}{2} \quad \text{Find}(d) = 1.96$$

Используя таблицы (см. прил. 1), находим $d = 1.96$, что определяет значение $\delta = 1.96 \sigma / \sqrt{n} = 1.96 \cdot 0.5 / 10 = 0.098$, найденное ранее. ■

Пример 3.3. Для исходных данных, принятых в примере 3.1 и полученных в этом примере результатов ($\delta = 0.098$) определить длину выборки, обеспечивающую увеличение точности интервального оценивания вдвое.

□ Решение. Для решения этой задачи воспользуемся обозначением, принятым в предыдущем примере: $\delta = d\sigma / \sqrt{n}$. Из этого соотношения видно, что

точность интервального оценивания $\delta/2$ при прежних параметрах может быть достигнута четырехкратным увеличением длины выборки. Если ранее принятый объем выборки составлял $n = 100$, что позволяло обеспечить точность оценки, равную 0.098, то для достижения точности 0.049 требуется объем выборки $n = 400$. Подобным образом можно определить объемы выборки, необходимые для обеспечения и других значений точности интервального оценивания. ■

Полученные результаты свидетельствуют об удобстве применения Mathcad при решении подобных задач и простоте получения решений при других исходных данных в процессе проведения практических занятий. Этот вывод может быть отнесен ко всем иллюстрациям, полученным в среде Mathcad.

3.2.3. Асимптотическая интервальная оценка математического ожидания

Важное практическое значение имеют задачи оценивания математического ожидания, когда случайная величина X распределена по законам, отличным от нормального. В этих случаях могут быть получены асимптотические оценки, достоверность которых будет повышаться с ростом объема исходных выборок. Действительно, согласно центральной предельной теореме (см. разд. 2.4.5, ч II; разд. 6.5, ч I), распределение выборочного среднего асимптотически нормально (см. выражение (2.39)). Параметры этого распределения совпадают с параметрами (3.12), принятыми при построении интервальной оценки. Поэтому можно утверждать, что нормированная статистика (3.13) будет распределена асимптотически нормально с параметрами, приблизительно равными 0 и 1 (см. выражение (3.14)). Осуществляя последующие этапы построения интервальной оценки, асимптотически надежный доверительный интервал определится выражением

$$P \left[\bar{x}_B - \frac{\sigma \cdot z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} < m_X < \bar{x}_B + \frac{\sigma \cdot z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \right] \approx \gamma.$$

Как и в предыдущем случае, построение интервальной оценки можно осуществить и альтернативным путем.

Пример 3.4. Найти интервальную оценку математического ожидания равномерно распределенной на интервале $[1, 3]$ случайной величины X , используя выборку объема $n = 100$. При решении считать дисперсию X известной.

□ Решение. Выборка заданного объема может быть отнесена к классу больших выборок, поэтому искомая интервальная оценка может быть найдена как асимптотическая с применением процедуры (3.11)—(3.19). Эта процедура может применяться для оценки математического ожидания произвольно распределенной случайной величины, роль которой в данном примере выполняет равномерно распределенная на интервале $[1, 3]$ случайная величина. Теоретические значения математического ожидания и дисперсии заданной равномерно распределенной случайной величины (см. разд. 5.1 первой части) составляют:

$m_x = 2, \sigma^2 = 1/3$. Примем доверительную вероятность $\gamma = 0.95$. Следуя процедуре, описанной выше, имеем:

$$P\left[\bar{x}_B - \frac{\sigma \cdot z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} < m_x < \bar{x}_B + \frac{\sigma \cdot z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right] \approx 0.95.$$

На рис. 3.4 границы доверительного интервала для рассматриваемого примера находятся в среде Mathcad и равны (1.899, 2.125). Исходная выборка из значений равномерно распределенной случайной величины получена с помощью встроенной функции **runif**. Решение сопровождается краткими комментариями, аналогичными пояснениям к рис. 3.2.

qnorm(0.975, 0, 1) = 1.96

qnorm(0.025, 0, 1) = -1.96

$\delta := \frac{0.577 \cdot 1.96}{\sqrt{100}} \quad \delta = 0.113$

X := runif (100, 1, 3)

m := mean (X) m = 2.012

$\Theta_1 := m - \delta \quad \Theta_2 := m + \delta$

$\Theta_1 = 1.899 \quad \Theta_2 = 2.125$

Квантили нормированного нормального распределения порядка 0.975 и 0.025

Точность интервального оценивания

Ввод выборочных данных

Вычисление выборочного среднего

Границы доверительного интервала

i := 0 .. 99

X =

	0
0	1.003
1	1.387
2	2.17
3	1.701
4	2.646
5	1.348
6	2.421
7	1.608
8	1.183
9	1.295
10	2.977
11	1.238
12	1.018
13	2.063
14	2.204
15	1.332

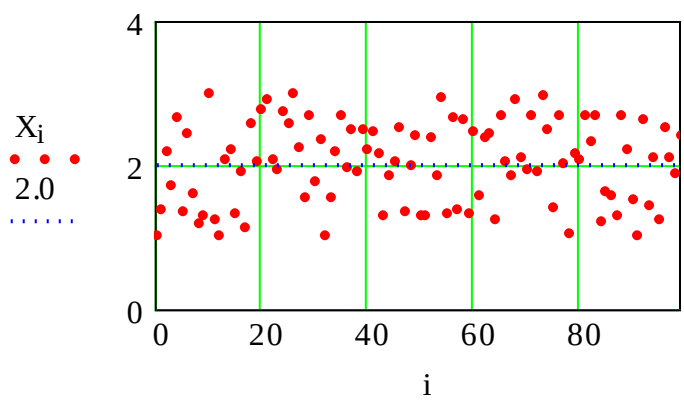


Рис. 3.4. Получение асимптотической интервальной оценки (пример 3.4)

И в этом случае, как и при решении примера 3.1, может быть использована альтернативная процедура (см. разд. 3.2.2). Границами доверительного интервала в рассматриваемом асимптотическом случае служат квантили порядков 0.975 и 0.025 нормального распределения с параметрами: $(\bar{x}_B, \sigma/\sqrt{n})$, где $\bar{x}_B = 2.012$ (см. рис. 3.4), а $\sigma = \sqrt{1/3} = 0.577$ и $n = 100$ по условию.

Значения границ, определенных этим способом, приводятся ниже в форме копии фрагмента mcd-файла:

$$\text{qnorm}\left(0.975, 2.012, \frac{0.577}{\sqrt{100}}\right) = 2.125 \quad \text{qnorm}\left(0.025, 2.012, \frac{0.577}{\sqrt{100}}\right) = 1.899$$

Эти значения, конечно, совпадают с вычисленными ранее (см. рис. 3.4). ■

3.3. Интервальная оценка дисперсии нормального распределения

Рассмотрим выборку $\mathbf{X}$ объема n из значений нормально распределенной случайной величины. Пусть параметры (m_x, σ^2) нормального распределения неизвестны. Необходимо построить интервальную оценку дисперсии.

Используя элементы $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ выборки, определим исправленную выборочную дисперсию s^2 (2.27) и введем в рассмотрение статистику (2.29)

$$\chi^* = \frac{s^2 \cdot (n-1)}{\sigma^2}. \quad (3.20)$$

В разд. 2.4.2 было показано, что случайная величина (3.20) распределена по закону хи-квадрат с $(n-1)$ степенями свободы (см. прил. 9).

Для определения доверительного интервала в рассматриваемой постановке зададимся уровнем значимости $\alpha = 1 - \gamma$ и введем две квантили $\chi_1^2 = \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$ и $\chi_2^2 = \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$ распределения хи-квадрат с $(n-1)$ степенями свободы таким образом, что:

$$\left. \begin{aligned} P_1(\chi^* < \chi_1^2) &= \alpha/2; \\ P_2(\chi^* < \chi_2^2) &= 1 - \alpha/2. \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

В то же время, интервал $[\chi_1^2, \chi_2^2]$ покрывает случайную величину (3.20) с вероятностью, равной доверительной вероятности γ :

$$P(\chi_1^2 < \frac{s^2 \cdot (n-1)}{\sigma^2} < \chi_2^2) = P_2 - P_1 = 1 - \alpha = \gamma. \quad (3.22)$$

Рисунок 3.5 иллюстрирует соотношения (3.21) и (3.22).

Доверительной вероятности (3.22) соответствует следующее соотношение:

$$P\left(\frac{1}{\chi_1^2} > \frac{\sigma^2}{s^2 \cdot (n-1)} > \frac{1}{\chi_2^2}\right) = P\left(\frac{s^2 \cdot (n-1)}{\chi_2^2} < \sigma^2 < \frac{s^2 \cdot (n-1)}{\chi_1^2}\right), \quad (3.23)$$

откуда доверительный интервал для дисперсии σ^2 нормально распределенной случайной величины с доверительной вероятностью $\gamma = 1 - \alpha$ имеет границы:

$$\left[\frac{s^2 \cdot (n-1)}{\chi_2^2}, \frac{s^2 \cdot (n-1)}{\chi_1^2}\right]; \quad \chi_1^2 = \chi_{\alpha/2}^2(n-1); \quad \chi_2^2 = \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1), \quad (3.24)$$

а соответствующий доверительный интервал для σ соответствует:

$$\left[\frac{s \cdot \sqrt{(n-1)}}{\sqrt{\chi_2^2}}; \frac{s \cdot \sqrt{(n-1)}}{\sqrt{\chi_1^2}} \right]. \quad (3.25)$$

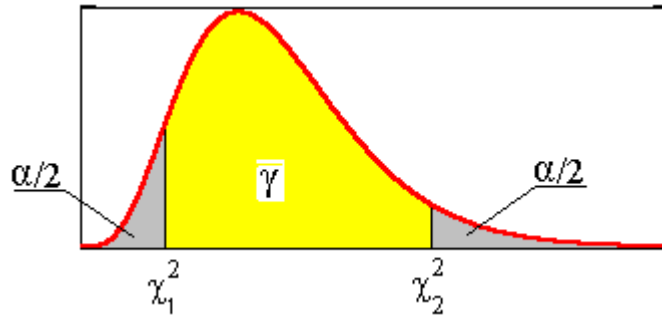


Рис. 3.5. Вероятности областей распределения хи-квадрат

Полученные соотношения могут быть выражены не через исправленную выборочную дисперсию s^2 (2.27), а через выборочную дисперсию $D_B = \sigma_B^2$ (2.15), поскольку между этими характеристиками имеется очевидная связь

$$(n-1)s^2 = n\sigma_B^2. \quad (3.25^*)$$

Пример 3.5. По нормальной выборке из примера 3.1 найдена исправленная выборочная дисперсия (2.22): $s^2 = 0.241$. С доверительной вероятностью $\gamma = 0.95$ построить доверительный интервал для σ .

□ Решение. Решение проведем в среде Mathcad. На рис. 3.6 приведена копия фрагмента mcd-файла с результатами решения примера 3.5. Этот фрагмент — продолжение файла с решением примера 3.1 (см. рис. 3.2).

Исходными данными определено: объем выборки (вектор $\mathbf{X}$ на рис. 3.2) $n = 100$, среднее квадратическое отклонение случайной величины, из значений которой формировалась выборка, $\sigma = 0.5$.

Доверительный интервал для σ определяется выражением (3.25). Для его формирования необходимо вычислить s (корень из исправленной выборочной дисперсии) и квантили $\chi_1^2 = \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$; $\chi_2^2 = \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$ распределения хи-квадрат. Для вычисления значения s применена встроенная функция **Stdev** (см. рис. 3.6), которая выводит корень квадратный из исправленной выборочной дисперсии (2.27). Вычисление квантилей χ_1^2 и χ_2^2 (3.24) распределения хи-квадрат порядков $\alpha/2$ и $(1 - \alpha/2)$ с $(n - 1)$ степенями свободы выполнено с применением встроенных функций **qchisq**($\alpha/2, (n - 1)$), **qchisq**(($1 - \alpha/2$), $(n - 1)$) Mathcad. Квантили χ_1^2 и χ_2^2 (3.24) в файле (см. рис. 3.6) обозначены χ_1 и χ_2 соответственно. В результате вычислений имеем: $s = 0.491$, значения $\chi_1^2 = 73.361$ и $\chi_2^2 = 128.422$. Результирующая интервальная оценка для σ определяется неравенством вида: $0.431 < \sigma < 0.57$. ■

$n := 100$	$\alpha := 1 - 0.95$	Исходные данные
$\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=0}^{99} (X_i - m)^2 = 0.241$		Var(X) = 0.241
$\sqrt{0.241} = 0.491$	$s := \text{Stdev}(X)$	Исправленная выборочная дисперсия и СКО
$\chi_1 := \text{qchisq}\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right)$		$\chi_1 = 73.361$
$\chi_2 := \text{qchisq}\left(1 - \frac{\alpha}{2}, n-1\right)$		$\chi_2 = 128.422$
$\frac{s \cdot \sqrt{n-1}}{\sqrt{\chi_2}} = 0.431$	$\frac{s \cdot \sqrt{n-1}}{\sqrt{\chi_1}} = 0.57$	Границы доверительного интервала для СКО

Рис. 3.6. Решение примера 3.5 в среде Mathcad

3.3.1. Асимптотическая интервальная оценка дисперсии

Аналогично рассмотренной выше (см. разд. 3.2) оценке математического ожидания произвольно распределенной случайной величины X , для интервальной оценки дисперсии (или СКО) случайной величины с произвольным законом распределения при больших выборках могут быть также получены приближенные формулы.

Пусть имеется выборка большого ($n > 50$) объема, которая, как и ранее (см. разд. 2.2), содержит независимые и одинаково распределенные случайные величины. Рассмотрим для такой выборки статистику вида:

$$m_2^* = [s^2 - M(s^2)] / \sqrt{D(s^2)}. \quad (3.26)$$

Здесь: s^2 — исправленная выборочная дисперсия (2.27), математическое ожидание и дисперсия которой обозначены как $M(s^2)$ и $D(s^2)$.

Согласно (2.23), математическое ожидание исправленной выборочной дисперсии равно дисперсии случайной величины: $M(s^2) = \sigma^2$. Для $D(s^2)$ в составе (3.26) может быть записано выражение, аналогичное соотношению (2.36) для выборочного начального момента [4, 5]:

$$D(s^2) = \frac{n}{(n-1)^2} \cdot [\mu_4 - (\mu_2)^2].$$

Здесь μ_4 — центральный момент четвертого порядка; μ_2 — дисперсия случайной величины; n — объем выборки.

Здесь μ_4 — центральный момент четвертого порядка; μ_2 — дисперсия случайной величины; n — объем выборки.

Для случая больших выборок последнее соотношение может быть заменено приближенным равенством вида:

$$D(s^2) \approx \frac{1}{n} \cdot (\mu_4 - \sigma^4) \approx \frac{\sigma^4}{n} \cdot \left(\frac{m_4}{m_2^2} - 1 \right), \quad (3.27)$$

где m_4 , m_2 — выборочный центральный момент (1.9) четвертого порядка и выборочная дисперсия (2.15) соответственно.

В соответствие с материалом *разд. 2.4.5* и в силу центральной предельной теоремы статистика (3.26) имеет асимптотически нормальное распределение с нулевым средним и единичной дисперсией, т. е. при $n \rightarrow \infty$

$$m_2^* \sim N(0, 1). \quad (3.28)$$

Это означает, что асимптотическую интервальную оценку дисперсии можно найти из условия (см. пример 3.2, рассмотренный выше, а также выражение (5.25) *разд. 5.2 первой части*):

$$P(|s^2 - \sigma^2| < \delta) = \gamma = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\delta}{\sqrt{D(s^2)}}\right) = 2 \cdot \Phi(d_s), \quad (3.29)$$

где $\Phi(*)$ — функция Лапласа (см. выражение (3.32), ч. I).

Здесь $d_s = \delta / \sqrt{D(s^2)}$, причем $D(s^2)$ определяется соотношением (3.27).

Из (3.29) следует, что для d_s справедливо соотношение $\Phi(d_s) = \gamma / 2$. т. е. значение d_s — квантиль $z_{1-\alpha/2}$ нормированного нормального распределения (3.28) порядка $1 - \alpha/2$, где $\alpha = 1 - \gamma$. Это соответствие можно проследить на графике (см. рис. 3.1). Действительно, поскольку для функции Лапласа рассматривается правая половина графика плотности нормированного нормального распределения, то площади под кривой этой плотности, значение которой равно $\gamma/2$, соответствует площадь в диапазоне значений абсцисс от 0 (центр нормированного распределения) до $z_{1-\alpha/2}$. Поэтому $d_s = \delta / \sqrt{D(s^2)} = z_{1-\alpha/2}$, откуда

$$\delta = z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{D(s^2)} = z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{m_4}{m_2^2} - 1} = \sigma^2 \cdot w. \quad (3.30)$$

В соотношении (3.30) введено обозначение w для множителя при σ^2 . С учетом этого обозначения запишем двустороннее неравенство, соответствующее условию (3.29): $-\sigma^2 w < s^2 - \sigma^2 < \sigma^2 w$. Последовательным преобразованием этого неравенства получаем окончательное соотношение для искомой дисперсии:

$$-\sigma^2 w < s^2 - \sigma^2 < \sigma^2 w; \quad \sigma^2(1-w) < s^2 < \sigma^2(1+w);$$

$$\frac{1}{\sigma^2(1-w)} > \frac{1}{s^2} > \frac{1}{\sigma^2(1+w)}; \quad \frac{s^2}{1+w} < \sigma^2 < \frac{s^2}{1-w}.$$

Таким образом, доверительный интервал для дисперсии в рассматриваемом случае имеет границы:

$$\left[\frac{s^2}{1+w}; \frac{s^2}{1-w} \right]; \quad w = \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{m_4}{m_2^2} - 1}. \quad (3.31)$$

Пример 3.6. Найти интервальную оценку среднего квадратического отклонения (СКО) равномерно распределенной на интервале $[1, 3]$ случайной величины X , используя выборку объема $n = 100$.

□ Решение. Решение данного примера в среде Mathcad приводится на рис. 3.7. Краткие комментарии поясняют последовательность решения.

$n := 100$	$\alpha := 1 - 0.95$	
$\beta := 1 - \frac{\alpha}{2}$	$\beta = 0.975$	<u>Исходные данные</u>
$z := \text{qnorm}(\beta, 0, 1)$	$z = 1.96$	<u>Квантиль нормированного нормального распределения порядка 0.975</u>
$X := \text{runif}(n, 1, 3)$		<u>Задание исходной выборки</u>
$m := \text{mean}(X)$	$m = 2.007$	<u>Выборочное среднее и</u>
$s := \text{Stdev}(X)$	$s = 0.578$	<u>исправленное выборочное СКО</u>
$m_2 := \text{var}(X)$	$m_2 = 0.331$	
$m(k) := \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{99} X_i - m ^k$	$m(2) = 0.331$	<u>Вычисление выборочных</u>
	$m(4) = 0.198$	<u>центральных моментов</u>
		<u>второго и четвертого порядков</u>
$w := \frac{z}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{m(4)}{m(2)^2} - 1}$	$w = 0.176$	<u>Вычисление параметра w.</u>
		<u>формулы (3.30)</u>
$\frac{s}{\sqrt{1+w}} = 0.533$	$\frac{s}{\sqrt{1-w}} = 0.637$	<u>Границы доверительного</u>
		<u>интервала для СКО</u>

Рис. 3.7. Решение примера 3.6 в среде Mathcad

Роль произвольной случайной величины в данном примере выполняет равномерно распределенная на интервале $[1, 3]$ случайная величина. Как и ранее, выборка заданного объема может быть отнесена к классу больших выборок. Поэтому искомая интервальная оценка может быть найдена как асимптотическая.

Теоретические значения математического ожидания и дисперсии заданной равномерно распределенной случайной величины (см. разд. 5.1 первой части) составляют: $m_x = 2$, $\sigma^2 = 1/3$. Принимая доверительную вероятность $\gamma = 0.95$, границы доверительного интервала для оценки СКО определим как корни квадратные из границ (3.31).

При решении в среде Mathcad для формирования выборочных данных используется встроенная функция **runif**, которая предназначена для генерации совокупности равномерно распределенных независимых случайных чисел. Для вычисления необходимых элементов (квантили, исправленного выборочного СКО и выборочного среднего) выражений (3.31) используются встроенные функции, которые применялись ранее (см. примеры 3.4, 3.5). Вычисления выборочных центральных моментов второго и четвертого порядков, входящих в состав выражения для w (3.31), выполнены с применением предварительно составленной функции пользователя, которая в данном случае имеет форму выборочного центрального момента k -го порядка. В результате для заданных условий получаем, что значение σ (равное в данном случае $\sqrt{1/3} = 0.577$) при вероятности $\gamma = 0.95$ удовлетворяет неравенству $0.533 < \sigma < 0.637$. Таким образом, доверительный интервал имеет границы $[0.533, 0.637]$. ■

Отметим здесь, что приведенная копия файла Mathcad (см. рис. 3.7) позволяет получить результаты и для многих других вариантов подобных задач. Для этого в соответствующем файле достаточно изменить некоторые исходные данные или вид исходного распределения. Так, для значений доверительных вероятностей $\gamma = 0.9$ и $\gamma = 0.98$ по программе (см. рис. 3.7) получаем границы доверительных интервалов $[0.54; 0.627]$, $[0.526; 0.65]$ соответственно, что достигается простой заменой $\gamma = 0.95$ в исходных данных на значения $\gamma = 0.9$ и $\gamma = 0.98$.

3.4. Интервальное оценивание математического ожидания нормального распределения при неизвестной σ^2

Пусть теперь выборка X объема n получена из значений нормально распределенной случайной величины с неизвестными параметрами m , σ^2 . Найдем в этих условиях интервальную оценку математического ожидания, используя в качестве его точечной оценки выборочное среднее $\bar{x}_B$ (3.11) и заменяя неизвестную дисперсию исправленной выборочной дисперсией s^2 (2.27). Введем в рассмотрение статистику

$$t^* = \frac{(\bar{x}_B - m) \cdot \sqrt{n}}{s}, \quad (3.32)$$

которая, согласно пояснениям, данным в разд. 2.4.3 по поводу величины $\bar{x}_B^{**}$ (2.30), распределена по закону Стьюдента с $(n - 1)$ степенями свободы. Основные свойства t -распределения описаны в прил. 10.

Следует отметить, что в качестве статистики (3.32) с аналогичными свойствами может быть рассмотрена величина $[(\bar{x}_B - m) \cdot \sqrt{n-1}] / \sigma_B$, в чем легко убедиться, учитывая соотношение (3.25*).

Зададим доверительную вероятность $\gamma = 1 - \alpha$, где α — уровень значимости, и определим две квантили t -распределения с $(n - 1)$ степенями свободы: $t_1 = t_{\alpha/2}(n-1)$ и $t_2 = t_{1-\alpha/2}(n-1)$ так, что

$$P(t^* < t_1) = P(t^* > t_2) = \alpha/2. \quad (3.33)$$

Тогда доверительная вероятность определится как

$$P(t_1 < t^* < t_2) = \gamma. \quad (3.34)$$

Перепишем неравенство $(t_1 < t^* < t_2)$, подставив вместо t выражение (3.32):

$$t_1 < \frac{(\bar{x}_B - m) \cdot \sqrt{n}}{s} < t_2. \quad (3.35)$$

Распределение Стьюдента симметрично, поэтому $t_1 = -t_2$, что дает интервальную оценку математического ожидания в виде:

$$\bar{x}_B - \frac{s \cdot t_{1-\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n}} < m < \bar{x}_B + \frac{s \cdot t_{1-\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n}}. \quad (3.36)$$

Здесь $t_{1-\alpha/2}(n-1)$ — квантиль t -распределения с $(n - 1)$ степенями свободы. Таким образом, доверительный интервал для рассматриваемого случая имеет границы

$$\left[\bar{x}_B - \frac{s \cdot t_{1-\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n}}; \bar{x}_B + \frac{s \cdot t_{1-\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n}} \right]. \quad (3.37)$$

Пример 3.7. Используя выборку объема $n = 50$ из значений нормально распределенной случайной величины с параметрами m , σ^2 , найти интервальную оценку m и σ .

□ Решение. В данном случае оценки должны быть найдены в условиях, когда параметры распределения случайной величины неизвестны. Для решения задачи следует воспользоваться методиками, описанными в *разд. 3.4* (оценка математического ожидания) и *разд. 3.3* (оценка СКО; см. пример 3.5, рис. 3.6). Вариант решения этой задачи в среде Mathcad для доверительной вероятности $\gamma = 0.9$ представлен на рис. 3.8.

При моделировании выборки предполагалось, что истинные (неизвестные в данной задаче) параметры случайной величины равны: $m = 2$, $\sigma^2 = 0.49$. Эти данные использованы при формировании выборки заданного объема с применением встроенной функции **rnorm**. Решение производилось с использованием принятого ранее (см. рис. 3.5—3.7) набора встроенных функций Mathcad. Квантиль t -распределения найден с помощью встроенной функции **qt**. Границы доверительных интервалов вычисляются по выражениям (3.37) и (3.25).

Рассмотренный вариант может служить основой решений подобных задач с множеством других исходных данных. ■

$n := 50$ $\gamma := 0.9$ $\alpha := 1 - \gamma$

$\beta := 1 - \frac{\alpha}{2}$

$z := qt(\beta, n - 1)$

$X := \text{rnorm}(n, 2, 0.7)$

$m := \text{mean}(X)$
 $s := \text{Stdev}(X)$

$\delta := \frac{z \cdot s}{\sqrt{n - 1}}$

$\theta_1 := m - \delta$
 $\theta_1 = 1.82$

$\theta_2 = 2.123$

$\chi_1 := \text{qchisq}\left(\frac{\alpha}{2}, n - 1\right)$
 $\chi_2 := \text{qchisq}\left(1 - \frac{\alpha}{2}, n - 1\right)$

$\frac{s \cdot \sqrt{n - 1}}{\sqrt{\chi_2}} = 0.544$

$\frac{s \cdot \sqrt{n - 1}}{\sqrt{\chi_1}} = 0.76$

Исходные данные

Квантиль t -распределения порядка $(1 - \alpha/2)$

Задание исходной выборки

Выборочное среднее и исправленное выборочное СКО

Вычисление параметра точности (3.6) интервальной оценки

Границы доверительного интервала для математического ожидания при заданной доверительной вероятности

Вычисление квантилей распределения хи-квадрат с $(n - 1)$ степенями свободы

Границы доверительного интервала для СКО

$z = 1.677$

$m = 1.972$
 $s = 0.633$

$\delta = 0.152$

$\chi_1 = 33.93$
 $\chi_2 = 66.339$

Рис. 3.8. Решение примера 3.7 в среде Mathcad

В табл. 3.1 приведены результаты решения рассмотренной задачи (пример 3.7) для значений доверительной вероятности $\gamma = 0.9, 0.95, 0.98$ при том же объеме выборки. Анализируя данные табл. 3.1, можно наблюдать отмеченную ранее тенденцию к расширению границ доверительных интервалов при увеличении значений γ .

Таблица 3.1

Границы доверительных интервалов		Значения доверительной вероятности γ		
		0.9	0.95	0.98
m	Θ_1	1.821	1.792	1.756
	Θ_2	2.122	2.151	2.187
σ	Θ_1	0.544	0.529	0.512
	Θ_2	0.76	0.789	0.823

3.5. Интервальное оценивание отношения дисперсий двух нормальных распределений

При сопоставительном анализе параметров распределений независимых случайных величин, при проверке статистических гипотез о равенстве двух дисперсий случайных величин возникает необходимость использования статистик в виде отношений дисперсий.

Рассмотрим две независимые выборки: X с элементами $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и Y с элементами $(y_1, y_2, \dots, y_m)$. Предположим, что соответствующие случайные величины имеют нормальное распределение, причем

$$X_i \sim N(m_x, \sigma_x^2); Y_j \sim N(m_y, \sigma_y^2); \quad i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}.$$

С использованием выражений (2.27) для выборок найдем исправленные выборочные дисперсии s_x^2, s_y^2 и сформируем статистику вида (2.32):

$$F^* = \frac{s_x^2}{\sigma_x^2} : \frac{s_y^2}{\sigma_y^2}. \quad (3.38)$$

В разд. 2.4.2, 2.4.4 было показано, что случайная величина F^* (3.38) имеет распределение Фишера (F -распределения) с $(n-1)$ и $(m-1)$ степенями свободы. Таким образом:

$$F^* \sim F_{n-1, m-1}. \quad (3.39)$$

Основные характеристики распределения Фишера описаны в прил. 11.

Определим доверительный интервал для отношения двух дисперсий с уровнем значимости $\alpha = 1 - \gamma$, где γ — доверительная вероятность. Введем обозначения для квантилей порядка $\alpha/2$ и $1 - \alpha/2$ F -распределения с $(n-1)$ и $(m-1)$ степенями свободы: $F_{\alpha/2}(n-1, m-1) = F_{\alpha/2}$; $F_{1-\alpha/2}(n-1, m-1) = F_{1-\alpha/2}$, причем

$$P(F^* < F_{\alpha/2}) = P(F^* > F_{1-\alpha/2}) = \alpha/2. \quad (3.40)$$

Тогда вероятность того, что случайная величина F^* (3.38) находится в интервале $(F_{\alpha/2}, F_{1-\alpha/2})$, равна доверительной вероятности:

$$P(F_{\alpha/2} < F^* < F_{1-\alpha/2}) = \gamma. \quad (3.41)$$

Преобразуем неравенство в выражении (3.41), учитывая (3.38):

$$F_{\alpha/2} < \frac{s_x^2}{s_y^2} \cdot \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} < F_{1-\alpha/2}; \quad \frac{s_x^2}{s_y^2} \cdot \frac{1}{F_{1-\alpha/2}} < \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} < \frac{s_x^2}{s_y^2} \cdot \frac{1}{F_{\alpha/2}},$$

откуда получаем доверительный интервал с границами

$$\left[\frac{s_x^2}{s_y^2} \cdot \frac{1}{F_{1-\alpha/2}}; \frac{s_x^2}{s_y^2} \cdot \frac{1}{F_{\alpha/2}} \right]. \quad (3.42)$$

Квантили $F_{\alpha/2}(n-1, m-1)$ и $F_{1-\alpha/2}(n-1, m-1)$ распределения Фишера связаны следующими соотношениями (см. прил. 11):

$$\begin{aligned} 1/F_{1-\alpha/2}(n-1, m-1) &= F_{\alpha/2}(m-1, n-1); \\ 1/F_{\alpha/2}(n-1, m-1) &= F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1), \end{aligned} \quad (3.43)$$

поэтому выражения для границ доверительного интервала (3.42) можно переписать в виде:

$$\left[\frac{s_x^2}{s_y^2} \cdot F_{\alpha/2}(m-1, n-1); \frac{s_x^2}{s_y^2} \cdot F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1) \right]. \quad (3.44)$$

Пример 3.8. Даны две независимые выборки $\mathbf{X}$ с элементами $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\mathbf{Y}$ с элементами $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ из значений нормально распределенных случайных величин X и Y с параметрами (m_x, σ_x^2) , (m_y, σ_y^2) . Известно: $n = 50$, $m = 36$, $m_x = 2$, $\sigma_x^2 = 1.44$, $m_y = -1.2$, $\sigma_y^2 = 0.64$. Для доверительных вероятностей $\gamma = 0.9, 0.95, 0.98$ построить интервальную оценку отношения дисперсий.

□ Решение. Задание значений параметров распределения случайных величин предполагает использование системы компьютерной математики для формирования выборочных данных. Решение поставленной задачи в среде Mathcad для $\gamma = 0.9$ приведено на рис. 3.9 в виде копии соответствующего mcd-файла.

Таблица 3.2 содержит результаты вычислений по представленной программе для заданных значений γ .

Таблица 3.2

Границы доверительных интервалов	Значения доверительной вероятности γ		
	0.9	0.95	0.98
Θ_1	1.278	1.151	1.017
Θ_2	3.622	3.995	4.478

Требуемые по условию задачи массивы $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ выборочных данных формируются (см. рис. 3.9) с применением встроенных функций **rnorm**, аргументами которых служат объем выборки, математическое ожидание и СКО нормально распределенной случайной величины. Для вычисления исправленных выборочных дисперсий при решении использованы встроенные функции **Var**; для проверки результатов этих вычислений применяется формула (2.27). Квантили распределения Фишера вычислены с применением встроенной функции **qF**, аргументами которой служат порядок квантили и числа степеней свободы. Границы доверительного интервала определяются по формуле (3.42).

В нижней части рис. 3.9 осуществляется проверка соотношений (3.43) для квантилей распределения Фишера. ■

$$\begin{aligned}
n &:= 50 & m &:= 36 & \gamma &:= 0.9 & \alpha &:= 1 - \gamma & b &:= 1 - \frac{\alpha}{2} & a &:= \frac{\alpha}{2} \\
X &:= \text{rnorm}(n, 2, 1.2) & Y &:= \text{rnorm}(m, -1.2, 0.8) \\
S_x &:= \text{Var}(X) & S_y &:= \text{Var}(Y) & \textbf{Выборочные дисперсии} \\
S_x &= 1.367 & S_y &= 0.627 \\
m_1 &:= \text{mean}(X) & m_1 &= 2.131 & i &:= 0..n-1 \\
\frac{1}{n-1} \cdot \sum_i |X_i - m_1|^2 &= 1.367 & \textbf{Проверка выборочной} \\
& & \textbf{дисперсии по формуле (2.27)} \\
& & a &= 0.05 & b &= 0.95 \\
F_a &:= \text{qF}(a, n-1, m-1) & F_a &= 0.602 & \textbf{Квантили } F\text{-распределения} \\
F_b &:= \text{qF}(b, n-1, m-1) & F_b &= 1.706 & \textbf{порядка 0.05 и 0.95} \\
\Theta_1 &:= \frac{S_x}{S_y} \cdot \frac{1}{F_b} & \Theta_1 &= 1.278 & \textbf{Границы доверительного} \\
& & & & \textbf{интервала для отношения} \\
\Theta_2 &:= \frac{S_x}{S_y} \cdot \frac{1}{F_a} & \Theta_2 &= 3.622 & \textbf{дисперсий (истинное значение} \\
& & & & \textbf{равно 2.25)} \\
\frac{1}{F_b} &= 0.586 & \text{qF}(a, m-1, n-1) &= 0.586 & \textbf{Проверка соотношений} \\
& & & & \textbf{(3.43) для квантилей} \\
\frac{1}{F_a} &= 1.662 & \text{qF}(b, m-1, n-1) &= 1.662
\end{aligned}$$

Рис. 3.9. Решение примера 3.8 в среде Mathcad

3.6. Интервальное оценивание разности математических ожиданий двух нормальных распределений

При сопоставлении параметров распределений независимых случайных величин, сравнении центров распределений возникает необходимость построения доверительного интервала для разности двух математических ожиданий.

Как и в предыдущем разделе, рассмотрим две независимые выборки: $\mathbf{X}$ с элементами $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\mathbf{Y}$ с элементами $(y_1, y_2, \dots, y_m)$. Предположим, что соответствующие случайные величины имеют нормальное распределение, причем

$$X_i \sim N(m_x, \sigma_x^2); \quad Y_j \sim N(m_y, \sigma_y^2); \quad i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}.$$

а) Предположим вначале, что σ_x и σ_y — известны.

В *разд. 2.4.1* отмечалось, что в рассматриваемых условиях выборочные средние $\bar{x}_B$ и $\bar{y}_B$ имеют нормальное распределение с параметрами (2.24):

$$\bar{x}_B \sim N(m_x, \sigma_x^2 / n); \bar{y}_B \sim N(m_y, \sigma_y^2 / m). \quad (3.45)$$

В силу несмещенности выборочных средних как оценок математического ожидания

$$\bar{x}_B - m_x \sim N(0, \sigma_x^2 / n); \bar{y}_B - m_y \sim N(0, \sigma_y^2 / m). \quad (3.46)$$

Учитывая независимость рассматриваемых выборок, дисперсия разности их выборочных средних равна сумме дисперсий $\bar{x}_B$ и $\bar{y}_B$:

$$D(\bar{x}_B - \bar{y}_B) = D^* = \frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}. \quad (3.47)$$

Введем в рассмотрение статистику, образованную разностями

$$z = [(\bar{x}_B - \bar{y}_B) - (m_x - m_y)] / \sigma^*; \sigma^* = \sqrt{D^*}. \quad (3.48)$$

Нормированная разность z (3.48) выборочных средних имеет нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию, а, в силу линейности преобразования — нормальное распределение, т. е. $z \sim N(0, 1)$.

В соответствии с ранее описанным подходом (см., например, *разд. 3.2*), построим доверительный интервал для разности $(m_x - m_y)$ с уровнем значимости $\alpha = 1 - \gamma$, где γ — доверительная вероятность, используя в качестве точечной оценки разность выборочных средних $(\bar{x}_B - \bar{y}_B)$.

Определим квантили нормированного нормального распределения $z_{\alpha/2}$ и $z_{1-\alpha/2}$ так, что

$$P[z_{\alpha/2} < z < z_{1-\alpha/2}] = \gamma; P[z < z_{\alpha/2}] = P[z > z_{1-\alpha/2}] = \alpha/2. \quad (3.49)$$

Осуществляя преобразование неравенства $[z_{\alpha/2} < z < z_{1-\alpha/2}]$, получаем:

$$z_{\alpha/2} < [(\bar{x}_B - \bar{y}_B) - (m_x - m_y)] / \sigma^* < z_{1-\alpha/2}; z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}; \\ \{(\bar{x}_B - \bar{y}_B) - \sigma^* z_{1-\alpha/2}\} < (m_x - m_y) < \{(\bar{x}_B - \bar{y}_B) + \sigma^* z_{1-\alpha/2}\},$$

откуда получаем доверительный интервал с границами

$$[(\bar{x}_B - \bar{y}_B) - \sigma^* z_{1-\alpha/2}; (\bar{x}_B - \bar{y}_B) + \sigma^* z_{1-\alpha/2}]; \sigma^* = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}. \quad (3.50)$$

б) Предположим теперь, что σ_x и σ_y — неизвестны.

Построим доверительный интервал для разности математических ожиданий случайных величин в этих условиях, используя подход, аналогичный рассмотренному в *разд. 3.4*. В качестве статистики в этом случае рассмотрим случайную величину

$$T^* = \frac{z \sqrt{n+m-2}}{\sqrt{g}}, \quad (3.51)$$

где z определяется выражением (3.48), а случайная величина g образована суммой двух независимых случайных величин вида (2.29), распределенных по закону хи-квадрат с $(n - 1)$ и $(m - 1)$ степенями свободы соответственно:

$$g = \chi_1^2 + \chi_2^2 = \frac{s_x^2 \cdot (n - 1)}{\sigma_x^2} + \frac{s_y^2 \cdot (m - 1)}{\sigma_y^2}. \quad (3.52)$$

В выражении (3.52) s_x^2, s_y^2 — исправленные выборочные дисперсии (2.27).

Ранее было показано, что z — нормированная нормально распределенная случайная величина, т. е. $z \sim N(0, 1)$. Величина g , как композиция двух независимых случайных величин, распределенных по закону хи-квадрат, имеет такое же распределение с числом степеней свободы, равным сумме чисел степеней свободы слагаемых (см. прил. 9), т. е. число степеней свободы g равно $(n + m - 2)$. Это означает (см. прил. 10 и разд. 2.4.3), что случайная величина (3.51) распределена по закону Стьюдента с $(n + m - 2)$ степенями свободы. Выявленные свойства статистики T^* (3.51) позволяют построить доверительный интервал для разности математических ожиданий $(m_x - m_y)$.

Введем упрощающее предположение о равенстве дисперсий случайных величин $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$. При этом величина (3.51) с учетом (3.47), (3.48) и (3.52) приобретает вид:

$$T^* = [(\bar{x}_B - \bar{y}_B) - (m_x - m_y)] \cdot R; \quad R = \frac{\sqrt{nm(n+m-2)}}{\sqrt{n+m} \cdot \sqrt{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}}. \quad (3.53)$$

Зададим доверительную вероятность $\gamma = 1 - \alpha$, где α — уровень значимости, и определим две квантили t -распределения с $(n + m - 2)$ степенями свободы: $t_{\alpha/2} = t_{\alpha/2}(n+m-2)$ и $t_{1-\alpha/2} = t_{1-\alpha/2}(n+m-2)$ так, что

$$P(T^* < t_{\alpha/2}) = P(T^* > t_{1-\alpha/2}) = \alpha/2; \quad P[-t_{1-\alpha/2} < T^* < t_{1-\alpha/2}] = \gamma. \quad (3.54)$$

В выражении (3.54) учтена симметричность распределения Стьюдента: $t_{\alpha/2} = -t_{1-\alpha/2}$.

Перепишем неравенство $[-t_{1-\alpha/2} < T^* < t_{1-\alpha/2}]$, подставив вместо T^* выражение (3.53): $-t_{1-\alpha/2} < [(\bar{x}_B - \bar{y}_B) - (m_x - m_y)] \cdot R < t_{1-\alpha/2}$.

После преобразования этого неравенства имеем:

$$(\bar{x}_B - \bar{y}_B) - (t_{1-\alpha/2})/R < (m_x - m_y) < (\bar{x}_B - \bar{y}_B) + (t_{1-\alpha/2})/R,$$

откуда получаем доверительный интервал с границами:

$$[(\bar{x}_B - \bar{y}_B) - \frac{t_{1-\alpha/2}}{R}; (\bar{x}_B - \bar{y}_B) + \frac{t_{1-\alpha/2}}{R}]. \quad (3.55)$$

Пример 3.9. Даны две выборки X и Y объемов n и m из значений нормально распределенных случайных величин, с параметрами $N(m_x, \sigma^2)$ и $N(m_y, \sigma^2)$ соответственно. Построить доверительный интервал для разности математиче-

ских ожиданий при уровне значимости $\alpha = 0.1$, считая параметры распределений неизвестными. При решении исходить из следующих данных: $n = 50$, $m = 25$, $m_x = 2.5$, $m_y = 1.2$, $\sigma = 0.5$.

□ Решение. На рис. 3.10 приведено решение этой задачи в среде Mathcad.

Формирование требуемых выборок проводится с помощью встроенных функций **rnorm**. После получения выборочных данных процедура решения поставленной задачи опирается на выражения (3.47)—(3.55).

В процессе решения применены встроенные функции **mean**, **Var**, **qt** для вычисления выборочного среднего, исправленной выборочной дисперсии для каждой из реализаций, а также — квантили t -распределения с 73 степенями свободы порядка 0.95. Найденное значение этой квантили $t_{1-\alpha/2} = 1.666$, обозначенное в mcd-файле (см. рис. 3.10) t_2 , проверяется с помощью встроенной функции **pt**, вычисляющей функцию распределения Стьюдента.

В результате, с применением формулы (3.55) для разности математических ожиданий ($m_x - m_y$) получен доверительный интервал, границы которого составляют $[1.054; 1.449]$. Истинное значение разности в этой задаче составляло 1.3. ■

$$\begin{aligned}
 &\gamma := 0.9 \quad \alpha := 1 - \gamma \quad b := 1 - \frac{\alpha}{2} \quad a := \frac{\alpha}{2} \quad b = 0.95 \\
 &n := 50 \quad m := 25 \quad d := (n + m - 2) \quad d = 73 \\
 &\boxed{X := \text{rnorm}(n, 2.5, 0.5)} \quad \boxed{Y := \text{rnorm}(m, 1.2, 0.5)} \\
 &x_B := \text{mean}(X) \quad y_B := \text{mean}(Y) \quad \text{Вычисление выборочных средних и} \\
 &S_x := \text{Var}(X) \quad S_y := \text{Var}(Y) \quad \text{исправленных выборочных дисперсий} \\
 &x_B = 2.48 \quad S_x = 0.204 \quad y_B = 1.138 \quad S_y = 0.329 \\
 &R := \frac{\sqrt{n \cdot m \cdot d}}{\sqrt{n + m} \cdot \sqrt{(n - 1) \cdot S_x + (m - 1) \cdot S_y}} \quad R = 8.241 \\
 &t_2 := \text{qt}(b, d) \quad t_2 = 1.666 \quad \text{Квантиль } t\text{-распределения} \\
 &\text{pt}(1.666, d) = 0.95 \quad \text{порядка 0.95 с } d \text{ степенями} \\
 &\quad \text{свободы} \\
 &\boxed{\delta := \frac{t_2}{R}} \quad \delta = 0.202 \quad \text{Вычисление параметра точности (3.6)} \\
 &\quad \text{интервальной оценки} \\
 &\Delta m := x_B - y_B \quad \theta_1 := \Delta m - \delta \quad \theta_2 := \Delta m + \delta \\
 &\theta_1 = 1.14 \quad \text{Границы доверительного интервала для} \\
 &\theta_2 = 1.544 \quad \text{разности математических ожиданий при} \\
 &\quad \text{заданной доверительной вероятности}
 \end{aligned}$$

Рис. 3.10. Решение примера 3.9 в среде Mathcad

Глава 4. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Проверка статистических гипотез составляет сущность обширного класса практических задач математической статистики. Эти задачи позволяют осуществить глубокий анализ данных, полученных в результате наблюдений, в определенной степени интегрируют материал предварительного анализа, формирования и сортировки статистических данных, выявления вероятностных свойств и получения оценок, представленный в предыдущих разделах второй части.

В процессе решения задач прикладной статистики исследователь выдвигает различные предположения (гипотезы), справедливость которых нуждается в подтверждении по результатам экспериментов и преобразования накопленных данных $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. После получения выборочных данных возникает вопрос, согласуется ли выдвинутая гипотеза с данными испытаний. Учитывая случайную природу множества факторов, влияющих на статистические данные, в результате анализа выборочных данных не может быть принято строго определенное решение о приемлемости (или отклонении) выдвинутой гипотезы. Принятие решения в задачах такого рода всегда сопровождается ненулевой (обычно весьма малой) вероятностью ошибок (например, отклонения выдвинутой гипотезы в ситуации, когда она истинна). Поэтому результат при проверке статистических гипотез обычно формулируется, например, следующим образом: имеются достаточные основания для принятия (или отклонения) выдвинутой гипотезы.

Примерами гипотез при решении задач математической статистики могут служить предположения о законе распределения и параметрах случайной величины, о независимости измеренных данных, о равенстве числовых характеристик распределений двух и более случайных величин, об однородности выборок и проч.

Проверка статистической гипотезы проводится в условиях априорной неопределенности. Поэтому **статистической гипотезой** можно назвать любое предположение о виде распределения и свойствах случайной величины, которое можно подтвердить или опровергнуть путем применения методов статистики к выборочным данным.

4.1. Виды гипотез. Критерии значимости

При проверке статистических гипотез обычно выдвигается одна основная (**нулевая**) гипотеза H_0 . Остальные гипотезы H_r ($r = 1, 2, \dots$), противоречащие H_0 , носят название конкурирующих (**альтернативных**). Часто в качестве альтернативной выступает одна гипотеза H_1 .

Выдвинутая гипотеза называется **простой**, если она однозначно определяет параметр или вид распределения случайной величины. В противном случае

гипотезу называют **сложной**. Например, основная гипотеза $H_0: v_x = 5$ будет простой, $H_1: v_x > 5$ — сложной, поскольку H_1 включает более одного предположения о математическом ожидании случайной величины X .

Статистические гипотезы, сущность которых состоит в выдвижении предположения относительно неизвестных параметров распределения, называют **параметрическими**.

Правило принятия или отклонения гипотезы опирается на введение функции K , которая должна удовлетворять следующим условиям:

- обеспечивать возможность вычисления значений $K(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по данным выборки $(x_1, x_2, \dots, x_n)$;
- иметь известное точное или приближенное (например, асимптотическое) распределение.

При этих условиях о справедливости выдвинутой гипотезы судят по результатам сопоставления теоретического значения K со значением функции $K(x_1, x_2, \dots, x_n)$, вычисленным по выборочным данным. Требование, чтобы распределение критерия было известно, необходимо для того, чтобы определить, какие значения критерия маловероятны, а какие — нет. Ответ на эти вопросы позволяет сформулировать правило принятия решения о выдвинутой гипотезе.

Функция K носит название **критерия значимости**. Часто критерием значимости упрощенно называют статистику (случайную величину), служащую основой вычисления K . В предыдущих разделах, которые касались проблемы оценивания параметров распределений, было введено несколько статистик, которые могут использоваться в качестве критерия значимости. Это — статистика (3.13) в виде нормированной нормальной случайной величины, статистики (3.20), (3.32), (3.38), (3.51), имеющие распределения хи-квадрат, Стьюдента, Фишера. Применяются и другие критерии: Неймана—Пирсона, А. Н. Колмогорова, Н. В. Смирнова, Кокрена, Вальда и др. [1, 4, 8].

Для большинства критериев значимости процедура проверки основана на простом правиле: если выдвинутая гипотеза заключается в том, что исследуемое событие имеет очень малую вероятность α , а в результате одиночного испытания это событие наступило, то выдвинутая гипотеза подвергается сомнению. Величина α носит название **уровня значимости**. Значение α соответствует столь малой вероятности, что событие с такой вероятностью считается практически невозможным, а с вероятностью $(1 - \alpha)$ — практически достоверным.

Значения α выбираются для каждой задачи проверки статистических гипотез в зависимости от исследуемого явления и особенностей задачи. Так, если α — вероятность столкновения океанского лайнера с айсбергом в районе экватора или вероятность посадки космического спускаемого аппарата на вспомогательное судно, то значение α может составлять сотые и тысячные доли процента (например, $\alpha = 0.0001$). Если же анализируется, например, число боль-

ных школьников в определенном районе городе, значение α может достигать нескольких процентов, например, $\alpha = 0.05$, $\alpha = 0.1$.

С уровнем значимости α тесно связана так называемая критическая область значений критерия K или область маловероятных событий.

4.2. Критическая область. Общий алгоритм проверки гипотез

Критической называют область $\Omega_{кр}$ значений критерия K , вероятность попадания в которую значения $K(x_1, x_2, \dots, x_n)$, вычисленного по выборочным данным при условии истинности нулевой гипотезы H_0 , равна уровню значимости α . В математической статистике используются **двусторонние** и **односторонние** критические области, смысл которых поясняется ниже. Область значений критерия K , не включающая критическую область, называют **областью допустимых значений** или, упрощенно, **допустимой областью**. Таким образом, область допустимых значений соответствует вероятности $(1 - \alpha)$ попадания в нее значений K .

Как критическую, так и допустимую область, можно найти, зная (точно или приближенно) закон распределения случайной величины K . Границами этих областей служат квантили случайной величины K , порядок которых связан с уровнем значимости α . В случае, когда рассматривается двусторонняя критическая область, критическая и допустимая области разделяются двумя граничными точками (двумя квантилями случайной величины K). Если при проверке гипотезы применяется односторонняя критическая область, граничная точка, разделяющая критическую и допустимую области, одна. Рисунок 4.1 иллюстрирует вид критических областей.

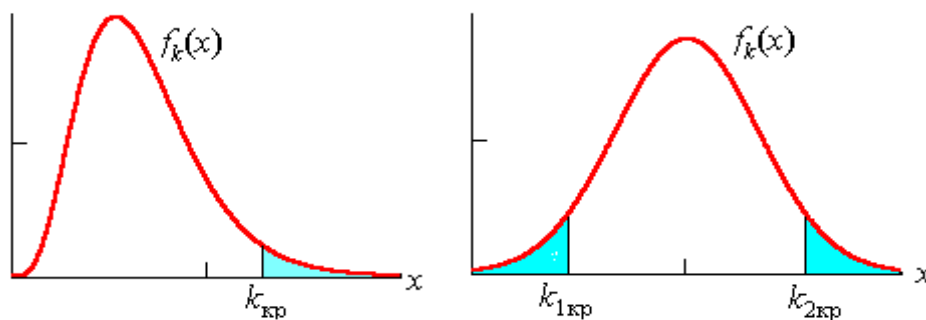


Рис. 4.1. Односторонние и двусторонние критические области

На левом графике (см. рис. 4.1) приведена плотность распределения K и односторонняя критическая область (выделена заливкой). Граничная точка в этом случае является функцией уровня значимости, т. е. $k_{кр} = k_{кр}(\alpha)$. Для двусторонней критической области (правый график на рис. 4.1) имеют место две граничные точки $k_{1кр} = k_{1кр}(\alpha_1)$ и $k_{2кр} = k_{2кр}(\alpha_2)$, причем $(\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha)$. В этом случае часто принимают равные значения $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$.

Введенные понятия позволяют рассмотреть общий алгоритм решения задач проверки статистических гипотез. Решение проводится путем последовательного выполнения следующих этапов:

1. Выдвигаются нулевая H_0 и альтернативная H_1 гипотезы.
2. Задается уровень значимости α , значение которого определяется сущностью проверяемой гипотезы, особенностями решаемой задачи, зависит от чувствительности критерия и обычно находится в диапазоне (0.001, 0.1). Следует отметить, что применение систем компьютерной математики (СКМ) оставляет непринципиальным ранее распространенную практику, согласно которой значения α задавались в виде, например, 0.1, 0.05 и проч. Задание таких значений было связано с необходимостью использования таблиц функций распределения, с упрощением табличного определения квантилей. Применение СКМ позволяет с одинаковой легкостью находить характеристики распределений при произвольных значениях α .
3. Выбирается статистика (случайная величина) K критерия значимости, обладающая известным распределением (точным или приближенным) и достаточной чувствительностью к вариациям опытных данных.
4. Определяется тип критической области (односторонняя или двусторонняя) и граничные точки $k_{кр}$ или $k_{1кр}$, $k_{2кр}$ (см. рис. 4.1).
5. Вычисляется выборочное значение $K_B = K(x_1, x_2, \dots, x_n)$ статистики критерия значимости.
6. Применяется решающее правило проверки:
 - если K_B принадлежит критической области, то H_0 отвергается, поскольку при однократном испытании произошло событие, вероятность которого мала и равна α ;
 - если K_B попадает в допустимую область, то делается вывод, что данные испытания не противоречат выдвинутой гипотезе H_0 и она принимается.

При кажущейся простоте описанной процедуры она содержит ряд элементов, которые характеризуются неопределенностью. В первую очередь это относится к заданию уровня значимости α и выбору типа критической области. Выбор α комментируется в рассматриваемых ниже примерах.

Проблема выбора типа критической области возникает обычно для параметрических гипотез, когда выдвигаются предположения о параметрах распределений.

Выбор типа критической области определяется условиями решаемой задачи. Поясним это на примере проверки гипотезы о параметре распределения Θ . Для нулевой гипотезы $H_0: \Theta = d$ может быть рассмотрена одна из следующих альтернативных гипотез $H_1: \Theta > d$, $\Theta < d$, $\Theta \neq d$. Поскольку проверка гипотезы осуществляется с уровнем значимости α , то для случая $H_1: \Theta > d$ выбирается правосторонняя критическая область с граничной точкой $k_{кр}(\alpha)$, причем вероятность превышения критической точки значением критерия соответствует уровню значимости α , т. е. $P(K > k_{кр}) = \alpha$. Правосторонняя критическая область отмечена заливкой на левом графике рис. 4.1. В случае $H_1: \Theta < d$ выбира-

ется левосторонняя критическая область с граничной точкой $k_{кр}(\alpha)$, причем $P(K < k_{кр}) = \alpha$. Для случая $H_1: \Theta \neq d$ возможны отклонения параметра от теоретического значения как вправо, так и влево, поэтому выбирается двусторонняя критическая область (см. рис. 4.1, правый график) с граничными точками $k_{1кр} = k_{1кр}(\alpha_1)$ и $k_{2кр} = k_{2кр}(\alpha_2)$, причем $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$.

Рассмотрим два простых примера, поясняющих описанную процедуру проверки статистических гипотез.

Пример 4.1. При исследовании солнечной активности за выбранный период времени сделано $n = 1000$ измерений и выявлено $m = 65$ пиков активности. Теоретический анализ при этом позволил выдвинуть предположение, что гипотетическая вероятность пиковой активности за этот же период должна составлять $p = 0.06$. В этих условиях представляло интерес выяснить, является ли выявленное изменение числа пиков активности результатом глобальных тенденций в процессах, происходящих на Солнце, или это изменение вызвано случайными флуктуациями процессов?

□ Решение. В данном случае нулевая гипотеза связана с предположением, основанным на теоретических исследованиях, т. е. $H_0: p = 0.06$. Альтернативная гипотеза $H_1: p \neq 0.06$. Примем уровень значимости $\alpha = 0.05$.

Большой объем выборки $n = 1000$ позволяет рассмотреть простой вариант статистики критерия значимости вида:

$$K = (m - np) / \sqrt{npq}, \quad (4.1)$$

где m — число (абсолютная частота) обнаруженных пиков, $q = 1 - p$.

Соотношение (4.1) встречалось нам в локальной теореме Муавра—Лапласа и интегральной теореме Лапласа (см. разд. 3.4, ч. I). Отметим также, что случайная величина m распределена по биномиальному закону, т. е. ее математическое ожидание равно np , а дисперсия равна npq . Поэтому математическое ожидание критерия k (4.1) равно нулю, а дисперсия — единице. Кроме того, поскольку биномиальное распределение при $n \rightarrow \infty$ с хорошим приближением может быть описано нормальным распределением (см. разд. 5.4 и 3.4, ч. I) с теми же значениями математического ожидания и дисперсии, то приближенно можно считать, что случайная величина K — нормированная нормальная величина, т. е. $K \sim N(0, 1)$.

Обратим внимание также на то, что в числителе критерия (4.1) сопоставляются эмпирическая абсолютная частота m появления пиков активности с теоретической абсолютной частотой np . Значения m могут отклоняться от теоретической нормы np , которая соответствует гипотезе H_0 , в положительную и отрицательную области. Случай двустороннего отклонения выборочных данных от теоретического значения учитывается выбором двусторонней критической области (см. рис. 4.1), границами которой служат квантили $z_{\alpha/2}$ и $z_{1-\alpha/2}$ нормированного нормального распределения: $k_{1кр} = z_{\alpha/2}$ и $k_{2кр} = z_{1-\alpha/2}$. Для значения $\alpha = 0.05$ квантили равны: $-z_{\alpha/2} = z_{1-\alpha/2} = 1.96$, т. е.

$$k_{1кр} = -1.96 \text{ и } k_{2кр} = 1.96. \quad (4.2)$$

Таким образом, допустимая область, при попадании значения k в которую гипотеза H_0 принимается, расположена в границах $(-1.96; 1.96)$. Вне этой зоны расположена критическая область.

Выборочное значение статистики (4.1) критерия значимости для рассматриваемого случая составляет:

$$K_B = (65 - 1000 \cdot 0.06) / \sqrt{60 \cdot 0.94} \approx 0.6658. \quad (4.3)$$

Полученное значение критерия относится к допустимой области. Это позволяет заключить, что при выбранном уровне значимости $\alpha = 0.05$ нулевая гипотеза $H_0: p = 0.06$ не опровергается данными наблюдений и отклонение числа измеренных пиков от теоретического значения вызвано случайными колебаниями солнечной активности. Уменьшая уровень значимости до значения $\alpha = 0.01$, получим: $k_{1кр} = -z_{1-\alpha/2} = -2.576$; $k_{2кр} = z_{1-\alpha/2} = 2.576$, т. е. допустимая область расширяется, а критическая — сжимается. При этом численное ранее значение статистики (4.1) критерия значимости остается в области допустимых значений. ■

Расширение области допустимых значений статистики критерия значимости означает, что нулевая гипотеза H_0 будет опровергаться все реже; это может произойти даже в тех случаях, когда она ложна. При увеличении уровня значимости α произойдет обратное: допустимая область будет сжиматься, а критическая область — расширяться. При этом могут увеличиваться другие ошибки принятия решения: гипотеза H_0 будет все чаще опровергаться в случаях, когда она верна, т. е. надежность принятия решения снижается. Увеличение α до значений 0.2—0.3 может резко снизить надежность результирующего вывода, поскольку события с такими вероятностями в большинстве задач математической статистики уже нельзя считать практически невозможными.

Из приведенных рассуждений следует, что неоправданное уменьшение или увеличение значения α может приводить к снижению чувствительности критерия (способности распознать истинную ситуацию) и потере надежности результата проверки гипотез. Ошибки, которые сопровождают процесс принятия решения, анализируются в следующем разделе.

Данные наблюдений в примере 4.1 соответствуют положительному отклонению числа пиков солнечной активности от теоретического значения. Поэтому в качестве второго варианта критической области может быть рассмотрена односторонняя (правосторонняя) критическая область. Сопоставим результат применения односторонней критической области с результатом, полученным в примере 4.1 для двусторонней критической области, при тех же исходных данных.

Пример 4.2. При исходных данных примера 4.1 проверить нулевую гипотезу $H_0: p = 0.06$ при альтернативной гипотезе $H_1: p > 0.06$ и уровне значимости $\alpha = 0.05$.

□ Решение. Статистика (4.1) критерия значимости для ранее принятых данных (см. пример 4.1) имеет значение (4.3), т. е. $K_B = 0.6658$.

Левая граница правосторонней критической области в рассматриваемом случае соответствует квантили $k_{кр} = z_{1-\alpha} = 1.645$. Значение $K_B = 0.6658$ попадает в допустимую область $K_B < k_{кр}$, откуда следует вывод, что выборочные данные не противоречат нулевой гипотезе и она принимается. Рисунок 4.2 содержит результаты решения примеров 4.1 и 4.2 в Mathcad.

Сопоставляя эти результаты, отметим, что применение двух вариантов критических областей не привело к отклонению нулевой гипотезы. Однако в данном случае, использование правосторонней критической области обеспечило несколько большую чувствительность критерия. Как следует из графика (см. рис. 4.2), нулевая гипотеза при правосторонней области была бы отклонена, если бы данные наблюдения соответствовали бы $m > 73$, тогда как при двусторонней области это произошло при $m > 75$. ■

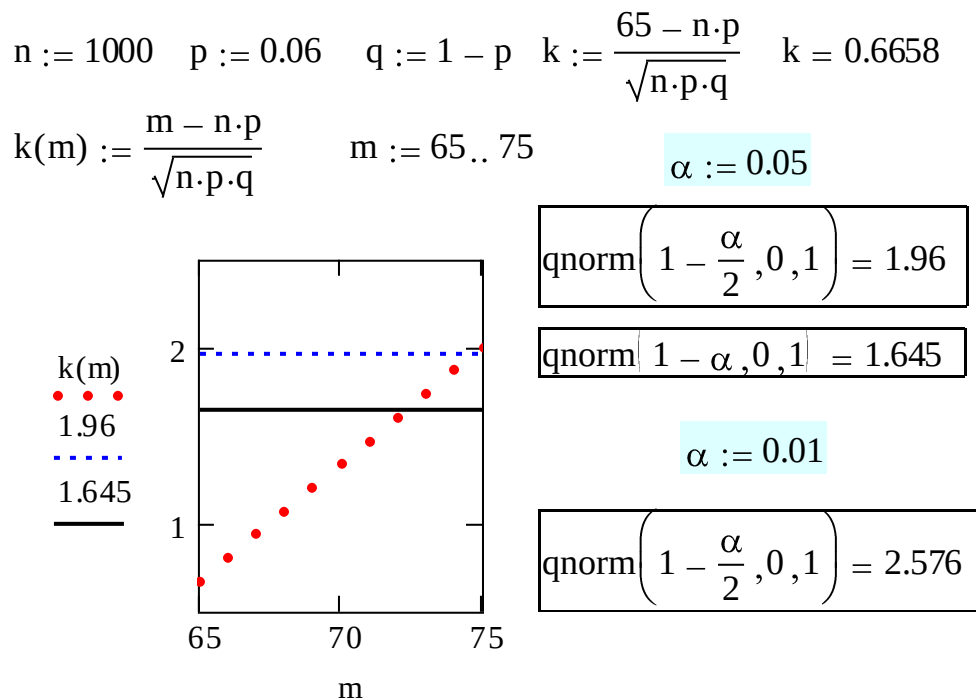


Рис. 4.2. Решение примеров 4.1 и 4.2

Рассмотрим основные элементы принятия решений при проверках статистических гипотез более подробно, выделяя анализ возможных ошибок и свойства критерия значимости.

4.3. Ошибки первого и второго рода. Мощность критерия

Результат проверки статистических гипотез формулируется в виде решения о принятии или отклонении нулевой гипотезы. Из комментария к примеру 4.1 следует, что такое решение связано с риском допустить ошибки. Для описания ошибок принятия решений рассмотрим таблицу вероятностей тех ситуаций, которые возможны при проверке статистических гипотез.

В табл. 4.1 приведены вероятности четырех ситуаций, две из которых связаны с правильным решением, а две (диагональ табл. 4.1) — с ошибочными заключениями. Перечислим эти вероятности:

- ° вероятность отвергнуть проверяемую гипотезу, когда она истинна. Эта вероятность соответствует ранее введенному уровню значимости

$$\alpha = P(\text{откл. } H_0 \mid H_0 \text{ истинна}); \quad (4.4)$$

- ° вероятность принять H_0 в случае, когда она истинна. Эта вероятность соответствует

$$1 - \alpha = P(\text{прин. } H_0 \mid H_0 \text{ истинна}); \quad (4.5)$$

- ° вероятность принять H_0 в случае, когда она ложна, т. е. истинной является альтернативная гипотеза H_1 ,

$$\beta = P(\text{прин. } H_0 \mid H_1 \text{ истинна}); \quad (4.6)$$

- ° вероятность отклонить H_0 в случае, когда она ложна (истинна альтернативная гипотеза H_1)

$$1 - \beta = P(\text{откл. } H_0 \mid H_1 \text{ истинна}). \quad (4.7)$$

Таблица 4.1

Истинная гипотеза	Результат принятия решения	
	H_0 отклонена	H_0 принята
H_0	α	$1 - \alpha$
H_1	$1 - \beta$	β

Вероятности α и β называют **вероятностями ошибок первого и второго рода** соответственно. Таким образом, в процессе принятия решения при проверке статистических гипотез различают ошибки первого и второго рода.

Ошибкой первого рода называется ошибка отклонения истинной гипотезы. **Ошибкой второго рода** называется ошибка принятия ложной гипотезы.

Последующий анализ покажет, что все перечисленные вероятности тесно связаны между собой. В процессе проверки гипотез одна из вероятностей (уровень значимости α) задается. Однако вероятность β остается неопределенной для большинства прикладных задач математической статистики, поскольку для ее определения необходимо знать закон распределения статистики критерия значимости для альтернативной гипотезы, что, как правило, невозможно.

Правильным решениям соответствуют недиагональные элементы табл. 4.1. Исследователю важно повысить вероятности правильных решений, т. е. одновременно уменьшить вероятности α и β ошибок первого и второго рода. Однако, как будет показано, попытка при том же объеме выборки уменьшить вероятность α будет приводить к увеличению вероятности β . Ранее было отмечено (см. комментарий к примеру 4.1), что при уменьшении вероятности α ошибок первого рода расширяется область допустимых значений и снижается чувствительность критерия значимости, т. е. его способность распознать истинную си-

туацию. В то же время, с уменьшением вероятности β ошибок второго рода чувствительность критерия повышается.

Вероятность $(1 - \beta)$ характеризует **мощность критерия** — способность отклонить проверяемую гипотезу H_0 в случае, когда истинна гипотеза H_1 .

Мощность критерия определяет качество используемого критерия, его возможность распознать истину с помощью данных наблюдений. При увеличении мощности критерия вероятность ошибок второго рода уменьшается.

Для пояснения связи ошибок первого и второго рода между собой, определения роли и значения мощности критерия рассмотрим пример проверки гипотезы о величине одного из параметров известного распределения.

Пример 4.3. Пусть проверяется гипотеза о центре нормального распределения $N(\nu, \sigma^2)$, причем σ — известно. Выдвигается гипотеза $H_0: \nu = m$. В качестве альтернативной рассматривается гипотеза $H_1: \nu \neq m$ с сохранением закона распределения, что предполагает возможность смещения математического ожидания на величину ρ вправо или влево от m . Проанализировать взаимное влияние ошибок первого и второго рода.

□ Решение. В силу условия, выборочные данные имеют нормальное распределение $N(\nu, \sigma^2)$. В качестве статистики критерия значимости K в данном случае можно принять выборочное среднее $\bar{x}_B$ (точечную оценку математического ожидания), а критическую область выбрать двусторонней. Из *разд. 2.2* и *3.4* следует, что статистика (случайная величина) $K = \bar{x}_B$ в рассматриваемом случае имеет нормальное распределение с параметрами m и $\sigma/\sqrt{n}$, т. е. $K \sim N(m, \sigma^2/n)$. Критические точки $k_{1\text{кр}}$ и $k_{2\text{кр}}$ определяются в функции квантилей $z_{\alpha/2}$ и $z_{1-\alpha/2}$ порядков $\alpha/2$ и $(1 - \alpha/2)$ нормированного нормального распределения статистики $[(\bar{x}_B - m) \sqrt{n} / \sigma]$ и удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} P(\bar{x}_B < k_{1\text{кр}}) &= F[(k_{1\text{кр}} - m) \sqrt{n} / \sigma] = F[z_{\alpha/2}] = \alpha/2; \\ P(\bar{x}_B < k_{2\text{кр}}) &= F[(k_{2\text{кр}} - m) \sqrt{n} / \sigma] = F[z_{1-\alpha/2}] = 1 - \alpha/2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что критические точки могут быть найдены из соотношений ($z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$)

$$k_{1\text{кр}} = \frac{z_{\alpha/2} \sigma}{\sqrt{n}} + m; \quad k_{2\text{кр}} = \frac{z_{1-\alpha/2} \sigma}{\sqrt{n}} + m. \quad (4.8)$$

В качестве альтернативного способа (*см. разд. 3.2.2*) определения критических точек в данном случае может быть использовано непосредственное вычисление квантилей порядков $\alpha/2$ и $(1 - \alpha/2)$ распределения $N(m, \sigma^2/n)$. Этот способ упрощает решение данной задачи проверки гипотез и может быть рекомендован в случаях, когда решение ищется с использованием систем компьютерной математики.

На рис. 4.3 для фиксированного объема выборки n , используемой при определении выборочного значения критерия K , приведены графики плотностей

распределения K для случаев нулевого смещения ($\rho = 0$) центра распределения (центральная кривая) и смещения вправо и влево от m на величину $\rho > 0$.

Для случая, когда смещение $\rho = 0$ (истинна гипотеза H_0), двусторонняя критическая область имеет две части $(-\infty, k_{1кр})$ и $(k_{2кр}, \infty)$, выделенные темной заливкой. Суммарная площадь под центральной кривой для критической области равна $(\alpha/2 + \alpha/2) = \alpha$, т. е. уровню значимости. Если же истинное значение центра распределения смещается относительно m (истинна альтернативная гипотеза H_1), появляются ошибки второго рода, вероятность которых равна β (см. рис. 4.3, светлая заливка).

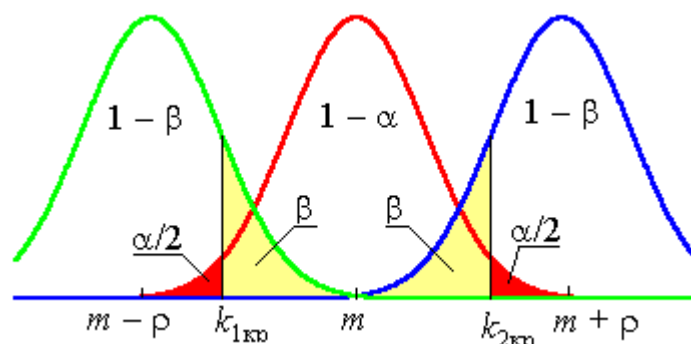


Рис. 4.3. Распределения K при различных смещениях центра

Рисунок 4.3 наглядно иллюстрирует неразрывную связь ошибок первого и второго рода между собой. Так, если истинными являются смещенные относительно m законы распределения (см. левый или правый графики рис. 4.3), то попытка уменьшить уровень значимости α будет неизбежно приводить к увеличению вероятности ошибок второго рода β , поскольку уменьшение α приведет к расширению границ допустимой области ($k_{1кр}$, $k_{2кр}$). При этом мощность критерия ($1 - \beta$) будет снижаться, что можно проследить по уменьшению площади под плотностями распределений (см. левый или правый графики на рис. 4.3) в зонах $\bar{x}_B < k_{1кр}$ и $\bar{x}_B > k_{2кр}$. Отсюда следует, что мощность критерия повышается с ростом отличий альтернативной гипотезы относительно нулевой. С этих позиций мощность критерия ($1 - \beta$) можно интерпретировать как количественный показатель чувствительности критерия значимости. ■

Другим практически важным выводом из анализа рис. 4.3 является невозможность одновременного уменьшения вероятностей ошибок первого и второго рода при выборке фиксированного объема. Ниже будет показано, что одновременного снижения α и β можно добиться лишь при увеличении объема выборки n .

Пример 4.4. Решим задачу, условия которой были сформулированы в примере 4.3, в числах и оценим вероятности ошибок первого и второго рода для $\rho > 0$. В качестве исходных данных примем: уровень значимости $\alpha = 0.05$; объем выборки $n = 100$; параметры нормального распределения $m = 5$, $\sigma = 1.2$, т. е., закон распределения статистики критерия значимости:

$$K = \bar{x}_B \sim N(m, \sigma^2/n) = N(5, 0.0144).$$

□ **Решение.** Знание закона распределения K позволяет определить критические точки $k_{1кр}$ и $k_{2кр}$, которые могут быть найдены по выражениям (4.8). Определяя квантили $z_{\alpha/2}$ и $z_{1-\alpha/2}$ порядка $\alpha/2 = 0.025$ и $(1 - \alpha/2) = 0.975$ нормированного нормального распределения $[(\bar{x}_B - m) \sqrt{n} / \sigma] \sim N(0, 1)$, получаем: $z_{\alpha/2} = -1.96$; $z_{1-\alpha/2} = 1.96$. Подставляя в формулы (4.8), определяем критические точки $k_{1кр} = 4.765$ и $k_{2кр} = 5.235$. Эти значения, как отмечалось, соответствуют квантилям порядка 0.025 и 0.975 распределения $N(5, 0.0144)$. Рисунок 4.4 содержит результаты определения критических точек двумя указанными способами: альтернативным (см. разд. 3.2.2), т. е. прямым вычислением квантилей распределения $N(5, 0.0144)$, и традиционным, с помощью формул (4.8). Решения получены в среде Mathcad и помечены на рис. 4.4 цифрами 1 и 2 соответственно.

	Значение $k_{1кр}$	Значение $k_{2кр}$
1	$qnorm(0.025, 5, 0.12) = 4.765$ $qnorm(0.025, 0, 1) = -1.96$	$qnorm(0.975, 5, 0.12) = 5.235$ $qnorm(0.975, 0, 1) = 1.96$
2	$\frac{1.2 \cdot (-1.96)}{10} + 5 = 4.765$	$\frac{1.2 \cdot 1.96}{10} + 5 = 5.235$

Рис. 4.4. Вычисление значений критических точек двумя способами

Предположим теперь, что по результатам наблюдений получено значение выборочного среднего $\bar{x}_B = 5.3$. Это значение попадает в критическую область, поэтому нулевая гипотеза должна быть отклонена, поскольку в результате одиночного испытания произошло событие, которое по условию задачи было определено как практически невозможное. Однако, согласно табл. 4.1, это решение может сопровождаться ошибками первого рода (отклонение истинной гипотезы), вероятность которых равна уровню значимости α .

Если же выборочное среднее было бы равно 4.8, что соответствует допустимой области $[4.765; 5.235]$, то нулевая гипотеза была бы принята. Тогда можно было бы заключить, что отклонение $\bar{x}_B$ от m вызвано лишь случайными колебаниями выборочных данных. Но при таком решении имелся бы риск совершить ошибку второго рода (принять H_0 в случае, когда она ложна). Поскольку при анализе статистических данных неизвестно истинное значение ν центра распределения, то вероятность β ошибок второго рода вычислить нельзя. Эту вероятность можно оценить только при задании ряда смещений относительно гипотетического центра распределения.

Предыдущие соображения и анализ рис. 4.3 позволяют записать выражения для вероятности ошибок второго рода в форме:

$$\beta_+ = P(\bar{x}_B < k_{2\text{кр}}) \text{ для } v = m + \rho; \quad (4.9)$$

$$\beta_- = P(\bar{x}_B > k_{1\text{кр}}) \text{ для } v = m - \rho.$$

Из (4.9) и (4.10) следует, что β_+ может быть выражена как функция распределения $F_1(k_{2\text{кр}})$ случайной величины $K \sim N(m + \rho, \sigma^2/n)$, а β_- — как разность $[1 - F_2(k_{1\text{кр}})]$, где $F_2(k_{1\text{кр}})$ — функция распределения $K \sim N(m - \rho, \sigma^2/n)$:

$$\beta_+ = F_1(k_{2\text{кр}}); \beta_- = 1 - F_2(k_{1\text{кр}}). \quad (4.10)$$

Вычисление в среде Mathcad значений $F_1(k_{2\text{кр}})$ и $F_2(k_{1\text{кр}})$ при задании конкретного значения ρ не составляет труда. При использовании же таблиц функций распределений $F(x)$ нормированного нормального распределения или таблиц функций Лапласа $\Phi(x)$ (прил. 1) значения $F_1(k_{2\text{кр}})$ и $F_2(k_{1\text{кр}})$ могут быть найдены по формулам:

$$F_1(k_{2\text{кр}}) = F[(k_{2\text{кр}} - (m + \rho))\sqrt{n} / \sigma]; \quad (4.11)$$

$$F_2(k_{1\text{кр}}) = F[(k_{1\text{кр}} - (m - \rho))\sqrt{n} / \sigma]; F(x) = 0.5 + \Phi(x).$$

Значения вероятностей ошибок второго рода для рассматриваемого примера при положительных и отрицательных смещениях центра распределения относительно значения $v = 5.0$ сведены в табл. 4.2.

Таблица 4.2

	Значения β				
	$v = 4.6$	$v = 4.8$	$v = 5.0$	$v = 5.2$	$v = 5.4$
β_+	—	—	0.975	0.615	0.085
$1 - \beta_+$	—	—	0.025	0.385	0.915
β_-	0.085	0.615	0.975	—	—
$1 - \beta_-$	0.915	0.385	0.025	—	—

Вычисление значений β в среде Mathcad иллюстрируется рис. 4.5.

Как следует из соотношений (4.9)—(4.11), вероятность β ошибок второго рода может быть найдена как функция $F_1(k_{\text{кр}})$ распределения $N(v, \sigma^2/n)$ или функция $F[(k_{\text{кр}} - v)\sqrt{n} / \sigma]$ распределения $N(0, 1)$, где $k_{\text{кр}}$ — соответствующая критическая точка ($k_{2\text{кр}}$ или $k_{1\text{кр}}$). Поэтому для вычисления β в среде Mathcad целесообразно использовать встроенную функцию **pnorm**, которая дает значения функций нормального распределения для заданных параметров. Значения β при этом могут вычисляться для каждого варианта смещения (см. п. 1 рис. 4.5) простым применением функции **pnorm** или формироваться для ряда смещений в цикле с применением программных модулей (см. п. 2 рис. 4.5).

Данные табл. 4.1 и рис. 4.5 свидетельствуют о достаточно быстром росте мощности критерия $(1 - \beta)$ с увеличением смещения. Это подтверждает сделанный ранее вывод о повышении мощности критерия при увеличении различия между нулевой H_0 и альтернативной H_1 гипотезами.

1. Непосредственное вычисление β по выражениям (4.10) и (4.11)

для распределения $N(\nu, \sigma)$

$$\text{pnorm}(5.235, 5.4, 0.12) = 0.085$$

$$\text{pnorm}(5.235, 5.2, 0.12) = 0.615$$

$$\text{pnorm}(5.235, 5.0, 0.12) = 0.975$$

$$1 - \text{pnorm}(4.765, 4.8, 0.12) = 0.615$$

$$1 - \text{pnorm}(4.765, 4.6, 0.12) = 0.085$$

для распределения $N(0, 1)$

$$\text{pnorm}\left(\frac{5.235 - 5.0}{0.12}, 0, 1\right) = 0.975$$

$$\text{pnorm}\left(\frac{5.235 - 5.2}{0.12}, 0, 1\right) = 0.615$$

2. Вычисление β в цикле

$$x(i) := 5.4 - i \cdot 0.2$$

$$\beta := \begin{cases} \text{for } i \in 0..4 \\ s_i \leftarrow \begin{cases} \text{pnorm}(5.235, x(i), 0.12) & \text{if } x(i) \geq 5 \\ 1 - \text{pnorm}(4.765, x(i), 0.12) & \text{otherwise} \end{cases} \\ s \end{cases}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 0.085 \\ 0.615 \\ 0.975 \\ 0.615 \\ 0.085 \end{pmatrix}$$

Рис. 4.5. Вычисление в Mathcad значений β двумя способами

В разд. 4.2 этой главы, при анализе примеров 4.1 и 4.2, было отмечено повышение чувствительности критерия значимости в случае, когда применялась односторонняя (правосторонняя) критическая область. Представляет интерес сопоставить мощность критерия при выборе правосторонней критической области с мощностью критерия, которая достигается при двусторонней области, которая использовалась в примерах 4.3 и 4.4.

Пример 4.5. Примем, как и ранее, $H_0: \nu = m$. В качестве альтернативной рассмотрим теперь $H_1: \nu > m$ с сохранением закона распределения, что предполагает возможность смещения математического ожидания на величину ρ вправо от m . Пусть также выборочные данные по-прежнему имеют нормальное распределение $N(\nu, \sigma^2)$. В качестве исходных данных примем: уровень значимости $\alpha = 0.05$; объем выборки $n = 100$; параметры нормального распределения $m = 5$, $\sigma = 1.2$, т. е. закон распределения статистики $K = \bar{x}_B$ соответствует нормальному $N(m, \sigma^2/n) = N(5, 0.0144)$.

□ Решение. Левую границу $k_{кр}$ правосторонней критической области найдем, как и ранее, двумя способами: прямым вычислением квантили порядка 0.95 распределения $N(5, 0.0144)$ и с применением формул типа (4.8), в которых предварительно находится квантиль $z_{1-\alpha}$ нормированного нормального распределения $N(0,1)$. Основанием для применения этих способов служат соотношения вида

$$P(\bar{x}_B < k_{кр}) = F[(k_{кр} - m) \sqrt{n} / \sigma] = F(z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha.$$

Отсюда следует (см. разд 3.2.1 и 3.2.2), что критическая точка $k_{кр}$ соответствует квантили порядка 0.95 распределения $N(5, 0.0144)$, а также может быть найдена по формуле:

$$k_{кр} = \frac{z_{1-\alpha} \sigma}{\sqrt{n}} + m. \quad (4.12)$$

На рис. 4.6 приведена копия файла Mathcad, в котором вычисляется критическая точка $k_{кр}$ указанными двумя способами. Найдено: $k_{кр} = 5.197$.

<code>qnorm(0.95, 5, 0.12) = 5.197</code>	квантиль распределения $N(5, 0.12)$
<code>z := qnorm(0.95, 0, 1)</code> <code>z = 1.645</code>	квантиль распределения $N(5, 0.12)$
<code>k_{кр} := z.0.12 + 5</code> <code>k_{кр} = 5.197</code>	значение $k_{кр}$ по формуле (4.12)

Рис. 4.6. Вычисление критической точки примера 4.5

Предположим теперь, что по результатам наблюдений получено значение выборочного среднего $\bar{x}_B = 5.3$. Это значение попадает в критическую область $K > 5.197$, поэтому нулевая гипотеза H_0 отклоняется в пользу альтернативной гипотезы. Таким образом, и в этом случае имеется больше оснований считать, что полученное по выборочным данным значение центра распределения не вызвано случайными флуктуациями, поскольку в результате одиночного испытания произошло событие, которое по условию задачи было определено как практически невозможное. Этот результат может иметь ошибку первого рода (отклонение истинной гипотезы) с вероятностью $\alpha = 0.05$, т. е. в пяти случаях из ста может быть допущено ошибочное отклонение проверяемой гипотезы, когда на самом деле она истинна. Если бы по выборочным данным было определено $\bar{x}_B = 5.1$, то это значение попало бы в допустимую область и гипотеза H_0 была бы принята с вероятностью $1 - \alpha = 0.95$. Но и при этом могла бы быть допущена ошибка (второго рода), сущность которой заключается в принятии нулевой гипотезы H_0 в условиях, когда истинной служит H_1 .

Вероятность β ошибок второго рода оценим в рассматриваемом случае правосторонней критической области, задавая, как и ранее, смещенные значения $v = m + \rho$. Этой вероятности соответствует, как показано ранее, функция $F_1(k_{кр})$ распределения $N(m + \rho, \sigma^2/n)$ или функция $F[(k_{кр} - v) : (\sigma/\sqrt{n})]$ распределения $N(0, 1)$, для вычисления которых в среде Mathcad может быть использована встроенная функция **pnorm**. Проведем вычисление β с использованием цикла, показанного на рис. 4.5. Результаты вычислений представлены на рис. 4.7 и сведены в табл. 4.3.

Сопоставляя данные табл. 4.3 с соответствующими данными табл. 4.2 (для смещений центра распределения вправо), нетрудно заметить, что мощность критерия в случае правосторонней критической области выше, чем для дву-

сторонней критической области. Этот факт служит дополнительным обоснованием целесообразности применения правосторонней критической области в рассматриваемом случае.

$x(i) := 5.4 - i \cdot 0.2$	$\beta :=$	for $i \in 0..2$
$\beta^T = (0.045 \ 0.49 \ 0.95)$		$s_i \leftarrow \text{pnorm}(5.197, x(i), 0.12)$
$(1 - \beta)^T = (0.955 \ 0.51 \ 0.05)$		s
	Мощность критерия	

Рис. 4.7. Вычисление значений β и $(1 - \beta)$ для примера 4.5

Таблица 4.3

	Значения β		
	$v = 5.0$	$v = 5.2$	$v = 5.4$
β	0.95	0.49	0.045
$1 - \beta$	0.05	0.51	0.955

В рассмотренных примерах проверки параметрических гипотез использовались различные статистики критерия значимости. В каждом случае статистика выбиралась, исходя из естественных предпосылок без обобщающего правила. Однако теоретическое основание для выбора статистик в задачах такого рода существует. Оно опирается на критерий Неймана—Пирсона. Рассмотрим необходимые теоретические положения, сопровождающие использование этого критерия.

4.4. Параметрические гипотезы

4.4.1. Критерий Неймана—Пирсона

При проверке параметрических гипотез распространение получил критерий Неймана—Пирсона. Этот критерий применяется для проверки гипотез о параметрах распределений как непрерывных, так и дискретных случайных величин и использует отношение функций правдоподобия (см. разд. 2.6). Рассмотрим сущность критерия Неймана—Пирсона для непрерывного случая на примере простых гипотез.

Пусть X — случайная величина, плотность распределения которой $f_X(x, \Theta)$, где Θ — неизвестный параметр; $\mathbf{X}$ — $(n \times 1)$ -вектор выборочных данных, полученных в результате экспериментов. Рассмотрим две простые гипотезы: $H_0: \Theta = \Theta_0$ и $H_1: \Theta = \Theta_1 = \Theta_0 + \rho$, где ρ — вещественная константа. Проверка гипотез проводится при уровне значимости α .

В качестве статистики $Z(\mathbf{X})$ рассматривается отношение функций правдоподобия (см. разд. 2.6) $L(\mathbf{X}; \Theta_1)$ и $L(\mathbf{X}; \Theta_0)$, которые соответствуют истинности альтернативной и нулевой гипотез:

$$Z(\mathbf{X}) = \frac{L(\mathbf{X}; \Theta_1)}{L(\mathbf{X}; \Theta_0)}. \quad (4.13)$$

Для построения оптимального (соответствующего максимальному значению мощности $(1 - \beta)$ при заданном значении α) критерия Неймана—Пирсона критическую область выбирают, назначая константу C_z в условии:

$$P\{Z(\mathbf{X}) \geq C_z \mid H_0\} = \alpha. \quad (4.14)$$

Это условие соответствует заданному уровню вероятности ошибок первого рода, причем C_z в данном случае выступает в качестве квантили порядка $(1 - \alpha)$ распределения случайной величины $Z(\mathbf{X})$ и служит левой границей критической области. Решающее правило, связанное с этим выбором, просто: нулевая гипотеза принимается при $Z(\mathbf{X}) < C_z$ и отвергается в противоположном случае. Мощность критерия $(1 - \beta)$, которая достигается при этом, уменьшить при заданном уровне значимости α нельзя.

В широкой совокупности практических задач, связанных с проверкой параметрических гипотез применительно к наиболее часто используемым распределениям, критерий Неймана—Пирсона может быть построен с применением более простых выражений для статистики критерия значимости, не требующих вычисления отношения функций правдоподобия. Покажем это для нескольких распределений при простых гипотезах H_0 и H_1 .

Нормальное распределение

При проверке гипотезы $H_0: m = m_0$ для нормально распределенной случайной величины с известной дисперсией σ^2 против альтернативы $H_1: m = m_1 = m_0 + \rho$ ($\rho > 0$) функция правдоподобия (см. разд. 2.6) записывается как

$$L(\mathbf{X}; m) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n \exp \left[-\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 / 2\sigma^2 \right]$$

и статистика (4.13) принимает вид:

$$Z(\mathbf{X}) = \exp \left[\sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{(m_1 - m_0)}{\sigma^2} \right] / \exp \left[\frac{n(m_1^2 - m_0^2)}{2\sigma^2} \right]. \quad (4.15)$$

Очевидно, что при таком выражении для $Z(\mathbf{X})$ неравенство $Z(\mathbf{X}) \geq C_z$ в составе (4.14) эквивалентно неравенствам $\sum_{i=1}^n x_i \geq C_n$ или $\bar{x}_B \geq C$. Действительно, из (4.15) следует:

$$\ln[L(\mathbf{X}; m)] = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{(m_1 - m_0)}{\sigma^2} - \left[\frac{n(m_1^2 - m_0^2)}{2\sigma^2} \right] \geq \ln C_z;$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \geq \frac{\sigma^2}{m_1 - m_0} \left[\ln C_z + \frac{n(m_1^2 - m_0^2)}{2\sigma^2} \right] = C_n; \quad \bar{x}_B \geq C = C_n / n.$$

Последние выражения позволяют при построении оптимального критерия Неймана—Пирсона перейти от статистики (4.13) к более простым статистикам

$\sum_{i=1}^n x_i$ или $\bar{x}_B$. Так, выбирая в качестве статистики, например, последний вариант, т.е. формируя статистику в виде $\bar{x}_B$, константу C определим из условия обеспечения заданного уровня значимости α :

$$P\{ \bar{x}_B \geq C \mid H_0 \} = \alpha. \quad (4.16)$$

Отсюда следует, что оптимальный критерий Неймана—Пирсона в данном случае можно построить с использованием выражения (4.16), т. е. выбирая в качестве статистики критерия значимости $\bar{x}_B$ и определяя C из уравнения (4.16). При этом, поскольку (см. разд. 2.4.1) $\bar{x}_B \sim N(m_0, \sigma^2 / n)$, константа C — квантиль порядка $(1 - \alpha)$ этого распределения, т. е. C служит левой границей правосторонней критической области.

В случаях, когда проверка осуществляется при $m_1 < m_0$ ($\rho < 0$), условие (4.16) принимает вид $P\{ \bar{x}_B \leq C \mid H_0 \} = \alpha$ и константа C будет соответствовать квантили порядка α распределения $N(m_0, \sigma^2 / n)$, т. е. — правой границе левосторонней критической области. Подобный выбор упрощенных статистик критерия значимости возможен и при двусторонних критических областях.

Показательное распределение.

Пусть теперь $\mathbf{X}$ — $(n \times 1)$ -вектор выборочных данных, полученных в результате экспериментов со случайной величиной, имеющей показательное распределение, известное с точностью до параметра λ . Функция правдоподобия имеет вид:

$$L(\mathbf{X}; \lambda) = \lambda^n \exp \left[-\lambda \sum_{i=1}^n x_i \right].$$

Тогда, для нулевой $H_0: \lambda = \lambda_0$ и альтернативной $H_1: \lambda = \lambda_1$ гипотез отношение (4.13) функций правдоподобия запишется как

$$Z(\mathbf{X}) = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^n \exp \left[-(\lambda_1 - \lambda_0) \sum_{i=1}^n x_i \right]. \quad (4.17)$$

а) Полагая $\lambda_1 > \lambda_0$, получаем эквивалентное неравенство в форме $\bar{x}_B \leq C$, причем в этом случае константа C определяет правую границу левосторонней критической области и выбирается из следующего условия обеспечения заданного α :

$$P\{\bar{x}_B \leq C \mid H_0\} = \alpha. \quad (4.18)$$

Выборочное среднее в (4.16) вычисляется по формуле (1.6) $\bar{x}_B = \sum_{i=1}^n x_i / n$.

Известно (прил. 13), что сумма n независимых случайных величин, каждая из которых распределена по показательному закону распределения с параметром λ , имеет гамма-распределение $\Gamma(\lambda, n)$ с плотностью

$$f_X(x) = \left\{ \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} \exp(-\lambda x) \text{ при } x \geq 0; 0 \text{ при } x < 0 \right\},$$

т. е. распределение Эрланга n -го порядка. Отсюда следует (прил. 13), что выборочное среднее экспоненциально распределенной выборки объема n имеет гамма-распределение $\Gamma(\lambda n, n)$ с плотностью

$$f_U(u) = \left\{ \frac{(\lambda n)^n}{(n-1)!} u^{n-1} \exp(-\lambda n u) \text{ при } u \geq 0; 0 \text{ при } u < 0 \right\},$$

а константа C в (4.16) — квантиль порядка α распределения $\Gamma(n\lambda_0, n)$, выступающая в данном случае в качестве правой границы левосторонней критической области.

б) При $\lambda_1 < \lambda_0$, получаем условие (4.18) в форме $P\{\bar{x}_B \geq C \mid H_0\} = 1 - \alpha$, т. е. константа C — квантиль порядка $(1 - \alpha)$ распределения $\Gamma(n\lambda_0, n)$ будет в данном случае выступать в качестве левой границы правосторонней критической области.

Биномиальное распределение.

Аналогичное упрощение возможно и при построении оптимального критерия Неймана—Пирсона для параметрических гипотез о значении параметра p биномиального распределения (см. разд. 5.4, ч. I).

Пусть на основе выборки $\mathbf{X}$ объема n проверяется гипотеза $H_0: p = p_0$ против альтернативы $H_1: p = p_1 > p_0$, где p_0 и p_1 — заданные значения параметра. Гипотеза H_0 предполагает, таким образом, что элементами выборки служат значения: 1 (успех) с вероятностью p_0 и 0 (неуспех) с вероятностью $(1 - p_0)$.

Отношение функций правдоподобия (4.13) в этом случае примет вид:

$$Z(\mathbf{X}) = \frac{L(\mathbf{X}; p_1)}{L(\mathbf{X}; p_0)} = \left(\frac{p_1 (1 - p_0)}{p_0 (1 - p_1)} \right)^{S_n} \left(\frac{1 - p_1}{1 - p_0} \right)^{n^2}. \quad (4.19)$$

Здесь S_n — суммарное число успехов в серии из n испытаний.

Второй сомножитель выражения (4.19) положительный, а отношение вероятностей в первом сомножителе при $p_1 > p_0$ есть величина, большая единицы. Очевидно, что в этом случае неравенство $Z(\mathbf{X}) \geq C_z$ в составе (4.14) эквивалентно неравенствам $\sum_{i=1}^n x_i \geq C_n$ или $\bar{x}_B \geq C$. Выбирая, например, как и ранее,

последний вариант, т.е. формируя статистику в виде $\bar{x}_B$, константу C определим из условия обеспечения заданного уровня значимости α :

$$P\{\bar{x}_B \geq C \mid H_0\} = \alpha. \quad (4.20)$$

Для больших объемов выборки распределение $\bar{x}_B$ в (4.20) может быть с достаточной точностью представлено нормальным распределением (см. разд. 3.4 и 5.4 первой части) с математическим ожиданием $m = np$ и дисперсией $\sigma^2 = np(1-p)/n = p(1-p)$. Тогда константа C в (4.20) может быть определена как квантиль порядка $(1 - \alpha)$ нормального распределения $N[np_0, p_0(1-p_0)]$. В данном случае она соответствует левой границе критической области.

4.4.2. Сложные гипотезы

Общая процедура проверки сложных гипотез остается прежней, описанной в разд. 4.2. Однако имеются и некоторые особенности, отличающие случай проверки сложных гипотез от проверки простых гипотез.

Пусть имеются две гипотезы: $H_0 : \Theta \in \Theta_0$ и $H_1 : \Theta \in \Theta_1$, где Θ_0 и Θ_1 — некоторые независимые области значений параметра Θ . Эти области таковы, что одна или обе гипотезы — сложные (например, $H_0 : \Theta = \Theta_0$, $H_1 : \Theta > \Theta_0$).

Критерий проверки сложных гипотез, как и ранее, опирается на определение критической области $\Omega_{кр}$, которая определяет результат принятия решения:

- если выбранная статистика $K(\mathbf{X}) \in \Omega_{кр}$, гипотеза H_0 отвергается в пользу альтернативной гипотезы H_1 ;
- если статистика $K(\mathbf{X}) \notin \Omega_{кр}$, принимается H_0 и отвергается гипотеза H_1 .

Вероятности ошибок первого (α) и второго (β) рода при проверке сложных гипотез являются функциями параметра Θ :

$$\alpha(\Theta) = P[K(\mathbf{X}) \in \Omega_{кр} \mid H_0]; \quad \beta(\Theta) = P[K(\mathbf{X}) \notin \Omega_{кр} \mid H_1].$$

Для сложных гипотез мощность критерия также зависит от параметра:

$$1 - \beta(\Theta) = B(\Theta).$$

Эта функция носит название **функции мощности критерия**; ее оценка возможна при проверке простых гипотез против сложной альтернативы. Для таких задач, при построении оптимального критерия Неймана—Пирсона, также возможен переход к упрощенным неравенствам типа (4.16), (4.18), (4.20). Проиллюстрируем это утверждение примером.

Пусть на основе нормальной выборки $\mathbf{X}$ объема n с параметрами (m, σ) , где σ — известна, проверяется простая гипотеза $H_0 : m = m_0$ против сложной альтернативы $H_1 : m > m_1$. В данном случае для любого $m_1 > m_0$ критическая область выбирается, исходя из неравенства вида (4.16), которое не зависит от m_1 . Это означает, что построенный ранее оптимальный критерий Неймана—Пирсона $\bar{x}_B \geq z_{1-\alpha}$, где $z_{1-\alpha}$ — квантиль распределения $N(m_0, \sigma^2)$, справед-

лив при любом $m_1 > m_0$ и служит основой решающего правила в этой задаче проверки простой гипотезы против сложной альтернативы.

Рассмотренные ранее критерии предполагали наличие фиксированного объема выборки, при котором осуществлялась проверка. В теории проверки статистических гипотез существуют подходы, позволяющие строить критерий проверки в виде последовательной процедуры, когда решение принимается по мере поступления данных наблюдений. К таким критериям относится критерий Вальда, кратко рассматриваемый ниже.

4.4.3. Критерий Вальда

Во многих прикладных статистических задачах формирование выборок осуществляется последовательно. Такие процессы формирования выборочных данных имеют место, например, при наблюдениях за подвижными объектами, анализе котировок ценных бумаг, изменения курса валюты и проч. Последовательная процедура формирования выборочных данных характеризуется, с одной стороны, постепенным развитием наблюдаемых процессов, а, с другой — требованием оперативного получения результата для текущего объема выборки по мере ее нарастания.

Подобные процедуры могут быть использованы и при решении задач проверки статистических гипотез. Проверка при этом осуществляется последовательно до момента принятия решения. Этот момент фиксирует достигнутый объем выборки. Процедура проверки гипотез с принятием решения по мере поступления данных наблюдений носит название **критерия Вальда** [4, 8].

Рассмотрим сущность критерия Вальда для проверки гипотезы $H_0 : \Theta = \Theta_0$ против альтернативы $H_1 : \Theta = \Theta_1$, где Θ — параметр распределения.

На каждом i -ом этапе (такте) наблюдений, имея на этот момент выборку $\mathbf{X}(i) = x_1, x_2, \dots, x_i$ объема i , вычисляют отношение функций правдоподобия

$$Z[\mathbf{X}(i)] = \frac{L[\mathbf{X}(i); \Theta_1]}{L[\mathbf{X}(i); \Theta_0]}$$

и проверяют двустороннее неравенство вида

$$B < Z[\mathbf{X}(i)] < A. \quad (4.21)$$

Здесь (B, A) — интервал значений $Z[\mathbf{X}(i)]$, причем $0 < B < 1 < A$.

Если $Z[\mathbf{X}(i)]$ находится внутри этого интервала, процесс наблюдений продолжается. Если хотя бы одно неравенство в (4.21) нарушается, наблюдения прекращают и принимают решение:

$$\begin{aligned} &\text{если } Z[\mathbf{X}(i)] \leq B, \text{ принимают гипотезу } H_0; \\ &\text{если } Z[\mathbf{X}(i)] \geq A, \text{ принимают гипотезу } H_1. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Номер такта n , при котором принимается одно из решений (4.22), определяет минимально необходимый для проверки гипотезы объем выборки.

Из (4.22) следует, что вероятности ошибок первого и второго рода для критерия Вальда равны

$$\alpha = P\{Z[\mathbf{X}(i)] \geq A \mid H_0\}; \beta = P\{Z[\mathbf{X}(i)] \leq B \mid H_1\}.$$

Показано^{*)}, что значения α и β для критерия Вальда можно оценить, вычисляя условные математические ожидания

$$M\{Z[X(n)] | H_0\} = \beta / (1 - \alpha); \quad M\{Z[X(n)] | H_1\} = (1 - \beta) / \alpha, \quad (4.23)$$

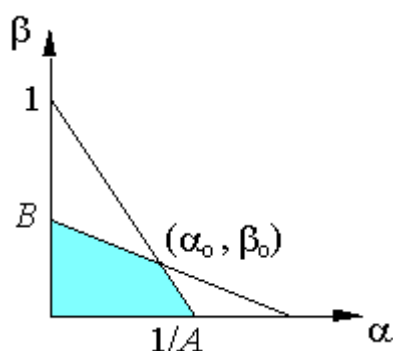
при условии, что на n -ом такте наблюдений (на котором наблюдения прекращены) принято одно из решений (4.22).

Для условных математических ожиданий (4.23) справедливы неравенства, аналогичные (4.22): $M\{Z[X(n)] | H_0\} \leq B$; $M\{Z[X(n)] | H_1\} \geq A$.

Поэтому соотношения (4.23) можно переписать в форме

$$\beta / (1 - \alpha) \leq B; \quad (1 - \beta) / \alpha \geq A \quad \text{или} \quad \beta \leq B(1 - \alpha); \quad \alpha \leq (1 - \beta) / A.$$

Последним неравенствам соответствует область значений β и α , выделенная заливкой на рисунке, представленном ниже.



Граничные прямые линии $\beta = B(1 - \alpha)$ и $\alpha = (1 - \beta) / A$ пересекаются в точке (α_0, β_0) , где $\alpha_0 = (1 - B) / (A - B)$; $\beta_0 = B(A - 1) / (A - B)$. Значения α_0 и β_0 часто используются на практике в качестве оценок вероятностей ошибок первого и второго рода для критерия Вальда.

Практика показала, что объемы выборок, полученные в результате применения критерия Вальда, обычно меньше, чем те объемы выборок, которые могут быть получены с использованием методики, описанной в следующем разделе. Нижние границы средних объемов испытаний для критерия Вальда могут быть определены по формулам [4]:

$$\begin{aligned} \bar{n}_0 &= \{ (1 - \alpha) \ln [(1 - \alpha) / \beta] + \alpha \ln [\alpha / (1 - \beta)] \} / L_0; \\ \bar{n}_1 &= \{ (1 - \beta) \ln [(1 - \beta) / \alpha] + \beta \ln [\beta / (1 - \alpha)] \} / L_1. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Здесь $\bar{n}_0$, $\bar{n}_1$ — средние объемы выборки, необходимые для построения оптимального критерия Вальда в случаях, когда справедливы гипотезы H_0 : $\Theta = \Theta_0$ и H_1 : $\Theta = \Theta_1$ соответственно; L_0 и L_1 — математические ожидания логарифма отношения функций распределения при истинности гипотезы H_0 и H_1 соответственно:

$$L_0 = M \left\{ \ln \frac{f_X(x; \Theta_0)}{f_X(x; \Theta_1)} | H_0 \right\}; \quad L_1 = M \left\{ \ln \frac{f_X(x; \Theta_1)}{f_X(x; \Theta_0)} | H_1 \right\}. \quad (4.25)$$

При получении конечных выражений для математических ожиданий (4.25) весьма удобно использовать возможности символьных вычислений Mathcad. Покажем это для случаев, когда выборочные данные имеют показательное (вариант I) и нормальное (вариант II) распределения.

Вариант I (показательное распределение)

Для показательного распределения имеем:

^{*)} Вальд А. Последовательный анализ. М.: Физматгиз. 1960. — 328 с.

$$\Theta = \lambda; f_X(x; \lambda) = \lambda \exp(-\lambda x); M(x) = 1/\lambda.$$

Поэтому логарифм отношения плотностей в выражении для L_0 равен

$$\ln [f_X(x; \Theta_0) / f_X(x; \Theta_1)] = \ln (\lambda_0 / \lambda_1) - \lambda_0 x + \lambda_1 x.$$

Тогда, для L_0 получаем: $L_0 = \ln (\lambda_0 / \lambda_1) - 1 + \lambda_1 / \lambda_0$.

Аналогично, для L_1 имеем: $L_1 = \ln (\lambda_1 / \lambda_0) - 1 + \lambda_0 / \lambda_1$.

Копия файла с получением этих выражений в Mathcad приведена ниже.

Вариант I . Показательное распределение		$f(\lambda, x) := \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot x)$
$l_0 := \ln \left(\frac{f(\lambda_0, x)}{f(\lambda_1, x)} \right) \quad l_1 := \ln \left(\frac{f(\lambda_1, x)}{f(\lambda_0, x)} \right)$	Логарифмы отношений в составе L_0 и L_1	
$l_0 \text{ expand} \rightarrow \ln(\lambda_0) - \lambda_0 \cdot x - \ln(\lambda_1) + \lambda_1 \cdot x$		
$l_0 \left \begin{array}{l} \text{expand} \\ \text{substitute, } x = \frac{1}{\lambda_0} \end{array} \right. \rightarrow \ln(\lambda_0) - 1 - \ln(\lambda_1) + \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$	Выражение для L_0	
$l_1 \left \begin{array}{l} \text{expand} \\ \text{substitute, } x = \frac{1}{\lambda_1} \end{array} \right. \rightarrow \ln(\lambda_1) - 1 - \ln(\lambda_0) + \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$	Выражение для L_1	

Для выполнения требуемых преобразований в Mathcad удобно предварительно задавать функцию пользователя (функцию, служащую ядром последующих выражений и записанную для произвольных параметров). В роли такой функции пользователя в данном случае выступает плотность показательного распределения (выделена заливкой в предыдущем mcd-файле).

При получении промежуточных и окончательных выражений использованы операторы символьных вычислений **expand** (раскрыть выражение) и **substitute** (подставить). Математические ожидания при вычислении L_0 и L_1 получены заменой переменной x на соответствующее математическое ожидание случайной величины с показательным распределением.

Вариант II (нормальное распределение)

Пусть дисперсия нормального распределения известна. Тогда в качестве проверяемого параметра выступает математическое ожидание: $\Theta_0 = m_0$, $\Theta_1 = m_1$. После преобразований, аналогичных тем, которые выполнялись в варианте I, получаем окончательные выражения для L_0 и L_1 в случае нормального распределения: $L_0 = L_1 = (m_1 - m_0)^2 / 2 \sigma^2$. Получение L_0 и L_1 для нормально распределенной выборки в среде Mathcad представлено в форме копии mcd-файла ниже.

Вариант II . Нормальное распределение

$$f(x, m) := \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2}} \cdot \exp \left[\frac{-(x - m)^2}{2 \cdot \sigma^2} \right]$$

Функция пользователя

$$l_0 := \ln \left(\frac{f(x, m_0)}{f(x, m_1)} \right) \quad l_1 := \ln \left(\frac{f(x, m_1)}{f(x, m_0)} \right)$$

Логарифмы отношений
в составе L_0 и L_1

$$l_0 \left| \begin{array}{l} \text{substitute, } x = m_0 \\ \text{expand} \end{array} \right. \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{m_0^2 - 2 \cdot m_0 \cdot m_1 + m_1^2}{\sigma^2}$$

Выражение для L_0

$$l_1 \left| \begin{array}{l} \text{expand} \\ \text{substitute, } x = m_1 \end{array} \right. \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{m_0^2 - 2 \cdot m_0 \cdot m_1 + m_1^2}{\sigma^2}$$

Выражение для L_1

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{m_0^2 - 2 \cdot m_0 \cdot m_1 + m_1^2}{\sigma^2} \text{ factor} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{|-m_0 + m_1|^2}{\sigma^2}$$

В процессе преобразований, как и в предыдущем варианте, вводится функция пользователя (выделена заливкой), а получение окончательных выражений выполняется с применением символьных операторов **expand** и **substitute**. Другая форма окончательного выражения получается дополнительным использованием оператора **factor**.

Приведенные иллюстрации служат дополнительным свидетельством удобства применения систем компьютерной математики при решении практических задач математической статистики.

4.4.4. Проверка гипотез на основе доверительных интервалов

При проверке параметрических гипотез может быть успешно использован анализ доверительных интервалов, построение которых рассмотрено в главе 3.

В рамках этого подхода нулевая гипотеза H_0 будет принята с доверительной вероятностью $(1 - \alpha)$, если гипотетическое значение параметра распределения попадет в доверительный интервал, и будет отвергнута на уровне значимости α в противном случае. Основанием для такого подхода служит отмеченное выше (см. разд. 4.2, 4.3) соответствие критических точек границ доверительного интервала.

Пример 4.6. Исследования серийно выпускаемых измерителей курса подвижного объекта показали наличие систематической погрешности со средним значением: $m = 2$ угл. мин. После планового усовершенствования датчика бы-

ло испытано $n = 17$ новых образцов. По полученным данным найдено выборочное среднее $\bar{x}_B = 2.3$ угл. мин и исправленная выборочная дисперсия $s^2 = (0.51 \text{ угл. мин})^2$. Возникает вопрос, можно ли объяснить полученное увеличение $\bar{x}_B$ по сравнению с m случайными флуктуациями выборочных данных или отклонение произошло в результате изменений, вызванных усовершенствованием датчика?

□ Решение. В качестве нулевой гипотезы выдвигаем $H_0: v = m$, т. е. предполагаем, что введенное усовершенствование незначимо для параметров инструментальной погрешности приборов. Альтернативной гипотезой будем считать $H_1: v > m$, т. е. усовершенствование изменило центр распределения погрешности.

В рассматриваемом случае статистика критерия значимости может быть выбрана в форме (3.32):

$$K = \frac{(\bar{x}_B - m) \cdot \sqrt{n}}{s}; \quad s = \sqrt{s^2}, \quad (4.26)$$

которая, согласно пояснениям, данным в разд. 3.4, распределена по закону Стьюдента с $(n - 1)$ степенями свободы. Полученная согласно условиям задачи точечная оценка ($\bar{x}_B = 2.3$) центра распределения позволяет выбрать правостороннюю критическую область с левой границей $k_{кр}$, которая выбирается из уравнения $P(K > k_{кр}) = \alpha$.

Уровень значимости примем равным $\alpha = 0.025$. При таком α попадание значения статистики (4.26) в критическую область $K > k_{кр}$ будет значимым и можно будет сделать вывод о том, что причиной выявленного отклонения, скорее всего, является именно усовершенствование прибора.

В рассматриваемом случае критическая точка определяется как квантиль $t_{0.975}(16)$ порядка 0.975 распределения Стьюдента с 16-ью степенями свободы.

С помощью встроенной функции **qt(0.975, 16)** Mathcad определяем

$$k_{кр} = t_{0.975}(16) = 2.12.$$

Доверительный интервал определяется неравенством:

$$K = [(\bar{x}_B - 2)/0.51] \sqrt{17} < 2.12 \text{ угл. мин.}$$

Отсюда получаем: $\bar{x}_B < 2.2622$. Это означает, что граничная точка $m_{гр}$ доверительного интервала соответствует $m_{гр} = 2.2622$.

На рис. 4.8 приведены результаты вычислений критического значения $k_{кр}$ и границы $m_{гр}$ доверительного интервала в среде Mathcad. Значение $k_{кр}$ получено с применением одного из видов вычислительного блока. Эти блоки, начинающиеся с ключевого слова **given**, предназначены для решения множества задач, связанных с решением линейных и нелинейных уравнений и систем уравнений, а также для поиска экстремумов. В данном примере вычислительный блок имеет выходную функцию **find**. Для получения решения в числовой форме с применением вычислительных блоков необходимо задавать начальное приближение. Взаимное расположение фрагментов вычислительного блока и смысловая сущность его отдельных элементов показаны на рис. 4.8.

<u>Определение критической точки</u>		<u>Проверка</u>
$k_{кр} := qt(0.975, 16)$	$k_{кр} = 2.12$	$pt(2.12, 16) = 0.975$
$\frac{(2.2622 - 2) \cdot \sqrt{n}}{0.51} = 2.12$		
<u>Определение границы доверительного интервала с помощью вычислительного блока</u>		
$x := 0$	<i>начальное приближение</i>	
Given	<i>ключевое слово</i>	
$\frac{(x - 2) \cdot \sqrt{n}}{0.51} = 2.12$	<i>решаемое уравнение</i>	
$m_{гр} := \text{Find}(x)$	$m_{гр} = 2.2622$	<i>результат</i>

Рис. 4.8. Вычисление $k_{кр}$ и $m_{гр}$ для примера 4.6

Доверительный интервал $(-\infty, 2.262)$ содержит искомый параметр с вероятностью 0.975. Значение $m = 2$ угл. мин попадает в этот доверительный интервал, поэтому нулевая гипотеза H_0 принимается. По результатам проверки есть основания полагать, что смещение выборочного среднего от гипотетического значения центра распределения вызвано случайными колебаниями выборочных данных и введенное усовершенствование приборов незначимо для принятых данных. Этот вывод делается на уровне значимости $\alpha = 0.025$, т. е. допускается возможность ошибки первого рода с вероятностью 0.025. ■

Задавая различные значения центра распределения, можно оценить вероятность β ошибок второго рода и мощность критерия $(1 - \beta)$. Значения β определяются из соотношений, аналогичных (4.9)—(4.11):

$$\beta = F_t \left[\frac{(m_{гр} - m^*) \cdot \sqrt{n}}{s} \right],$$

где F_t — функция распределения Стьюдента с $(n - 1)$ степенями свободы; m^* — смещенный относительно m центр распределения: $m^* = m + \rho$; $\rho > 0$.

Рисунок 4.9 содержит процедуру и результаты анализа значений β и $(1 - \beta)$ для примера 4.6. Эти значения сформированы (см. рис. 4.9) в виде элементов вектора при задании смещения в диапазоне от 2.0 до 2.5 с шагом 0.1.

В табл. 4.4 представлены результаты анализа вероятности ошибок второго рода и мощности критерия.

Полученные данные свидетельствуют о достаточно быстром повышении мощности критерия при увеличении степени различия гипотез H_0 и H_1 .

$$\begin{array}{llll}
n := 17 & s := 0.51 & m_{\text{гр}} := 2.2622 & \text{исходные данные} \\
i := 0..5 & m_i := 2 + 0.1 \cdot i & & \text{ввод вектора значений} \\
& & & \text{смещенных центров} \\
\beta_i := \text{pt} \left[\frac{|m_{\text{гр}} - m_i| \cdot \sqrt{n}}{s}, n - 1 \right] & & & \text{ввод вектора значений } \beta \\
\beta^T = (0.975 \quad 0.8959 \quad 0.689 \quad 0.3819 \quad 0.1409 \quad 0.0363) \\
(1 - \beta)^T = (0.025 \quad 0.1041 \quad 0.311 \quad 0.6181 \quad 0.8591 \quad 0.9637) \\
\text{pt} \left[\frac{|m_{\text{гр}} - 2| \cdot \sqrt{n}}{0.51}, n - 1 \right] = 0.975 & \text{pt} \left[\frac{|m_{\text{гр}} - 2.1| \cdot \sqrt{n}}{0.51}, n - 1 \right] = 0.8959
\end{array}$$

Рис. 4.9. Анализ значений β и $(1 - \beta)$ для примера 4.6

Таблица 4.4

	Значения β					
	$m^* = 2.0$	$m^* = 2.1$	$m^* = 2.2$	$m^* = 2.3$	$m^* = 2.4$	$m^* = 2.5$
β	0.975	0.8959	0.689	0.3819	0.1409	0.0363
$1 - \beta$	0.025	0.1041	0.311	0.6181	0.8591	0.9637

4.5. Определение объема выборки при проверке гипотез

В предыдущих разделах отмечалась важность повышения мощности критерия $(1 - \beta)$ для обеспечения его чувствительности и, в конечном итоге, повышения достоверности результата проверки статистических гипотез. При этом указывалось (см. разд. 4.3), что естественное стремление одновременно достичь малого уровня ошибок первого и второго рода может быть обеспечено лишь путем увеличения объема выборки n . Это объясняется тем, что величины α и β связаны; попытка снизить один из них (n — фиксировано) неизбежно сопровождается ростом другого (см. рис. 4.3).

Во многих задачах проверки статистических гипотез представляет интерес определить объем выборки, позволяющий обеспечить одновременное задание желаемых значений вероятностей α и β . Требование обеспечения заданных α и β может быть использовано несколькими способами, в том числе для:

- формирования двух уравнений для вероятностей α и β ; в качестве неизвестных в этих уравнениях будут выступать квантиль и объем выборки;
- формирования одного уравнения с неизвестным объемом выборки n ; это уравнение формируется на основе равенства квантилей гипотетического и альтернативного распределений порядков, например, α и $(1 - \beta)$ соответственно.

Объем выборки требуется оценить (в среднем) и при построении критерия Вальда, описанного в *разд. 4.4.3*; при этом минимально необходимые средние значения n определяются выражениями (4.24), (4.25).

Рассмотрим эти подходы более подробно, начиная с получения аналитического выражения для объема нормальной выборки.

Предположим, что изучается случайная величина $X \sim N(\nu, \sigma^2)$, имеется выборка объема n и требуется проверить гипотезу $H_0: \nu = m$ при альтернативе $H_1: \nu \neq m$ с сохранением закона распределения. При этом задаются: уровень значимости α , вероятность ошибки второго рода β и величина возможного смещения центра распределения $\rho > 0$. Значение σ предположим известным.

В качестве статистики критерия значимости примем выборочное среднее, распределение которого по условию задачи — нормальное с параметрами m и $\sigma / \sqrt{n}$. Таким образом, $K = \bar{x}_B \sim N(m, \sigma^2 / n)$. Принимая двустороннюю критическую область, определим критические точки по выражениям (4.8):

$$k_{1\text{кр}} = m + \frac{z_{\alpha/2} \sigma}{\sqrt{n}} = m - \frac{z_{1-\alpha/2} \sigma}{\sqrt{n}}; \quad k_{2\text{кр}} = m + \frac{z_{1-\alpha/2} \sigma}{\sqrt{n}}. \quad (4.27)$$

Здесь $z_{\alpha/2}$ и $z_{1-\alpha/2}$ — квантили порядков $\alpha/2$ и $1 - \alpha/2$ нормированного нормального распределения $N(0, 1)$, т. е. распределения случайной величины $z = [(\bar{x}_B - m) \sqrt{n} / \sigma]$.

По условиям задачи истинный центр распределения может быть равен $m^* = m \pm \rho$; $\rho > 0$. При этом выборочное среднее $\bar{x}_B \sim N(m^*, \sigma^2 / n)$, а нормированное выборочное среднее $z^* = [(\bar{x}_B - m^*) \sqrt{n} / \sigma] \sim N(0, 1)$.

Из анализа рис. 4.3, проведенного в *разд. 4.2*, следует, что для рассматриваемой задачи имеют место следующие утверждения:

- если $m^* = m + \rho$, то правая критическая точка выражается как

$$k_{2\text{кр}} = m + \rho + \frac{z_{\beta} \sigma}{\sqrt{n}}; \quad (4.28)$$

- если $m^* = m - \rho$, то левая критическая точка может быть выражена как

$$k_{1\text{кр}} = m - \rho + \frac{z_{1-\beta} \sigma}{\sqrt{n}}. \quad (4.29)$$

Выражения для одноименных критических точек из (4.27)—(4.29) можно использовать для получения уравнений, связывающих вероятности первого и второго рода между собой и с объемом выборки. Приведем эти уравнения:

$$\begin{aligned} \text{для } k_{1\text{кр}}: \quad m - \frac{z_{1-\alpha/2} \sigma}{\sqrt{n}} &= m - \rho + \frac{z_{1-\beta} \sigma}{\sqrt{n}}; \\ \text{для } k_{2\text{кр}}: \quad m + \frac{z_{1-\alpha/2} \sigma}{\sqrt{n}} &= m + \rho + \frac{z_{\beta} \sigma}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Учитывая симметричность нормированного нормального распределения относительно нуля, значения квантилей $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$; $z_{\beta} = -z_{1-\beta}$, поэтому полученные уравнения дают идентичные выражения для объема выборки n в зависимости от величин α и β . Это выражение имеет вид:

$$n = (z_{1-\alpha/2} + z_{1-\beta})^2 \cdot \sigma^2 / \rho^2. \quad (4.30)$$

Ближайшее большее целое, соответствующее результату вычисления (4.30), служит искомым объемом выборки. Используем полученные соотношения для решения типовой задачи в числах.

Пример 4.7. В рамках приведенной выше постановки определить объем нормальной выборки при $m = 10$, $\sigma = 2.0$, $\alpha = \beta = 0.05$, $\rho = 1$; проверить идентичность равенств (4.27)—(4.29) для одноименных критических точек. Проанализировать зависимости объема выборки от вероятностей α и β , а также от величины смещения ρ .

□ Решение. Решение в среде Mathcad приведено на рис. 4.10—4.12. Для определения требуемого объема выборки используем выражение (4.30), предварительно вычислив квантили $z_{1-\alpha/2}$ и $z_{1-\beta}$ с применением встроенной функции **qnorm**. Округление полученного значения до ближайшего большего целого выполнено с использованием функции **ceil**. Результатом решения для заданных параметров служит необходимый объем выборки $n = 52$.

$$\begin{aligned} \alpha &:= 0.05 & \beta &:= 0.05 & \rho &:= 1 & m &:= 10 & \sigma &:= 2 \\ q_1 &:= \text{qnorm}\left(1 - \frac{\alpha}{2}, 0, 1\right) & q_2 &:= \text{qnorm}(1 - \beta, 0, 1) \\ q_1 &= 1.96 & q_2 &= 1.645 \\ n &:= \frac{(q_1 + q_2)^2 \cdot \sigma^2}{\rho^2} & n &= 51.979 & \text{ceil}(n) &= 52 \\ k_1 &:= m - q_1 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} & k_2 &:= m + q_1 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ k_1 &= 9.456 & k_2 &= 10.544 \\ m - \rho + q_2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} &= 9.456 & m + \rho + \text{qnorm}(\beta, 0, 1) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} &= 10.544 \end{aligned}$$

Рис. 4.10. Определение объема выборки для примера 4.7

В нижней части рис. 4.10 вычислены значения критических точек $k_{1\text{кр}}$ и $k_{2\text{кр}}$, для чего использованы выражения (4.27)—(4.29). ■

Округление найденного объема выборки до ближайшего целого вызывает некоторое искажение значений α и β относительно заданных. Поэтому на за-

вершающем этапе решения задачи требуется корректировка значений критических точек. Она в данном случае будет заключаться в определении критических точек, обеспечивающих при $n = 52$ одновременное выполнение условий $\alpha = \beta = 0.05$. Процедура корректировки будет рассмотрена в примере 4.8.

На рис. 4.11, который представлен двумя частями одного mcd-файла, исследуется влияние вероятности ошибок второго рода β и смещения ρ на требуемые объемы выборки при двух значениях α ($\alpha = 0.05$; $\alpha = 0.02$). С этой целью (см. рис. 4.11,а) вводится функция двух переменных $n(\beta, \rho)$, которая вычисляется по формуле (4.30) при изменении β от 0.05 до 0.01 с шагом 0.01 для $\rho = 0.8$; 1.0; 1.2 при $\alpha = 0.05$ (левый график, рис. 4.11, б) и $\alpha = 0.02$ (правый график, рис. 4.11, б).

$$\begin{aligned} \sigma &:= 2 & \alpha &:= 0.05 & m &:= 10 \\ q_1 &:= \text{qnorm}\left(1 - \frac{\alpha}{2}, 0, 1\right) & q_2 | \beta &:= \text{qnorm}(1 - \beta, 0, 1) \\ n | \beta, \rho &:= \frac{(q_1 + q_2 | \beta |)^2 \cdot \sigma^2}{\rho^2} & n(0.05, 1) &= 51.979 \end{aligned}$$

Рис. 4.11, а. Формирование функции $n(\beta, \rho)$ для примера 4.7

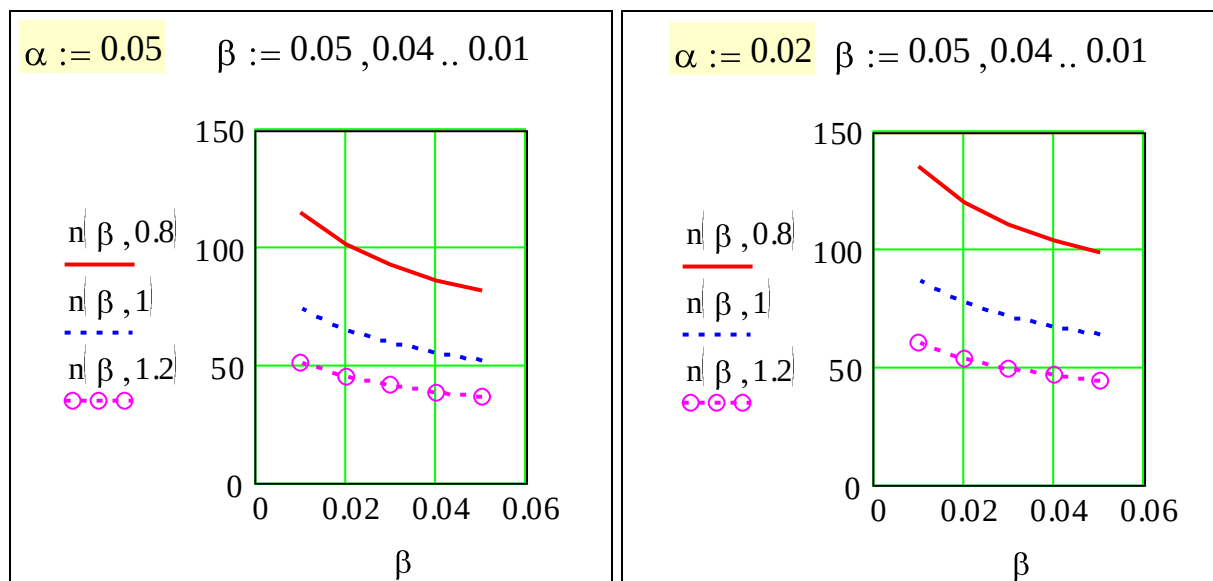


Рис. 4.11, б. Зависимость объема выборки от β и α для примера 4.7

Графики (см. рис. 4.11) наглядно показывают, как растет величина требуемого объема выборки при уменьшении значений β (повышении мощности критерия). Как отмечалось ранее, увеличение различий между нулевой и альтернативной гипотезами способствует повышению мощности критерия и достоверности принятия решения. В нашем примере различие гипотез моделируется величиной смещения ρ . Требуемый для достижения того же значения β

объем выборки при росте ρ может быть снижен; например, $n(0.01, 0.8) \approx 120$, $n(0.01, 1.0) \approx 71$, $n(0.01, 1.2) \approx 52$ ($\alpha = 0.05$). Попытка уменьшить вероятность α при прочих равных сопровождается ростом требуемого объема выборки (см. правый график рис. 4.11).

Результаты рис. 4.11, представленные в графической форме, удобно вывести в виде соответствующей таблицы, с помощью которой можно дать количественную оценку степени влияния отдельных параметров выражения (4.30) на объем выборки. Такая таблица приведена на рис. 4.12.

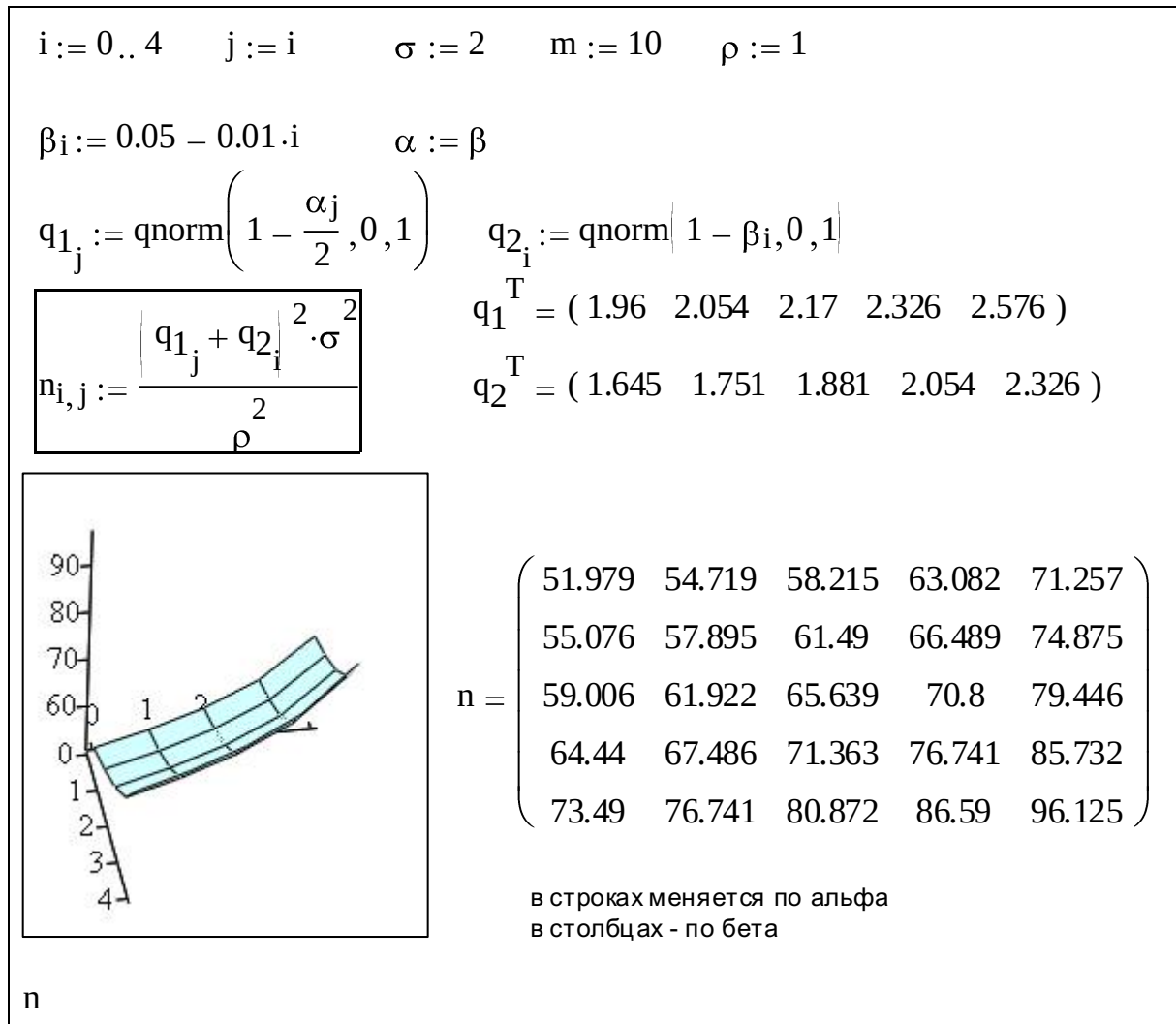


Рис. 4.12. Значения матрицы **n** объемов выборки для примера 4.7

При одновременном изменении значений α и β для фиксированной величины смещения ρ , функции $n(\beta, \alpha)$ соответствует поверхность, изображенная на рис. 4.12 для $\rho = 1$ и одинаковых α и β , меняющихся в диапазоне от 0.05 до 0.01 с шагом 0.01.

Этой поверхности соответствует матрица **n** (см. рис. 4.12) значений объемов выборки как функции параметров α и β . Строки этой матрицы образованы при фиксированных значениях β , а столбцы — при фиксированных α . Значения элементов матрицы **n** иллюстрируют взаимозависимости n , α и β .

Следует отметить, что выражение (4.30), использованное в последнем примере, было получено как решение одного уравнения с одним неизвестным. Для записи этого уравнения использовалось равенство критических точек.

Однако аналитические выражения, аналогичные (4.30), могут быть получены лишь в простейших случаях (известное простое распределение). Подавляющее большинство задач определения n в прикладной статистике связано с анализом специальных распределений (например, гамма-распределение, распределение Эрланга и проч.) требуют привлечения численных методов. При решении подобных задач исключительно полезно применять системы компьютерной математики, которые снимают множество ограничений при попытке добиться конечного результата, обеспечивая простоту решения.

Основанием для привлечения численных методов служит возможность формирования уравнения для n на основе равенства квантилей или путем составления выражений для заданных вероятностей α и β .

Проиллюстрируем эти возможности для условий примера 4.7. Ранее отмечалось, что значения критических точек (4.27)—(4.29) могут быть получены также (см. разд. 4.2, 4.3) непосредственным вычислением квантилей $K_{\alpha/2}$, $K_{1-\alpha/2}$ порядков $\alpha/2$ и $1-\alpha/2$ распределения $N(m, \sigma^2/n)$ и квантилей $K_{1-\beta}$, K_{β} распределения $N(m+\rho, \sigma^2/n)$. Поэтому уравнения для нахождения объема выборки могут формироваться на основе равенства соответствующих квантилей при условии $n = n^*$, где n^* — объем выборки, удовлетворяющий заданным значениям α и β .

Для условий примера 4.7 эти уравнения имеют вид: $K_{\alpha/2}(n^*) = K_{1-\beta}(n^*)$ при $\rho < 0$ и $K_{1-\alpha/2}(n^*) = K_{\beta}$ при $\rho > 0$. Значения этих квантилей для ранее найденного (см. рис. 4.10) значения $n^* = 51.959$, полученные в Mathcad с помощью встроенной функции **qnorm**, приведены на рис. 4.13. В верхней строке (см. рис. 4.13) введены прежние исходные данные, а значение n^* выделено заливкой. В трех последних строках производится пересчет квантилей (обозначенных в файле q_1 и q_2) нормированного нормального распределения в квантили тех же уровней гипотетического и альтернативного распределений с использованием выражений, следующих из соотношения $z = [(\bar{x}_B - m) \sqrt{n} / \sigma]$.

Данные рис. 4.13 подтверждают возможность формирования уравнений на основе равенства соответствующих квантилей. Такие уравнения сформированы и решены на рис. 4.14 (изображен фрагмент, являющийся продолжением mcd-файла на рис. 4.13). Уравнения решаются с применением вычислительных блоков, характерным признаком которых служат ключевые слова **Given** и **Find**, а также необходимость предварительного указания начальных приближений для искомых переменных.

Первое уравнение (помеченное на рис. 4.14 символом I) учитывает равенство квантили $K_{1-\alpha/2}$ распределения $N(m, \sigma^2/n)$ и квантили K_{β} распределения $N(m+\rho, \sigma^2/n)$.

$$\begin{aligned}
\alpha &:= 0.05 & \beta &:= 0.05 & n &:= 51.979 & m &:= 10 & \sigma &:= 2 & \rho &:= 1 \\
\text{qnorm}\left(1 - \frac{\alpha}{2}, 10, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &= 10.544 & \text{qnorm}\left(\beta, 10 + \rho, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &= 10.544 \\
\text{qnorm}\left(\frac{\alpha}{2}, 10, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &= 9.456 & \text{qnorm}\left(1 - \beta, 10 - \rho, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &= 9.456 \\
q_1 &:= \text{qnorm}\left(1 - \frac{\alpha}{2}, 0, 1\right) & q_2 &:= \text{qnorm}\left(1 - \beta, 0, 1\right) \\
q_1 &= 1.96 & q_2 &= 1.645 \\
q_1 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + m &= 10.544 & q_2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + m - \rho &= 9.456
\end{aligned}$$

Рис. 4.13. Значения квантилей для примера 4.7

I	$n := 1$ Given $\text{qnorm}\left(1 - \frac{\alpha}{2}, 10, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \text{qnorm}\left(\beta, 10 + \rho, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ Find(n) = 51.979
II	$n := 1$ Given $\text{qnorm}\left(\frac{\alpha}{2}, 10, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \text{qnorm}\left(1 - \beta, 10 - \rho, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ Find(n) = 51.979
III	$n := 1 \quad x := 0$ Given $\text{pnorm}\left(x, 10, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ $\text{pnorm}\left(x, 10 + \rho, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \beta$ Find(x, n) = $\begin{pmatrix} 10.544 \\ 51.979 \end{pmatrix}$

Рис. 4.14. Численное решение примера 4.7

Второе уравнение (II) образовано равенством квантилей $K_{\alpha/2}$ и $K_{1-\beta}$ распределений $N(m, \sigma^2/n)$ и $N(m-\rho, \sigma^2/n)$ соответственно. Решения, естественно, совпадают с полученными ранее. В третьем варианте (см. III на рис. 4.14)) для получения решения сформированы два уравнения, первое из которых опреде-

ляется заданным уровнем α вероятности ошибок первого рода, а второе — заданным значением β вероятности ошибок второго рода. Неизвестны значение критической точки $k_{2кр}$ и требуемый объем выборки n^* , обеспечивающий $\alpha = \beta = 0.05$ для положительного смещения центра распределения, поэтому перед вычислительным блоком вводится два начальных приближения. Решение (выделено заливкой) в этом случае получается в виде двумерного вектора со значениями $k_{2кр}$ и n^* , совпадающими с полученными ранее другими способами (см. рис. 4.10, 4.13). Кроме встроенной функции **qnorm** для вычисления квантилей при решении применена также функция **pnorm** для вычисления функций распределений.

При решении задач рассматриваемого класса с применением СКМ часто встречаются распределения, не входящие в перечень, учтенный в СКМ и обеспеченный встроенными функциями. Это, однако, не ограничивает возможностей практического применения СКМ в этом классе задач и не служит препятствием для получения решений. В частности, применение Mathcad позволяет решать подобные задачи при произвольных распределениях критерия значимости, для чего в уравнениях (см. рис. 4.14), встроенные функции следует заменить аналитическими зависимостями.

Пример 4.8. Наблюдаются независимые случайные величины, имеющие показательный закон распределения с плотностью вероятности

$$f_X(x; \lambda) = \lambda \exp(-\lambda x).$$

При проверке гипотезы $H_0 : \lambda = \lambda_0$ против альтернативы $H_1 : \lambda = \lambda_1$; $\lambda_1 > \lambda_0$, определить объем выборки, обеспечивающий вероятности ошибок первого и второго рода $\alpha = \beta = 0.01$. При расчетах принять $\lambda_0 = 0.1$, $\lambda_1 = 0.2$.

□ Решение. Из *разд. 4.4.1* следует, что в качестве статистики критерия значимости в данном случае можно принять сумму выборочных данных S_n

$$= \sum_{i=1}^n x_i \text{ или (второй вариант) — выборочное среднее } \bar{x}_B = \sum_{i=1}^n x_i / n.$$

Случайная величина S_n имеет гамма-распределение $\Gamma(\lambda, n)$ с плотностью

$$f_X(x) = \left\{ \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} \exp(-\lambda x) \text{ при } x \geq 0 ; 0 \text{ при } x < 0 \right\}. \quad (4.31)$$

Отсюда следует (см. *разд. 5.7, ч. I, прил. 13*), что выборочное среднее $\bar{x}_B$ экспоненциально распределенной выборки объема n имеет гамма-распределение $\Gamma(\lambda n, n)$ с плотностью

$$f_X(u) = \left\{ \frac{(\lambda n)^n}{(n-1)!} u^{n-1} \exp(-\lambda n u) \text{ при } u \geq 0 ; 0 \text{ при } u < 0 \right\}. \quad (4.32)$$

Выбирая, например, $S_n = \sum_{i=1}^n x_i$ в качестве статистики критерия, для случая

$\lambda_1 > \lambda_0$, получаем условие (4.18) в форме $P\{S_n \leq C \mid H_0\} = 1 - \alpha$, т. е. константа

C — квантиль порядка $(1 - \alpha)$ распределения $\Gamma(\lambda_0, n)$ будет служить в данном случае правой границей левосторонней критической области.

При использовании в качестве статистики выборочного среднего $\bar{x}_B$ имеем условие (4.18) в форме $P\{\bar{x}_B \leq C_1 | H_0\} = 1 - \alpha$, т. е. константа C_1 — квантиль порядка $(1 - \alpha)$ распределения $\Gamma(\lambda_0, n)$, причем $n C_1 = C$.

Рассматриваемая задача имеет только численное решение, для получения которого должны быть сформированы два уравнения, аналогичные уравнениям варианта III в примере 4.7 (см. рис. 4.14). В данном примере, учитывая сдвиг плотности альтернативного распределения влево ($\lambda_1 > \lambda_0$) от гипотетического, используем два уравнения — для вероятностей α и $(1 - \beta)$ — с двумя неизвестными (квантиль C и объем выборки n^*). Решение в среде Mathcad осуществляется в рамках вычислительных блоков (рис. 4.15—4.17). В каждом из вариантов статистик используется предварительный ввод функции пользователя, в качестве которой выступает плотность распределения (4.31) или (4.32), выделенная рамкой на рис. 4.15 и 4.17. В знаменателях плотностей распределений на этих рисунках введена гамма-функция $\Gamma(n) = (n - 1)!$.

$\lambda_0 := 0.1$	$\lambda_1 := 0.2$	$\alpha := 0.1$	$\beta := 0.1$
$x := 0$	$n := 1$	$f(\lambda, t, n) := \frac{\lambda^n \cdot t^{n-1} \cdot e^{-\lambda \cdot t}}{\Gamma(n)}$	
Given $\alpha = \int_0^x f(\lambda_0, t, n) dt \quad 1 - \beta = \int_0^x f(\lambda_1, t, n) dt$			
Find(x, n) = $\begin{pmatrix} 95.01809 \\ 14.03892 \end{pmatrix}$			

Рис. 4.15. Численное решение примера 4.8 (статистика S_n)

На рис. 4.15 с применением описанного подхода получено решение для статистики $S_n = \sum_{i=1}^n x_i$: $C = 95.01809$, $n^* = 14.03892$. Таким образом, при про-

верке гипотез следует принять объем выборки $n = 15$. Значения α и $(1 - \beta)$ при полученных значениях n^* и C вычисляются на рис. 4.16 (представлена копия фрагмента mcd-файла, начало которого показано на рис. 4.15). Там же изображены графики плотностей гипотетического и альтернативного распределений. Центр альтернативного распределения равен $n / \lambda_1 = \sim 70$; центр гипотетического распределения $n / \lambda_0 = \sim 140$.

Округление n и C до значений 15 и 95 вызовет некоторое изменение результирующих значений α и β относительно заданных. Анализ показывает,

что при $C = 95$, $n = 15$ получаются $\alpha \approx 0.06$, $1 - \beta \approx 0.85$. Корректировку решения, вызванную этим фактом, легко осуществить на основе рис. 4.16. В результате корректировки окончательное значение критической точки, обеспечивающей при $n = 15$ заданные значения α и β , равно: $C^0 \approx 103$.

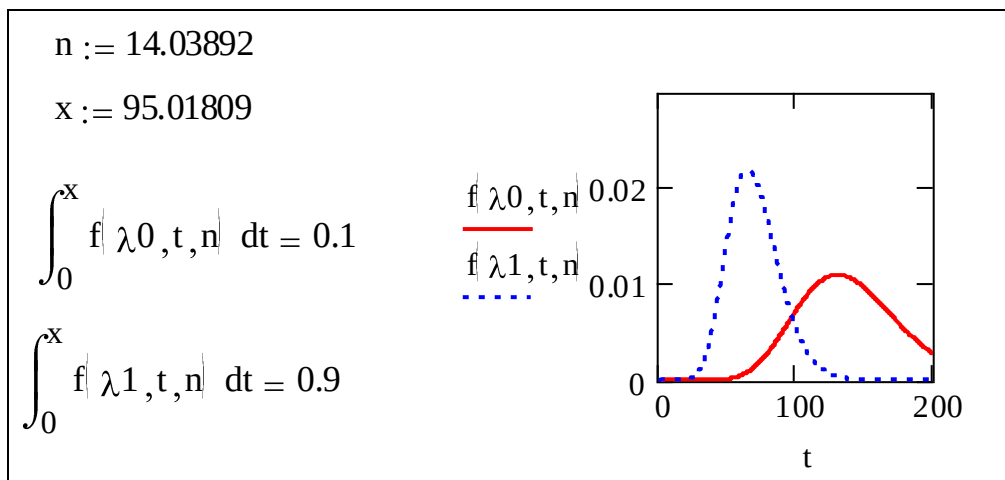


Рис. 4.16. Значения α и $(1 - \beta)$ по результатам решение примера 4.8

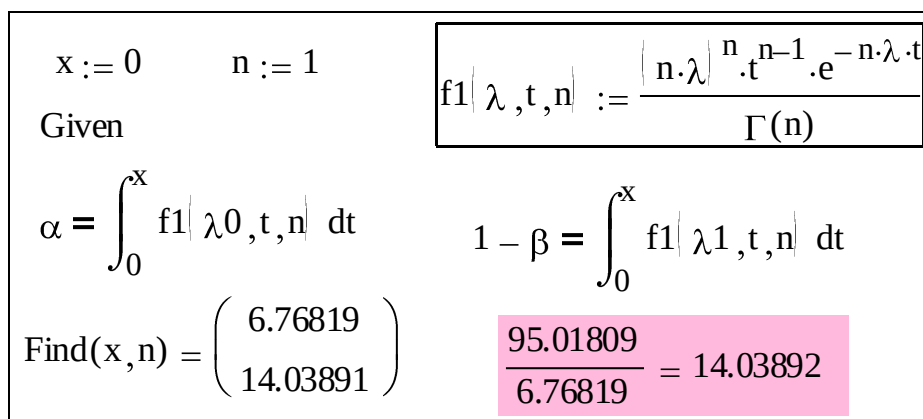


Рис. 4.17. Численное решение примера 4.8 (статистика $\bar{x}_B$)

Рисунок 4.17 иллюстрирует аналогичное решение, выполненное для статистики критерия значимости $\bar{x}_B$, имеющей распределение (4.32). В результате получается тот же объем выборки n^* и критическая точка $C_1 = 6.76819$, значение которой, в силу указанного выше соотношения $nC_1 = C$, в $n^* = \sim 14.039$ раз меньше ранее полученной $C = 95.01809$. Эта проверка выделена на рис. 4.17 заливкой. ■

Решение примера 4.8 (см. рис. 4.15, 4.17) служит одним из вариантов, которые могут быть применены в задачах подобного класса при произвольных законах распределения статистики критерия значимости. Для достижения решения потребовалось лишь задать аналитические выражения плотностей вероятностей.

Отметим, однако, что группа распределений, входящих в совокупность гамма-распределений, учтена в системах Mathcad и имеет, поэтому, набор не-

обходимых встроенных функций. Так, в системе предусмотрены встроенные функции **qgamma**, **dgamma**, **pgamma** и **rgamma** для вычисления квантилей, плотности вероятности, функции распределения и получения независимых случайных чисел для случайной величины Y_0 , имеющей однопараметрическое гамма-распределение $\Gamma(1, n)$ с плотностью вида:

$$f_{Y_0}(y_0) = \left\{ \frac{1}{(n-1)!} y_0^{n-1} \exp(-y_0) \text{ при } y_0 \geq 0 ; 0 \text{ при } y_0 < 0 \right\}. \quad (4.33)$$

Из этого распределения достаточно просто получить двухпараметрические распределения, соответствующие выражениям (4.31) и (4.32).

В прил. 13 показано, что случайные величины X , U и Y_0 с плотностями (4.31), (4.32) и (4.33) связаны между собой соотношениями:

$$Y_0 = \lambda X, U = X / n, U = Y_0 / \lambda n. \quad (4.34)$$

Аналогичные соотношения имеют и квантили одинаковых порядков для распределений величин (4.34). Это позволяет получать квантили распределений (4.31) и (4.32) из квантилей распределения (4.33).

Так, квантиль распределения (4.32) случайной величины $U = Y_0 / \lambda n$ может быть получен делением квантили распределения (4.33) на произведение λn . Квантиль распределения (4.31) случайной величины $X = Y_0 / \lambda$ получим делением квантили распределения (4.33) на λ . На этой основе может быть реализован еще один способ решения рассмотренной в примере 4.8 задачи.

Например, соотношения (4.34) позволяют формировать уравнения на основе равенства квантилей уровня α гипотетического распределения и квантилей уровня $(1 - \beta)$ альтернативного распределения и получать их решение в рамках вычислительных блоков (рис. 4.18) аналогично тому, как это делалось в двух первых вариантах (см. рис. 4.14) при решении примера 4.7.

Сформированное уравнение (см. рис. 4.18) с неизвестным объемом выборки выделено рамкой. С помощью функции **qgamma** вычисляются соответствующие квантили распределения (4.33), из которых делением на соответствующие произведения λn получаем квантили распределения (4.32). Результирующее значение $n^* = 14.0389$, конечно, совпадает с полученным ранее.

$n := 1$	$\alpha := 0.1$	$\beta := 0.1$	$\lambda_0 := 0.1$	$\lambda_1 := 0.2$
Given	$\frac{1}{n \cdot \lambda_0} \cdot \text{qgamma}(\alpha, n) = \frac{1}{n \cdot \lambda_1} \cdot \text{qgamma}(1 - \beta, n)$			
Find(n) = 14.0389				

Рис. 4.18. Вариант решения примера 4.8 (статистика x_B)

Пример 4.9. В условиях примера 4.7 определить средний объем выборки, необходимый для построения оптимального критерия Вальда. Сопоставить это значение со значением, полученным по выражению (4.30) для случая односторонней критической области ($m_0 = 10$, $m_1 = 11$, $\sigma = 2.0$, $\alpha = \beta = 0.05$).

□ **Решение.** Средние объемы выборки при построении оптимального критерия Вальда определяются по выражениям (4.24) и (4.25), которые были введены в разд. 4.4.3. Там же для случая нормальной выборки были получены соотношения для L_0 и L_1 — математических ожиданий логарифмов отношений функций распределения при истинности гипотез $H_0: m = m_0$ и $H_1: m = m_1$ соответственно ($m_1 - m_0 = \rho$). Воспользуемся этими соотношениями для ответа на поставленный вопрос. Решение (Mathcad) представлено на рис. 4.19.

$$\begin{array}{l}
 \alpha := 0.05 \quad \beta := 0.05 \quad \rho := 1 \quad m := 10 \quad \sigma := 2 \\
 q_1 := \text{qnorm} \left(1 - \alpha, 0, 1 \right) \quad q_2 := \text{qnorm} \left(1 - \beta, 0, 1 \right) \\
 \quad \quad \quad q_1 = 1.645 \quad q_2 = 1.645 \\
 n := \frac{(q_1 + q_2)^2 \cdot \sigma^2}{\rho^2} \quad n = 43.289 \quad \boxed{\text{ceil}(n) = 44} \\
 m_0 := 10 \quad m_1 := 11 \quad L_0 := \frac{1}{2} \cdot \frac{(m_1 - m_0)^2}{\sigma^2} \quad L_0 = 0.125 \\
 v_0 := \frac{(1 - \alpha) \cdot \ln \left(\frac{1 - \alpha}{\beta} \right) + \alpha \cdot \ln \left(\frac{\alpha}{1 - \beta} \right)}{L_0} \\
 \quad \quad \quad v_0 = 21.2 \quad \frac{44}{v_0} = 2.075
 \end{array}$$

Рис. 4.19. Решение примера 4.9

В верхней части рис. 4.19 по выражению (4.30), записанному для случая правосторонней критической области, определен объем выборки из условий $\alpha = \beta = 0.05$. Этот объем получился равным 44. В нижней части рис. 4.19 по выражениям (4.24) и (4.25) определен средний объем, необходимый для построения оптимального критерия Вальда при заданных параметрах. Он получился равным 21.2. Таким образом, применение критерия Вальда в данном случае обеспечивает сокращение объема выборки примерно в 2 раза. ■

Пример 4.10. В условиях примера 4.8 определить средний объем выборки, необходимый для построения оптимального критерия Вальда, и сопоставить его со значением, полученным по выражению (4.30) для $\lambda_0 = 0.1$, $\lambda_1 = 0.2$, $\alpha = \beta = 0.01$.

□ **Решение.** Решение в среде Mathcad представлено на рис. 4.20. Определение средних объемов выборки при $\lambda = \lambda_0$ и $\lambda = \lambda_1$ производится (см. рис. 4.20) с применением выражений (4.24), (4.25) и уточнений, рассмотренных в разд. 4.4.3 для случая выборки с показательным распределением. Эти объемы получены равными ~ 5.7 и ~ 9.1 .

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 := 0.2 \quad \lambda_0 := 0.1 \quad \alpha := 0.1 \quad \beta := \alpha \\
& L_0 := \ln\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right) - 1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \quad L_1 := \ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) - 1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \\
& M_0 := (1 - \alpha) \cdot \ln\left(\frac{1 - \alpha}{\beta}\right) + \alpha \cdot \ln\left(\frac{\alpha}{1 - \beta}\right) \quad L_0 = 0.307 \\
& M_1 := (1 - \beta) \cdot \ln\left(\frac{1 - \beta}{\alpha}\right) + \beta \cdot \ln\left(\frac{\beta}{1 - \alpha}\right) \quad L_1 = 0.193 \\
& \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad M_0 = 1.758 \\
& \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad M_1 = 1.758 \\
& \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \frac{M_0}{L_0} = 5.728 \quad \frac{M_1}{L_1} = 9.101 \\
& \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \frac{15}{5.728} = 2.619 \quad \frac{15}{9.101} = 1.648
\end{aligned}$$

Рис. 4.20. Решение примера 4.10

Ранее в примере 4.8 (см., например, рис. 4.18) было получено $n^* \approx 14.04$, т. е. требуемый из условия $\alpha = \beta = 0.01$ объем выборки равен 15. Таким образом, при использовании последовательного критерия Вальда для заданных параметров может быть обеспечен выигрыш в объеме испытаний, составляющий ~ 2.62 и ~ 1.65 при $\lambda = \lambda_0$ и $\lambda = \lambda_1$ соответственно. ■

4.6. Проверка гипотез о виде распределения

Вид закона распределения изучаемых случайных величин важно знать в подавляющем большинстве исследований, связанных с использованием методов теории вероятностей и математической статистики. Задачи проверки гипотез о законах распределений составляют, поэтому, весьма обширный класс задач статистического анализа.

Ранее, при рассмотрении гистограмм (см. разд. 1.4), отмечалось, что на основе визуального анализа построенной гистограммы, путем сопоставления ее с теоретическими плотностями вероятностей, можно сделать предварительное заключение о предполагаемом виде закона распределения. Но это заключение нельзя считать окончательным, поскольку различные законы распределения могут иметь близкие по форме плотности вероятностей (например, нормальное распределение и распределение Стьюдента, распределение хи-квадрат и распределение Фишера); при больших объемах выборок многие распределения близки к нормальному распределению. Поэтому необходимо иметь более точный аппарат, процедуру, с помощью которой можно было бы достаточно надежно устанавливать закон распределения по выборочным данным.

Существует много подходов к решению задач проверки гипотез о виде распределения. Эти подходы используют различные правила проверки, свя-

занные с формулировкой критерия согласия или критерия соответствия экспериментальным данным выдвинутого (гипотетического) предположения о виде распределения. Другими словами, критерий согласия позволяет оценить меру соответствия (или расхождения) выдвинутого предположения с данными, полученными в результате экспериментов. Среди критериев согласия получили распространение критерий хи-квадрат (К. Пирсона—Р. Фишера), критерий А. Н. Колмогорова, критерий омега-квадрат, критерий Н. В. Смирнова, критерий Вилкокса и другие критерии. Рассмотрим эти критерии, останавливаясь более подробно на наиболее распространенных из них.

4.6.1. Критерий хи-квадрат

Наибольшее распространение получила процедура, основанная на критерии согласия К. Пирсона (1900 г.). Эта процедура была разработана для задач проверки гипотез о виде распределения с известными параметрами.

Уточнение, позволяющее распространить эту процедуру на случай неизвестных параметров распределения, было сделано Р. Фишером (1924 г.). Опуская промежуточные варианты, приведем процедуру проверки с использованием критерия χ^2 (хи-квадрат) в окончательной форме.

Проверка содержит ряд последовательных этапов, совокупность которых можно рассматривать в качестве правила проверки (или алгоритма проверки с помощью компьютера). Перечислим эти этапы:

1. Выдвигается гипотеза H_0 о законе распределения случайной величины с функцией распределения $F(x)$. В качестве альтернативной гипотезы H_1 рассматривается любой другой закон распределения. Для проверки используется выборка объема n .

2. Область изменения случайной величины X разбивается на l непересекающихся промежутков $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_l$ с граничными точками $h_1 < h_2, \dots < h_{l-1}$. В общем случае, когда значения случайной величины X занимают всю числовую ось, промежутки Δ_i ($i = \overline{1, l}$) соответствуют отрезкам $(-\infty, h_1], (h_1, h_2], \dots, (h_{l-1}, +\infty)$. Крайние промежутки в этом случае — полубесконечные, остальные (и первый) — полуоткрытые. Промежутки могут быть как одинаковыми, так и различными. Для определения ширины равных промежутков могут быть использованы выражения (1.18), (1.19), приведенные в разд. 1.4 применительно к построению гистограмм.

3. Определяются ожидаемые (теоретические) частоты n_i' попадания выборочных значений в промежутки, для чего:

- используя гипотетическую функцию распределения $F(x)$, определяют вероятности p_i попаданий в промежутки Δ_i ($i = \overline{1, l}$); $\sum_i p_i = 1$.

- находят значения теоретических частот n_i' путем умножения полученных вероятностей p_i на объем выборки n : $n_i' = p_i n$, причем $\sum_i n_i' = n$.

4. Определяются наблюдаемые частоты n_i ($\sum_i n_i = 1$) попаданий элементов выборки в промежутки Δ_i ($i = \overline{1, l}$). При построении графиков (гистограмм) эти частоты обычно относят к серединам промежутков.

5. Вычисляется выборочное значение критерия согласия К. Пирсона

$$\chi^0 = \sum_{i=1}^l \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}. \quad (4.35)$$

К. Пирсон показал [8, 9], что в случае, когда проверяемый закон распределения не имеет неизвестных параметров, случайная величина (4.35) асимптотически распределена по закону хи-квадрат с $(l - 1)$ степенями свободы независимо от вида проверяемого закона распределения.

Функция (4.35) зависит от частот n_i , связанных равенством $\sum_i n_i = 1$. Для случая, когда проверяемое распределение не имеет неизвестных параметров, это означает, что число независимых аргументов (число степеней свободы) функции (4.35) составляет $(l - 1)$. Если имеет место вариант с неизвестными параметрами распределения, то при расчетах эти параметры заменяются своими точечными оценками. Этот случай был рассмотрен Р. Фишером, который подтвердил принадлежность асимптотического распределения случайной величины (4.35) закону хи-квадрат и установил, что число степеней свободы в общем случае составляет

$$ss = l - 1 - r, \quad (4.36)$$

где r — число неопределенных параметров, оцениваемых по выборочным данным. Для нормального распределения с неопределенными параметрами ($r = 2$) число степеней свободы определяется выражением $ss = l - 3$; для показательного распределения или распределения Пуассона с единственным неизвестным параметром ($r = 1$), $ss = l - 2$.

6. Задавая значение α и применяя правостороннюю критическую область, определяем критическую точку $k_{кр}$ как квантиль $\chi^2_{1-\alpha}(ss)$ порядка $(1 - \alpha)$ распределения хи-квадрат с ss степенями свободы:

$$k_{кр} = \chi^2_{1-\alpha}(ss).$$

7. Сопоставляя значение $k_{кр}$ со значением статистики (4.35), принимаем решение:

° при $\chi^0 < k_{кр}$ — проверяемая гипотеза H_0 согласуется с выборочными данными и она принимается;

° при $\chi^0 \geq k_{кр}$ — гипотеза H_0 противоречит выборочным данным, она отклоняется в пользу альтернативной гипотезы на уровне значимости α и процедура проверки начинается снова при другой нулевой гипотезе. Если решение об отклонении H_0 принято при достаточно близких значениях χ^0 и $k_{кр}$, перед переходом к проверке других нулевых гипотез целесообразно повторить проверку H_0 , с увеличенным (например, в несколько раз) объемом выборки.

При этом (см. разд. 4.3 и 4.4) мощность критерия увеличивается и повышается его чувствительность, т. е. способность различать ситуации.

Касаясь вопросов практического применения критерия хи-квадрат, следует отметить, что этот критерий обладает достаточной чувствительностью при больших объемах выборки. Более того, гарантией достоверности результатов проверки с использованием этого критерия служит требование, чтобы теоретические частоты $n_i' = p_i n$ ($i = \overline{1, l}$) удовлетворяли условиям $n_i' \geq 5$. При меньших значениях n_i' следует объединять соседние промежутки или увеличивать их ширину при разбиении диапазона изменения случайной величины X на одинаковые промежутки. Требование $n_i' \geq 5$ диктуется требованием близости величин $(n_i - n_i')/\sqrt{n_i'}$, квадраты которых составляют сумму (4.35), к нормированным нормальным. Сумма квадратов таких величин будет иметь распределение хи-квадрат (см. прил. 9).

При проверке гипотезы о нормальном распределении иногда используется упрощенная процедура проверки, в которой выборка заменяется группированным статистическим рядом (см. разд. 1.2). Она вызвана стремлением избежать выполнения больших объемов вычислений, связанных с операциями над выборками больших объемов, а также с пересчетом квантилей и функций гипотетического распределения к нормированному нормальному распределению, таблицы значений для которого имеются во множестве источников.

Упрощенная процедура в целом соответствует описанным выше семи пунктам правила проверки. Изменения касаются лишь способа определения теоретических частот n_i' (п. 3 правил), сущность которого рассматривается ниже для случаев равных промежутков (случай (а)) и для различных промежутков (случай (б)).

Первоначально находятся середины промежутков h_{icp} , которым соответствуют наблюдаемые частоты n_i ; по этим элементам группированного статистического ряда с помощью выражений (1.5), (1.10) определяются значения выборочного среднего $\bar{x}_B$ и СКО σ_B .

- В случае (а), т. е. при $\Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_l$:

- ° определяются вероятности p_i попаданий в промежутки Δ_i ($i = \overline{1, l}$).

Поскольку $p_i = P(X \in \Delta_i)$, то для определения этих вероятностей вводится вспомогательная случайная величина

$$z_i^* = (h_i - \bar{x}_B)/\sigma_B \quad (4.37)$$

с гипотетической функцией распределения $F(x)$, причем вероятности p_i попаданий могут быть найдены из соотношений

$$p_1 = F(z_1^*), p_2 = F(z_2^*) - F(z_1^*), \dots, p_l = 1 - F(z_{l-1}^*); \sum_i p_i = 1.$$

- ° определяются теоретические частоты n_i' попадания путем умножения вероятностей p_i на объем выборки n : $n_i' = p_i n$, причем $\sum_i n_i' = n$.

- В случае (б), т.е. при $\Delta_1 \neq \Delta_2 \neq \dots \neq \Delta_l$:

- ° предполагая, что теоретические частоты попадания в каждый из промежутков $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_l$ одинаковы, определяем $n_i' = 1/l$ и вероятности $p_i = n_i'/n$.
- ° левые граничные точки z_i^* (4.37) промежутков определяются как квантили нормированного распределения порядков $(p_1 + p_2 + \dots + p_i)$, после чего, используя выражение (4.37), находим значения h_i границ промежутков Δ_i ($i = \overline{1, l}$) случайной величины X :

$$h_i = z_i^* \sigma_B + \bar{x}_B. \quad (4.38)$$

Значения (4.38) используются далее в п. 4 правил проверки гипотез для нахождения наблюдаемых частот n_i .

В общем случае, выполнение проверки гипотез о виде распределения на основе критерия (4.35) сопряжено с реализацией значительных объемов вычислений. Решение задач этого класса при больших массивах выборочных данных без использования компьютера может вызвать затруднения. Поэтому применение систем компьютерной математики в этом классе задач становится необходимым. В примерах, которые рассматриваются ниже, процедура применения критерия (4.35) реализуется в среде Mathcad, что существенно облегчает получение конечного результата.

Пример 4.11. В процессе анализа погрешности измерения гироскопа проведено $n = 100$ экспериментов, результаты которых сведены в табл. 4.5. На основе этих данных проверить гипотезу о нормальном распределении случайной величины — погрешности прибора, используя критерий (4.35).

Таблица 4.5

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.781	1.493	0.638	-0.45	0.795	1.214	0.99	1.072	1.27	1.396
1	0.66	1.431	0.742	-0.079	0.663	0.762	1.016	1.849	1.109	1.071
2	0.763	1.458	1.279	1.103	0.934	0.652	1.132	0.84	1.203	0.497
3	0.524	1.337	0.878	0.692	1.509	2.524	1.246	-0.016	0.422	0.537
X = 4	0.157	0.478	1.045	0.401	1.09	0.857	1.119	0.294	0.447	0.561
5	1.022	1.035	1.631	1.05	1.257	0.36	0.658	0.337	0.448	1.139
6	0.94	0.622	0.647	1.385	1.37	1.38	0.193	0.741	0.796	0.799
7	1.278	1.348	1.001	1.153	0.992	0.804	1.706	1.031	0.343	1.651
8	2.096	0.909	1.554	1.006	1.139	0.398	1.486	0.702	-0.42	0.311
9	1.404	0.678	1.446	0.618	1.081	0.482	0.422	0.835	1.638	1.19

□ **Решение.** Выполнение проверки осуществим на основе упрощенной процедуры, описанной выше. Примем уровень значимости $\alpha = 0.05$ и число промежутков, на которые разбивается диапазон выборочных данных, $b = 8$ (см. выражения (1.19)).

Результаты вычислений в среде Mathcad представлены на рис. 4.21 в виде последовательных фрагментов с краткими комментариями. Для возможности размещения результирующих векторов на экране компьютера (и на иллюстра-

тивных копиях фрагментов mcd-файлов), расчеты выполнялись с невысокой разрядностью чисел, что вызвало незначительные погрешности вычислений.

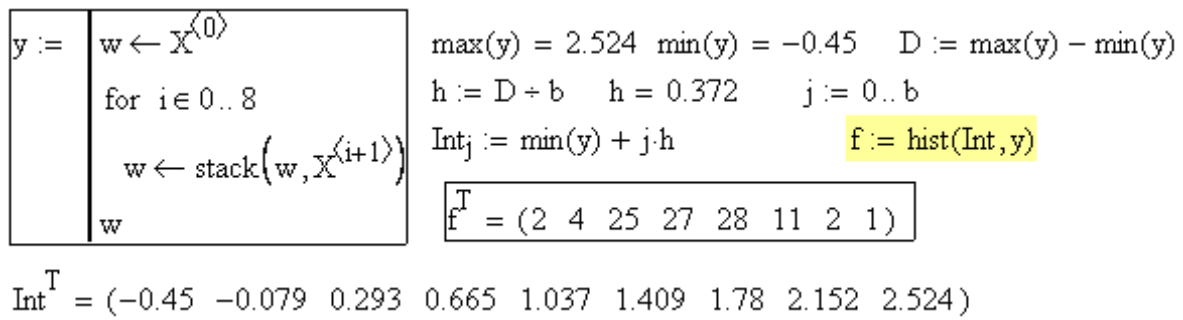


Рис. 4.21, а. Определение диапазона D , ширины промежутка h , частот попаданий

Предварительно преобразуем матрицу X (см. табл. 4.5) в вектор выборочных данных y ; это можно осуществить, например, с использованием цикла (на рис. 4.21, а цикл отмечен рамкой).

С применением встроенной функции **hist** определены частоты попаданий в промежутки $((8 \times 1)$ -вектор f). Вектор **Int**, размерностью (9×1) , содержит значения границ промежутков, определенных по выборке y . Добавляя к первым восьми элементам вектора **Int** величину $0.5h$, получаем (8×1) -вектор v середин промежутков: $v^T = (-0.2645, 0.1073, 0.4791, 0.8509, 1.2227, 1.5945, 1.9664, 2.3382)$. В следующем фрагменте (см. рис. 4.21, б) определяются: выборочное среднее и выборочная дисперсия (с использованием элементов вектора относительных частот $w = f/n$); вероятности попадания выборочных данных в промежутки с границами, которые содержатся в векторе z нормированных граничных значений.

$$\begin{aligned}
 x_b &:= \sum_{i=0}^{b-1} (v_i \cdot w_i) & D_b &:= \sum_{i=0}^{b-1} [(v_i - x_b)^2 \cdot w_i] & \sigma_b &:= \sqrt{D_b} & z_j &:= \frac{\text{Int}_j - x_b}{\sigma_b} \\
 z^T &= (-2.928 \ -2.139 \ -1.349 \ -0.56 \ 0.229 \ 1.018 \ 1.807 \ 2.596 \ 3.385) \\
 p_i &:= \text{pnorm}(z_{i+1}, 0, 1) - \text{pnorm}(z_i, 0, 1) \\
 p^T &= (0.015 \ 0.072 \ 0.199 \ 0.303 \ 0.255 \ 0.119 \ 0.031 \ 0.004) \\
 p_0 &:= \text{pnorm}(z_0, 0, 1) & p_b &:= 1 - \text{pnorm}(z_b, 0, 1) & f1 &:= \text{stack}(0, f, 0) \\
 p &:= \text{stack}(p_0, p, p_b) & r &:= n \cdot p & \sum_{k=0}^{b+1} p_k &= 1 \\
 r^T &= (0.171 \ 1.453 \ 7.237 \ 19.904 \ 30.286 \ 25.515 \ 11.897 \ 3.066 \ 0.436 \ 0.036)
 \end{aligned}$$

Рис. 4.21, б. Определение теоретических частот попаданий

Эти вероятности $((8 \times 1)$ -векторе p) получены с помощью встроенной функции **pnorm**, вычисляющей значения функции распределения проверяемо-

го распределения. Сумма элементов вектора $\mathbf{p}$ не равна единице, поскольку в нем не учтены промежутки $(-\infty, z_0] = (-\infty, -2.928]$ и $(z_b, +\infty) = (3.385, +\infty)$. Вероятности попадания в эти крайние промежутки обозначены (см. рис. 4.21, б) p_0 и p_b соответственно и добавляются в вектор $\mathbf{p}$ с помощью функции **stack**. Сумма элементов результирующего (10×1) -вектора $\mathbf{p}$ равна единице. Вектор теоретических частот $\mathbf{r} = \mathbf{p}n$. Соответствующий вектор $\mathbf{f1}$ наблюдаемых частот образован также с помощью встроенной функции **stack**.

В заключительном фрагменте mcd-файла с решением примера 4.11, показанном на рис. 4.21, в, найдены значение $Q = 4.932$ статистики (4.35) и квантиль $z_{0.95} = 14.067$ распределения χ^2 порядка 0.95 с числом степеней свободы (4.36) $ss = 10 - 1 - 2 = 7$. Сопоставление Q и $Z_{0.95}$ свидетельствует о том, что выборочные данные не противоречат проверяемой гипотезе и ее следует принять.

$$Q := \sum_{i=0}^{b+1} \frac{(r_i - f1_i)^2}{r_i} \quad Z_{0.95} := \text{qchisq}(1 - \alpha, 7)$$

$Q = 4.932$ $Z_{0.95} = 14.067$

Рис. 4.21, в. Вычисление значения статистики критерия согласия Пирсона

Выполненный анализ был проведен без учета условия $p_i n \geq 5$, которое отмечалась выше. Этому условию не удовлетворяют два первых и три последних разряда (см. вектор $\mathbf{r}$ на рис. 4.21, б).

$$\begin{aligned} Z &:= \text{submatrix}(z, 2, 5, 0, 0) && \text{Выделение границ интервалов, оставшихся после объединения, из вектора интервалов } \mathbf{z} \\ Z^T &= (-1.349 \quad -0.56 \quad 0.229 \quad 1.018) && j := 0..2 \\ pp_j &:= \text{pnorm}(Z_{j+1}, 0, 1) - \text{pnorm}(Z_j, 0, 1) && pp^T = (0.199 \quad 0.303 \quad 0.255) \\ pp_0 &:= \text{pnorm}(Z_0, 0, 1) && pp_b := 1 - \text{pnorm}(Z_3, 0, 1) \\ pp1 &:= \text{stack}(pp_0, pp, pp_b) && rr := pp1 \cdot n \\ &&& \sum_{k=0}^4 pp1_k = 1 \\ ff &:= (6 \quad 25 \quad 27 \quad 28 \quad 14)^T && k=0 \\ &&& \sum_{i=0}^4 rr_i = 100 \quad \sum_{i=0}^4 ff_i = 100 \\ &&& \text{qchisq}(1 - \alpha, 2) = 5.991 \end{aligned}$$

$$QQ := \sum_{i=0}^4 \frac{(rr_i - ff_i)^2}{rr_i} \quad QQ = 2.96$$

Рис. 4.21, г. Анализ при объединении конечных промежутков

Для выполнения указанного условия следует объединить три первых разряда в один разряд и четыре последних — в другой. Результирующее число

разрядов после такого объединения составит $l = 5$, а новый (5×1) -вектор $\mathbf{ff}$ наблюдаемых частот получит следующие элементы: $\mathbf{ff}^T = (6, 25, 27, 28, 14)$.

На рис. 4.21, *з* (продолжение рис. 4.21, *а* и 4.21, *б*) приведена процедура и результаты анализа, учитывающие объединение промежутков.

Новым промежуткам $(-\infty, -1.349]$, $(-1.349, -0.56)$, $(-0.56, 0.229)$, $(0.229, 1.018)$, $(1.018, +\infty)$, таким образом, соответствуют наблюдаемые частоты $(6, 25, 27, 28, 14)$ и теоретические частоты $(8.861, 19.904, 30.286, 25.515, 15.435)$. Последние объединены в вектор $\mathbf{rr}$. Вектор $\mathbf{pp}$ содержит вероятности попадания значений в указанные промежутки. Критическая точка $k_{кр}$ в данном случае соответствует квантилю распределения χ^2 порядка 0.95 с числом степеней свободы $(4.36) \text{ } ss = 5 - 1 - 2 = 2$. Полученные значения $Q = 2.96$ и $k_{кр} = 5.991$ свидетельствует о том, что введенные в состав промежутков уточнения не повлияли на конечный результат анализа. Проверяемая гипотеза принимается. ■

Пример 4.12. Используя выборку из примера 4.11 (табл. 4.5), проверить по критерию хи-квадрат гипотезу о нормальном распределении случайной величины с известными параметрами $m = 1$ и $\sigma = 0.5$.

□ Решение. Предыдущая задача решалась по упрощенной процедуре и имела два неопределенных параметра распределения. Кроме того, при ее решении диапазон выборочных значений определялся разностью $(y_{\max} - y_{\min})$ максимального и минимального элемента выборки, что вызвало некоторую погрешность результата определения наблюдаемых частот при использовании невысокой разрядности чисел. Во избежание этой погрешности, в рассматриваемом примере, при определении диапазона будем округлять $y_{\max}$ и $y_{\min}$ до ближайшего большего (по модулю) целого. Воспользуемся общей процедурой проверки. Рис. 4.22 иллюстрирует процесс выполнения этапов (Mathcad).

Рисунок 4.22, *а* содержит фрагмент, в котором определяются наблюдаемые и теоретические частоты. Этот этап необходим для контроля выполнения условия $p_i n \geq 5$ и выбора варианта объединения разрядов для выполнения этого условия. Первая строка фрагмента (см. рис. 4.22, *а*), содержит ввод необходимых исходных данных. Далее выполняются операции, смысл которых был пояснен при описании рис. 4.21. Округление крайних значений выборки осуществляется с помощью встроенных функций **ceil** и **floor**. Вектор **Int** границ промежутков формируется теперь от начального значения $L = -1$. Полученный таким образом (9×1) -вектор **Int** дополняется вводом бесконечностей. Для результирующего (11×1) -вектора границ промежутков **Int0** определяются наблюдаемые частоты (вектор **f0**), вероятности попаданий в отдельные промежутки (вектор **p0**) и теоретические частоты (вектор **r0**). Анализ полученных теоретических частот показывает, что условие $p_i n \geq 5$ будет выполнено, если первые четыре промежутка объединить в один общий и последние четыре — также в один общий. Этому варианту соответствует вектор границ промежутков **Int1**, выделенный заливкой на рис. 4.22, *б*. Полученные для этого варианта

векторы наблюдаемых (**f1**) и теоретических частот (**r1**) дают значение статистики (4.35) критерия хи-квадрат $Q1 = 4.875$.

$$\begin{array}{l}
 n := 100 \quad m := 1 \quad \sigma := 0.5 \quad \alpha := 0.05 \quad b := 8 \\
 \boxed{\begin{array}{l} y := w \leftarrow X^{(0)} \\ \text{for } i \in 0..8 \\ \quad w \leftarrow \text{stack}(w, X^{(i+1)}) \\ w \end{array}} \quad \begin{array}{l} \max(y) = 2.524 \quad M := \text{cei}(\max(y)) \\ \min(y) = -0.45 \quad L := \text{floor}(\min(y)) \\ M = 3 \quad L = -1 \\ D := M - L \quad h := D \div b \quad h = 0.5 \end{array} \\
 j := 0..b \quad \text{Int}j := L + j \cdot h \quad \text{Int}^T = (-1 \quad -0.5 \quad 0 \quad 0.5 \quad 1 \quad 1.5 \quad 2 \quad 2.5 \quad 3) \\
 \text{Int0} := \left(-\infty \quad -1 \quad -0.5 \quad 0 \quad 0.5 \quad 1 \quad 1.5 \quad 2 \quad 2.5 \quad 3 \quad \infty \right)^T \\
 \boxed{f0 := \text{hist}(\text{Int0}, y)} \quad f0^T = (0 \quad 0 \quad 4 \quad 16 \quad 32 \quad 39 \quad 7 \quad 1 \quad 1 \quad 0) \\
 i := 0..b+1 \quad p0_i := \text{pnorm}(\text{Int0}_{i+1}, m, \sigma) - \text{pnorm}(\text{Int0}_i, m, \sigma) \quad \boxed{r0 := n \cdot p0} \\
 r0^T = (0.003 \quad 0.132 \quad 2.14 \quad 13.591 \quad 34.134 \quad 34.134 \quad 13.591 \quad 2.14 \quad 0.132 \quad 0.003) \\
 \sum_i f0_i = 100 \quad \sum_i p0_i = 1 \quad \sum_i r0_i = 100
 \end{array}$$

Рис. 4.22, а. Предварительный анализ теоретических и наблюдаемых частот

$$\begin{array}{l}
 \text{Int1} := \left(-\infty \quad 0.5 \quad 1 \quad 1.5 \quad \infty \right)^T \quad f1 := \text{hist}(\text{Int1}, y) \quad f1^T = (20 \quad 32 \quad 39 \quad 9) \\
 i := 0..3 \quad p1_i := \text{pnorm}(\text{Int1}_{i+1}, m, \sigma) - \text{pnorm}(\text{Int1}_i, m, \sigma) \quad \sum_i f1_i = 100 \\
 \boxed{r1 := n \cdot p1} \quad r1^T = (15.866 \quad 34.134 \quad 34.134 \quad 15.866) \quad \sum_i r1_i = 100 \\
 Q1 := \sum_i \frac{(r1_i - f1_i)^2}{r1_i} \quad \boxed{Q1 = 4.875} \quad k_{kp} := \text{qchisq}(1 - \alpha, 3) \quad \boxed{k_{kp} = 7.815}
 \end{array}$$

Рис. 4.22, б. Анализ варианта объединения разрядов

Результирующий вариант (см. рис. 4.22, б) имеет $l = 4$ промежутка, поэтому число степеней свободы (4.36) $ss = l - 1 = 3$. Квантиль порядка 0.95 распределения χ^2 с тремя степенями свободы определен с помощью функции **qchisq** и равен 7.815. Сопоставление этого значения со значением $Q1 = 4.875$ свидетельствует о согласии выдвинутой гипотезы с выборочными данными. ■

Пример 4.13. При плановой проверке транспорта проведено 50 замеров опозданий прибытия автобусов; результаты анализа (время опозданий в минутах) сведены в матрицу **Y**. Применяя критерий хи-квадрат, проверить гипотезу о том, что случайная величина — время опозданий — принадлежит показательному распределению.

□ Решение. Решение (рис. 4.23) проведем по схеме, использованной в примере 4.12. В данной задаче имеется неопределенный параметр λ показательного распределения, точечную оценку которого находим по формуле $\hat{\lambda} = 1/\bar{x}_B$ (2.45). Выборочное среднее $\bar{x}_B$ в Mathcad определяет функция **mean**. Полученное значение для параметра $\lambda = 0.505$.

	0	1	2	3	4
0	0.72	0.044	0.348	2.651	0.297
1	2.588	1.967	0.518	3.084	1.546
2	0.016	1.216	0.023	3.177	0.638
3	2.013	1.376	3.46	0.447	2.345
4	2.848	1.183	0.063	1.225	0.286
5	1.635	1.859	2.775	0.391	0.845
6	1.25	5.137	3.356	6.884	2.195
7	3.012	2.466	3.3	0.415	3.452
8	1.772	0.813	1.67	2.832	4.452
9	5.298	0.862	0.402	6.739	1.207

$$Y =$$

```

y := w ← Y<0>
    for i ∈ 0..3
        w ← stack(w, Y<i+1>)
    w

```

$$\begin{aligned} \max(y) &= 6.884 & M &:= \text{cei}(\max(y)) \\ \min(y) &= 0.016 & L &:= \text{floor}(\min(y)) \\ M &= 7 & L &= 0 & D &:= M - L & b &:= 7 \\ h &:= D \div b & h &= 1 \\ \alpha &:= 0.05 & \lambda &:= 1 \div \text{mean}(y) & \lambda &= 0.505 \end{aligned}$$

$$j := 0..b \quad \text{Int}j := L + j \cdot h$$

$$\text{Int}^T = (0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7)$$

$$f := \text{hist}(\text{Int}, y)$$

$$f^T = (17 \ 12 \ 9 \ 7 \ 1 \ 2 \ 2)$$

$$\sum_{i=0}^{b-1} f_i = 50$$

$$\text{Int0} := (0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ \infty)^T$$

$$i := 0..7 \quad p0_i := \text{pexp}(\text{Int0}_{i+1}, \lambda) - \text{pexp}(\text{Int0}_i, \lambda)$$

$$p0^T = (0.396 \ 0.239 \ 0.144 \ 0.087 \ 0.053 \ 0.032 \ 0.019 \ 0.029)$$

$$\sum_{k=0}^b p0_k = 1$$

$$r0 := n \cdot p0$$

$$r0^T = (19.811 \ 11.962 \ 7.222 \ 4.36 \ 2.633 \ 1.59 \ 0.96 \ 1.462)$$

Рис. 4.23, а. Предварительный анализ примера 4.13

$$\text{Int2} := (0 \ 1 \ 2 \ 3 \ \infty)^T$$

$$f2 := \text{hist}(\text{Int2}, y) \quad f2^T = (17 \ 12 \ 9 \ 12)$$

$$k := 0..3 \quad p2_k := \text{pexp}(\text{Int2}_{k+1}, \lambda) - \text{pexp}(\text{Int2}_k, \lambda) \quad p2^T = (0.396 \ 0.239 \ 0.144 \ 0.22)$$

$$r2 := n \cdot p2$$

$$r2^T = (19.811 \ 11.962 \ 7.222 \ 11.005)$$

$$\sum_{k=0}^3 r2_k = 50$$

$$Q2 := \sum_{i=0}^3 \frac{(r2_i - f2_i)^2}{r2_i} \quad Q2 = 0.927$$

$$z_{095} := \text{qchisq}(1 - \alpha, 2) \quad z_{095} = 5.991$$

Рис. 4.23, б. Результат решения примера 4.13

Предварительный анализ теоретических частот (вектор **r0**, рис. 4.23, а) показал, что последние пять разрядов могут быть объединены в один общий. Этот вариант анализируется на рис. 4.23, б.

Полученный после объединения вектор границ промежутков **Int2** выделен заливкой на рис. 4.23, б. Векторы наблюдаемых (вектор **f2**) и теоретических частот (вектор **r2**), полученные для этого варианта, дают значение статистики (4.35) критерия хи-квадрат $Q2 = 0.927$.

В этом варианте (см. рис. 4.23, б) имеем число промежутков $l = 4$, число неопределенных параметров, найденных по выборочным данным, $r = 1$ поэтому число степеней свободы (4.36) $ss = 2$. Квантиль порядка 0.95 распределения χ^2 с двумя степенями свободы, определенный с помощью функции **qshisq**, равен 5.991. Сопоставление этого значения со значением $Q2$ позволяет принять выдвинутую гипотезу. ■

Пример 4.14. В компьютерной сети каждый час фиксируется число сбоев компьютеров. Результаты анализа за 1000 часов представлены в табл. 4.6. По критерию хи-квадрат проверить гипотезу, что случайная величина X (число сбоев компьютеров) распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda = 1$.

Таблица 4.6

Число сбоев	0	1	2	3	4	≥ 5
Частота	390	342	187	54	20	7

□ **Решение.** Процедура проверки выдвинутого предположения, реализованная в среде Mathcad, представлена на рис. 4.24. Исходными данными служили $n = 1000$, $\lambda = 1$, уровень значимости $\alpha = 0.05$.

$$\begin{aligned}
 & \text{Int0} := (0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6)^T \\
 & \text{f0} := \text{hist}(\text{Int0}, X) \qquad j := 0..b \\
 & \text{f0}^T = (390 \ 342 \ 187 \ 54 \ 20 \ 7) \qquad \sum_j \text{f0}_j = 1000 \\
 & \text{p0}_j := \text{dpois}(\text{Int0}_j, \lambda) \qquad \text{p0}^T = (0.368 \ 0.368 \ 0.184 \ 0.061 \ 0.015 \ 0.003) \\
 & \boxed{\text{r0} := \text{p0} \cdot n} \qquad \text{r0}^T = (367.879 \ 367.879 \ 183.94 \ 61.313 \ 15.328 \ 3.066) \\
 & \sum_j \text{p0}_j = 0.999 \qquad \sum_j \text{r0}_j = 999.406
 \end{aligned}$$

Рис. 4.24, а. Предварительный анализ примера 4.14

Из табл. 4.6 следует, что в данном случае естественно принять $b = 5$ промежутков с границами (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6). Последнее число выбрано из множества произвольных чисел, больших 5. Результат обработки реализации с определением наблюдаемых частот (вектор **f0**) и вычислением теоретических частот (вектор **r0**) представлен на рис. 4.24, а. Вычисление вероятностей числа сбоев, указанных в верхней строке табл. 4.6 и объединенных вектором **Int0**,

должно производиться по формуле Пуассона (5.42), рассмотренной в *разд. 5.5* первой части. Эту формулу реализует встроенная функция Mathcad **dpois**, которая и применена для определения вероятностей сбоев (вектор **p0**). Незначительные погрешности при подсчете сумм элементов векторов **p0** и **r0** вызваны использованием невысокой разрядности чисел при расчетах. Такая разрядность, как уже отмечалось, принималась в обеспечение возможности размещения соответствующих векторов в приводимых иллюстрациях.

Последний элемент вектора **r0** теоретических частот не удовлетворяет условию $p_i n \geq 5$, поэтому два последних разряда могут быть объединены в один общий. Это учитывает новый вектор границ промежутков **Int1**, для которого производится завершающий анализ (см. рис. 4.24, б).

Для определения последнего элемента вектора **p1** вероятностей, дополнительно к функции **dpois** использована функция **ppois**, вычисляющая кумулятивную вероятность для дискретных случайных величин (см. выражение 5.43 первой части). Этот последний элемент равен ~ 0.019 .

$$\begin{aligned}
 \text{Int1} &:= (0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 6)^T & f1 &:= \text{hist}(\text{Int1}, X) & i &:= 0..4 \\
 f1^T &= (390 \quad 342 \quad 187 \quad 54 \quad 27) & \sum_i f1_i &= 1000 \\
 p1_i &:= \text{dpois}(\text{Int1}_i, \lambda) & p1^T &= (0.368 \quad 0.368 \quad 0.184 \quad 0.061 \quad 0.015) \\
 p1_4 &:= \text{dpois}(4, \lambda) + \text{ppois}(6, \lambda) - \text{ppois}(4, \lambda) & p1_4 &= 0.019 \\
 p1^T &= (0.368 \quad 0.368 \quad 0.184 \quad 0.061 \quad 0.019) & \boxed{r1 := n \cdot p1} & \sum_i p1_i = 1 \\
 r1^T &= (367.879 \quad 367.879 \quad 183.94 \quad 61.313 \quad 18.905) \\
 Q1 &:= \sum_{i=0}^4 \frac{(r1_i - f1_i)^2}{r1_i} & \boxed{Q1 = 7.54} & \sum_i r1_i = 999.917 \\
 k1_{kp} &:= \text{qchisq}(1 - \alpha, 4) & \boxed{k1_{kp} = 9.488} &
 \end{aligned}$$

Рис. 4.24, б. Результат решения примера 4.14

Число промежутков в результирующем варианте $l = 5$ (см. рис. 4.24, б), поэтому число степеней свободы (4.36) $ss = 4$. Квантиль порядка 0.95 распределения χ^2 с четырьмя степенями свободы, определенный с помощью функции **qchisq**, равен 9.488. Выборочное значение статистики критерия согласия (4.35) $Q1 = 7.54$. Поскольку $Q1 < k1_{kp} = 9.488$, гипотеза о принадлежности выборочных данных распределению Пуассона с параметром $\lambda = 1$ принимается. ■

4.6.2. Критерий Колмогорова

Пусть имеется непрерывная случайная величина X , относительно функции распределения $F(x)$ которой выдвигается предположение вида $F(x) = F_0(x)$, причем параметры гипотетической функции распределения известны. В результате эксперимента формируется выборка объема n . По выборочным данным вычисляется эмпирическая функция распределения $F_n(x)$ и анализируется ее отклонение $(F_n(x) - F_0(x))$ от гипотетической.

А. Н. Колмогоровым предложена статистика

$$D_n = \sup_x |F_n(x) - F_0(x)| \quad (4.39)$$

и доказана теорема [5], согласно которой распределение случайной величины (4.39) при $n \rightarrow \infty$ не зависит от $F_0(x)$ и удовлетворяет соотношению:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\sqrt{n} \cdot D_n < x) = K(x) = \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \cdot \exp(-2k^2 x^2); & x > 0; \\ 0; & x \leq 0. \end{cases} \quad (4.40)$$

Таблицы значений функции (4.40) приведены в [5].

При правосторонней критической области на уровне значимости α левую границу этой области будет определять квантиль $x_{1-\alpha}$ порядка $(1 - \alpha)$ распределения (4.40), удовлетворяющий уравнению $K(x_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$.

Тогда, при достаточно большом ($n \geq 20$) объеме выборки процедура применения критерия Колмогорова заключается в следующем:

- Используя выборочные данные, определяются: выборочные значения D_B статистики D_n (4.39) и $d_B = \sqrt{n} D_B$;
- Находится квантиль $x_{1-\alpha}$ распределения (4.40);
- Сравниваются значения d_B и $x_{1-\alpha}$. При $d_B > x_{1-\alpha}$ нулевая гипотеза $H_0: F(x) = F_0(x)$ отклоняется в пользу альтернативы $H_1: F(x) \neq F_0(x)$; при $d_B \leq x_{1-\alpha}$ нулевая гипотеза принимается на уровне значимости α .

Критерий Колмогорова осуществляет проверку распределения путем прямого сопоставления гипотетической функции распределения с оценкой функции распределения по выборочным данным.

При $n \rightarrow \infty$ и истинности нулевой гипотезы случайная величина D_n (4.39) будет стремиться к нулю, поскольку эмпирическая функция распределения служит оценкой теоретической функции распределения.

Критерий Колмогорова, как отмечено выше, может быть использован в случаях, когда параметры $F_0(x)$ известны или предварительно оценены путем анализа других выборочных данных, сформированных из значений той же случайной величины. Оценка неопределенных параметров проверяемого распределения при проверке гипотетического распределения критерием Колмогорова не предусмотрена. Это отличает данный критерий от критерия Пирсона—Фишера, рассмотренного в предыдущем разделе. Вариантом оценки неопределенных параметров, кроме использования другой выборки, может служить разделение выборочных данных на два массива, один из которых служит ос-

новой для оценки неопределенных параметров, а другой используется для проверки гипотезы.

Особенностью критерия Колмогорова, кроме отмеченных, служит заметная зависимость результата от варианта выбора промежутков разбиения диапазона выборочных данных при вычислении эмпирической функции распределения. Выбирая промежутки, следует учитывать скорость изменения функции гипотетического распределения (значения плотности распределения), принимая более короткие промежутки на участках резкого изменения $F_0(x)$, как это обычно делается при решении задач аппроксимации кривых. При этом задача выбора ширины промежутков может быть решена как задача кусочно-постоянной аппроксимации $F_0(x)$ с заданной точностью.

Вычисления, сопровождающие практическое применение критерия Колмогорова, удобно выполнять с использованием СКМ, в арсенале которых имеются возможности решения нелинейных уравнений. Рассмотрим решение одной из таких задач в среде Mathcad, в которой вычисления квантилей распределения Колмогорова может быть осуществлено прямым решением уравнений $K(x_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$.

Пример 4.15. В условиях примера 4.13, используя выборку $\mathbf{Y}$ (см. рис. 4.23, а), проверить по критерию Колмогорова гипотезу о показательном распределении с параметром $\lambda = 0.5$.

□ Решение. Решение (Mathcad) иллюстрируется рис. 4.25, на котором, в целях экономии места, не показаны предварительные операции формирования вектора $\mathbf{y}$ из матрицы $\mathbf{Y}$. Эта часть была представлена на рис. 4.23, а.

$b := 8 \quad \alpha := 0.05 \quad \lambda := 0.5 \quad i := 0..b-1 \quad n := 50$	
$\text{Int0} := (0 \ 0.2 \ 0.6 \ 1.2 \ 2 \ 3 \ 4.2 \ 5.5 \ 7)^T$	$w := \frac{1}{n} \cdot \text{hist}(\text{Int0}, y)$
$w^T = (0.08 \ 0.16 \ 0.12 \ 0.22 \ 0.18 \ 0.14 \ 0.06 \ 0.04)$	$\sum_i w_i = 1$
$F\Theta_i := \sum_{k=0}^i w_k \quad F\Theta^T = (0.08 \ 0.24 \ 0.36 \ 0.58 \ 0.76 \ 0.9 \ 0.96 \ 1)$	
$F0_i := \text{pexp}(\text{Int0}_i, \lambda)$	$F0^T = (0 \ 0.095 \ 0.259 \ 0.451 \ 0.632 \ 0.777 \ 0.878 \ 0.936)$
$(F\Theta - F0)^T = (0.08 \ 0.145 \ 0.101 \ 0.129 \ 0.128 \ 0.123 \ 0.082 \ 0.064)$	
$d := \max(F\Theta - F0)$	$d = 0.145$
$\sqrt{n} \cdot d = 1.024$	$k_{kp}(0.95) := 1.358$

Рис. 4.25, а. Проверка гипотезы по критерию Колмогорова

$x := 0$	Given	$\sum_{k=-100}^{100} (-1)^k \cdot \exp[-2 \cdot k^2 \cdot x^2] = 0.95$	Find(x) = 1.358

Рис. 4.25, б. Вычисление квантили распределения Колмогорова

Согласно условию, исходными данными, введенными на рис. 4.25, а, служат: $n = 50$, $\lambda = 0.5$, $\alpha = 0.05$. Кроме того, примем число промежутков $b = 8$ и введем индекс $i = 0, 1, 2, \dots, 7$. Ширина промежутков выбрана постепенно возрастающей к правому концу диапазона.

С помощью встроенной функции **hist** для принятого вектора (вектор **Int0**) границ промежутков определяются относительные частоты, Последовательным суммированием относительных частот находятся значения эмпирической функции распределения $F_n(x)$. Эти значения объединяются в вектор **FЭ** (см. рис. 4.25, а). Значения гипотетической функции распределения $F_0(x)$ определены с помощью функции **pexp** (x, λ), вычисляющей в файле (см. рис. 4.25, а) значения функции распределения $F(x)$ (по формуле (5.27) первой части) для левых границ промежутков, например, **pexp** (5.5, λ) = 0.936.

Выборочное значение D_B статистики (4.39) по результатам вычислений равно 0.145, а $d_B = \sqrt{n} D_B = 1.024$. Критическая точка — квантиль порядка 0.95 распределения Колмогорова, определена (см. рис. 4.25, б) в результате решения уравнения $K(x_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$ с помощью вычислительного блока (с ключевыми словами **given** — **find**) и равна 1.358. Гипотеза принимается. ■

В целях достижения результата решения уравнения $K(x_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$ бесконечные пределы в выражении (4.40) заменены конечными, в качестве которых выбраны большие числа. Значение квантили, равное 1.358, на рис. 4.25, б получено для пределов суммирования (–100, 100). Анализ показал, что результат решения практически не зависит от уровня конечных пределов суммирования и обладает в этом смысле определенной стабильностью. Так, например, принимая пределы суммирования (–1000, 1000) при решении уравнения (см. рис. 4.25, б), получим то же значение квантили, равное 1.358.

Возможность прямого вычисления квантилей произвольного порядка для специальных распределений, не обеспеченных наличием предусмотренных заранее встроенных функций, служит принципиальным фактом, существенно расширяющим спектр задач математической статистики, которые могут быть успешно решены в среде Mathcad. Продолжим решение примера 4.15.

□ Решение примера 4.15 возможно и в варианте, когда выборочные данные не группируются. В этом случае теоретическая функция распределения может быть определена по выборочным данным (вектор **y**, $n = 50$), отсортированным по возрастанию. Такую сортировку осуществляет в Mathcad встроенная функция **sort**. Результат решения примера 4.15 без группирования выборочных данных представлен на рис. 4.25, в.

Приведенный фрагмент (см. рис. 4.25, в) также показан без предварительной части, в которой формируется вектор y из матрицы Y . Эта часть приводилась на рис. 4.23, а. Использование всех выборочных данных без их группирования позволило уточнить полученное ранее (см. рис. 4.25, а) решение. Выборочное значение D_B статистики (4.39) в варианте рис. 4.25, в равно 0.077, а $d_B = \sqrt{n} D_B = 0.547$. Последнее значение меньше найденного ранее значения критической точки, равной 1.358, поэтому выдвинутая гипотеза принимается. ■

$\text{Int0} := \text{stack}(\text{sort}(y), 7)$				$\alpha := 0.05$	$\lambda := 0.5$	$n := 50$	$i := 0..n-1$
$F\Theta_i := \sum_{k=0}^i w_k$				$w := \frac{1}{n} \cdot \text{hist}(\text{Int0}, y)$		$\sum_i w_i = 1$	
$F0_i := \text{pexp}(\text{Int0}_i, \lambda)$				$d := \max(F\Theta - F0)$		$d = 0.077$	
$\sqrt{n} \cdot d = 0.547$				$k_{kp} := 1.358$			

Рис. 4.25, в. Решение примера 4.15 без группирования выборки

4.6.3. Критерий ω^2

Критерий ω^2 (омега-квадрат), в отличие от предыдущих критериев, опирается непосредственно на данные наблюдений, без их группирования.

Пусть так же, как при рассмотрении критерия Колмогорова, выдвинутая гипотеза заключается в том, что случайная величина X имеет известную функцию распределения $F(x)$, причем $F(x)$ имеет производную (плотность распределения). По выборке объема n строится эмпирическая функция распределения $F_n(x)$ и анализируется средний квадрат отклонения $F_n(x)$ от $F(x)$ по всем значениям аргумента [1]:

$$\omega^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F(x)]^2 dF(x). \quad (4.41)$$

Отсортируем выборочные данные по возрастанию, получив вариационный ряд: $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. В силу сделанного предположения о том, что X — непрерывная случайная величина, полученный ряд содержит различные значения (см. разд. 4.3, ч. I).

Для эмпирической функции распределения $F_n(x)$ справедливы следующие соотношения: $F_n(x) = 0$ при $x < x_1$; $F_n(x) = k/n$ при $x_k \leq x < x_{k+1}$; $F_n(x) = 1$ при $x \geq x_n$. Используя все выборочные данные без их группирования, интеграл (4.41) может быть представлен в виде суммы частичных интегралов на промежутках $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2) , $\dots$, (x_{n-1}, x_n) , $(x_n, +\infty)$. После преобразования этой суммы выражение (4.41) приобретает вид [1, 4]:

$$\omega^2 = \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[F(x_k) - \frac{2k-1}{2n} \right]^2. \quad (4.42)$$

Распределение ω^2 имеет очень сложный вид. Исследовано распределение $n\omega^2$; показано [1], что для выборок объема $n > 40$ это распределение близко к некоторому предельному, для которого составлены таблицы квантилей^{*)}.

В табл. 4.7 приведены некоторые значения квантилей распределения $n\omega^2$.

Таблица 4.7

Уровень значимости α	0.1	0.05	0.02	0.01
Квантиль распределения $n\omega^2$	0.3473	0.4614	0.6198	1.1679

Анализ показал, что критерий ω^2 , в отличие от критерия χ^2 , более полно использует информацию, заключенную в выборочных данных, поскольку не использует их группировку. Кроме того, распределение ω^2 значительно быстрее, чем распределение χ^2 сходится к предельному закону, что повышает его роль при анализе коротких выборок.

Пример 4.16. В условиях примера 4.13, используя выборку **Y** (см. рис. 4.23, а), проверить по критерию ω^2 гипотезу о показательном распределении с параметром $\lambda = 0.5$.

□ Решение. Уровень значимости, как и ранее, примем равным 0.05. Вычисления, связанные с нахождением значения ω^2 (4.42) в среде Mathcad, приведены на рис. 4.26. Решение примера предполагает вычисление значения ω^2 по формуле (4.42), получение $n\omega^2$ и сопоставление этого значения с квантилью уровня 0.95, равной 0.4614 (см. табл. 4.7).

Для удобства использования формулы (4.42) вычисления (см. рис. 4.24) выполнены при значении системной переменной **ORIGIN**, управляющей начальным индексом нумерации векторов и матриц, равном: **ORIGIN** = 1. Это означает, например, что первый элемент вектора **y** в mcd-файле будет иметь обозначение y_1 , а первый вектор-столбец матрицы **Y** в цикле (выделен рамкой на рис. 4.26) получит надстрочный индекс, равный единице.

Процедура получения вектора **F0** значений гипотетической функции распределения $F(x)$ в рассматриваемом примере полностью аналогична процедуре, показанной на рис. 4.25, в. Значение статистики ω^2 (4.42), обозначенное при расчетах (см. рис. 4.26) как Ω , получено равным 0.001846. Тогда значение $n\omega^2 \approx 0.092$. Сопоставляя это значение с квантилью уровня 0.95, равной 0.4614, принимаем решение о непротиворечивости выборочных данных выдвинутой гипотезе. ■

4.7. Другие задачи проверки гипотез

^{*)}Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1983.— 416 с.

Класс задач проверки статистических гипотез весьма многообразен. Некоторые из задач проверки гипотез и подходы к их решению рассмотрены выше в разд. 4.4—4.6. В математической статистике имеется множество других задач, связанных, например, с анализом стабильности параметров нескольких выборок, анализом однородности двух и более выборок. Под однородностью выборок понимается при этом принадлежность их одной случайной величине. При решении подобных задач могут применяться как рассмотренные выше критерии, так и другие подходы. Рассмотрим некоторые из таких задач.

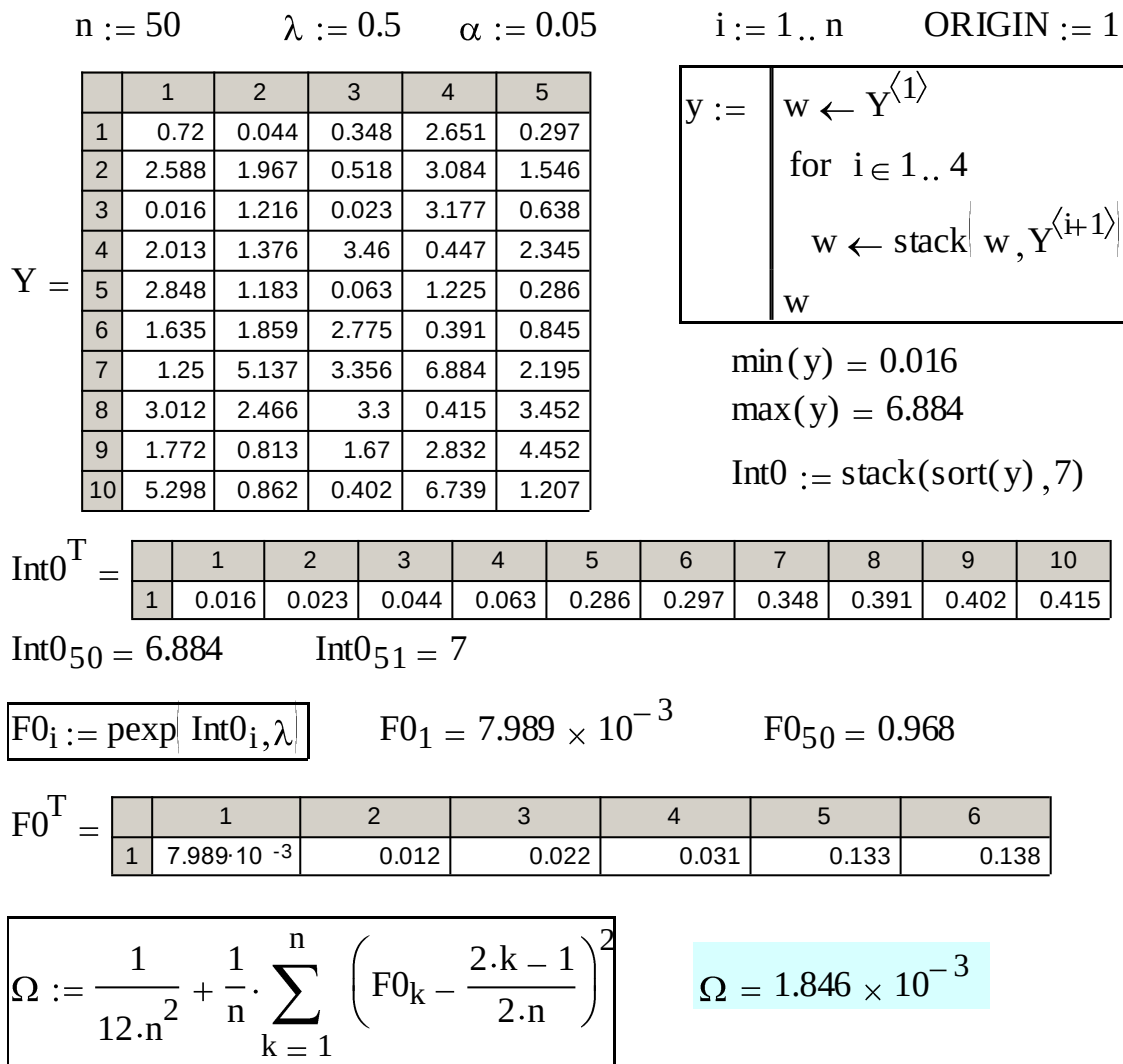


Рис. 4.26. Решение примера 4.16

4.7.1. Проверка гипотезы о разности математических ожиданий двух нормальных распределений

Математическое ожидание в практике статистического анализа часто выступает в качестве контролируемого признака продукции, выпускаемой различными предприятиями на различном оборудовании и в различных условиях. Сопоставление математических ожиданий входит также в качестве элемента

проверки однородности двух и более выборок. Такое сопоставление можно проводить на основе доверительных интервалов.

В *разд. 4.4.4* была рассмотрена возможность использования интервального оценивания при проверках параметрических гипотез. Этот подход можно применить и к рассматриваемой задаче сопоставления математических ожиданий.

Рассмотрим две независимые выборки: $\mathbf{X}$ с элементами $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\mathbf{Y}$ с элементами $(y_1, y_2, \dots, y_m)$. Предположим, что соответствующие случайные величины имеют нормальное распределение, причем

$$X_i \sim N(m_x, \sigma_x^2); Y_j \sim N(m_y, \sigma_y^2); \quad i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}.$$

По выборкам $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ вычисляются выборочные средние $\bar{x}_B$ и $\bar{y}_B$ с использованием выражения (2.10). Выдвигается гипотеза $H_0: m_x - m_y = d$, проверку которой при уровне значимости α осуществим для двух случаев, когда дисперсии случайных величин известны и когда они неизвестны.

Интервальная оценка разности математических ожиданий двух нормально распределенных случайных величин для указанных двух случаев была рассмотрена в *разд. 3.6*. Воспользуемся основными положениями этого раздела при проведении проверки гипотезы H_0 . Отметим также, что частным случаем рассматриваемой задачи служит $d = 0$. Он соответствует проверке гипотезы о равенстве математических ожиданий двух нормально распределенных случайных величин.

а) Дисперсии $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$ известны.

В качестве статистики критерия значимости примем выражение (3.48):

$$z = [(\bar{x}_B - \bar{y}_B) - (m_x - m_y)] / \sigma^*; \quad \sigma^* = \sqrt{D^*}, D^* = \frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}. \quad (4.43)$$

Здесь D^* — дисперсия разности выборочных средних $(\bar{x}_B - \bar{y}_B)$.

При сделанных предположениях случайная величина $z \sim N(0, 1)$, т. е. имеет нормированное нормальное распределение.

Учитывая возможное отклонение разности математических ожиданий как в положительную, так и в отрицательную области, примем двустороннюю критическую зону, вероятность попадания в которую равна α . В такой постановке правило проверки будет содержать следующие этапы:

1. Назначение уровня значимости α .
2. Определение квантилей $z_{\alpha/2}$ и $z_{1-\alpha/2}$ нормированного нормального распределения из условий $P[z < z_{\alpha/2}] = P[z > z_{1-\alpha/2}] = \alpha/2$.
3. Вычисление выборочного значения z_B статистики (4.43).
4. Сравнение z_B и $z_{1-\alpha/2} = -z_{\alpha/2}$. Принятие решения: при выполнении неравенства $|z_B| < z_{1-\alpha/2}$, т. е. при попадании z_B в допустимую область (3.50), гипотеза H_0 принимается. В противном случае H_0 отвергается.

б) Дисперсии σ_x^2 и σ_y^2 неизвестны.

В этом случае вычисляются s_x^2 , s_y^2 — исправленные выборочные дисперсии (2.27), а в качестве статистики критерия значимости следует выбрать случайную величину (3.51)

$$T^* = \frac{z \sqrt{n+m-2}}{\sqrt{g}}, \quad g = \chi_1^* + \chi_2^* = \frac{s_x^2 \cdot (n-1)}{\sigma_x^2} + \frac{s_y^2 \cdot (m-1)}{\sigma_y^2}. \quad (4.44)$$

Здесь χ_1^* и χ_2^* — случайные величины, имеющие распределение хи-квадрат с $(n-1)$ и $(m-1)$ степенями свободы соответственно

При упрощающем предположении $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$ выражение (4.44) может быть преобразовано к виду

$$T^* = [(\bar{x}_B - \bar{y}_B) - (m_x - m_y)] \cdot R; \quad R = \frac{\sqrt{nm(n+m-2)}}{\sqrt{n+m} \cdot \sqrt{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}}. \quad (4.45)$$

В разд. 3.6 было показано, что случайная величина t (4.44), (4.45) распределена по закону Стьюдента с $n^* = (n+m-2)$ степенями свободы. Это позволяет провести проверку гипотезы H_0 путем выполнения следующих этапов:

1. Назначение уровня значимости α .
2. Определение квантилей $t_{\alpha/2}$ и $t_{1-\alpha/2}$ (граничных точек двусторонней критической области) распределения Стьюдента с n^* степенями свободы из условий $P[T^* < t_{\alpha/2}] = P[T^* > t_{1-\alpha/2}] = \alpha/2$.
3. Вычисление выборочного значения t_B статистик (4.44) или (4.45).
4. Сравнение t_B и $t_{1-\alpha/2} = -t_{\alpha/2}$. Принятие решения: при выполнении неравенства $|t_B| < t_{1-\alpha/2}$, т. е. при попадании t_B в допустимую область, гипотеза H_0 принимается. В противном случае H_0 отвергается.

Пример 4.17. В химическом производстве должны использоваться два вида реагентов со средним содержанием активного вещества m_x и m_y соответственно, причем их разность должна быть равна $m_x - m_y = d = 1.3$. При очередном анализе составов реагентов были получены две выборки объемом $n = m = 25$, приведенные в прил. 14. Предварительный анализ выборочных данных показал принадлежность каждой из выборок нормальному распределению с одинаковыми дисперсиями. Проверить соответствие состава реагентов установленным нормам.

□ Решение. В качестве нулевой гипотезы выдвигается предположение H_0 : $m_x - m_y = d = 1.3$. Проверка ведется в условиях неизвестных (но равных) дисперсий. В качестве статистики критерия значимости следует использовать случайную величину (4.45). Зададим уровень значимости $\alpha = 0.05$. Решение примера в среде Mathcad представлено на рис. 4.27.

Исходные выборки, записанные автоматическим регистратором активного вещества, имели текстовый формат (расширение *txt*). Для трансформации их в mcd-формат произведена запись выборок с использованием позиций **Insert/Date/File input** главного меню Mathcad. Это делается в двух верхних блоках, выделенных рамками (см. рис. 4.27). В результате получены две выборки (векторы **X** и **Y**).

Выборочные средние (обозначены на рис. 4.27 x_B и y_B) и выборочные дисперсии (обозначены S_x и S_y) определены с помощью встроенных функций **mean** и **Var**, вычисляющих эти параметры.

X :=  E:\Don't_touch\V

Y :=  E:\Don't_touch\Y

$$\alpha := 0.05 \quad b := 1 - \frac{\alpha}{2} \quad a := \frac{\alpha}{2} \quad b = 0.975 \quad \boxed{d := 1.3}$$

$$n := 25 \quad m := 25 \quad N := (n + m - 2) \quad N = 48$$

$$x_B := \text{mean}(X) \quad y_B := \text{mean}(Y) \quad \text{Вычисление выборочных средних и}$$

$$S_x := \text{Var}(X) \quad S_y := \text{Var}(Y) \quad \text{исправленных выборочных дисперсий}$$

$$x_B = 2.456 \quad \sqrt{S_x} = 0.456 \quad y_B = 1.223 \quad \sqrt{S_y} = 0.494$$

$$R := \frac{\sqrt{n \cdot m \cdot N}}{\sqrt{n + m} \cdot \sqrt{(n - 1) \cdot S_x + (m - 1) \cdot S_y}} \quad R = 7.434$$

$$\boxed{t_2 := \text{qt}(b, N)} \quad t_2 = 2.011$$

Квантиль t-распределения
порядка 0.975 с d степенями
свободы

$$\text{pt}(t_2, d) = 0.877$$

$$t_B := |x_B - y_B - d| \cdot R \quad \boxed{t_B = -0.495}$$

$$r := 0..4$$

$$x^{(r)} := \text{submatrix}(X, r.5, r.5 + 4, 0, 0) \quad y^{(r)} := \text{submatrix}(Y, r.5, r.5 + 4, 0, 0)$$

x =

	0	1	2	3	4
0	2.311	1.81	2.207	2.27	2.837
1	1.91	2.8	2.826	2.189	3.115
2	1.935	2.556	2.235	2.93	2.676
3	2.463	1.874	3.423	2.455	2.416
4	2.158	2.724	3.148	2.544	1.598

y =

	0	1	2	3	4
0	1.85	1.257	1.206	1.307	1.558
1	1.38	1.149	0.706	0.208	0.735
2	0.882	0.776	0.557	2.037	1.869
3	1.482	0.909	0.781	0.701	1.158
4	1.786	1.59	1.523	1.086	2.082

Рис. 4.27. Решение примера 4.17

Последовательно вычисляя выборочное значение статистики (4.45), получаем ее значение (обозначено t_B), равное (-0.495) . Поскольку квантиль t -распределения порядка 0.975 с $n^* = (n + m - 2) = 48$ степенями свободы равен 2.011 , и $0.495 < 2.011$, гипотеза о соответствии выборочных данных требованиям производства принимается. ■

Особенность решения задач с применением СКМ, в которых используются большие массивы исходных данных, заключается в трудности визуализации этих массивов и результатов их обработки. На экран компьютера не поместить вектор (матрицу), имеющий более 15 строк или столбцов. Поэтому часть исходных данных или результатов преобразований удобно представлять в трансформированном компактном виде. При решении примера 4.17 были использованы указанные выше выборки: в нижней части файла, показанного на рис. 4.27, приведены две матрицы, столбцы которых сформированы из исходных векторов-столбцов X и Y с помощью встроенной функции **submatrix**.

4.7.2. Проверка гипотезы о равенстве дисперсий двух нормальных распределений

Другой задачей сопоставительного анализа выборок служит проверка равенства дисперсий двух случайных величин. Задачи этого типа также относятся к проверкам однородности выборок. Поскольку в технических приложениях дисперсия служит количественным показателем точности измерительных систем и приборов, систем выработки параметров состояния динамических объектов, сопоставление дисперсий требуется при сравнительном анализе точностных характеристик этих систем и приборов.

Проверка гипотезы $H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$ производится на основе результатов, полученных в *разд. 3.5*.

Пусть, как и ранее (*см. разд. 3.5*), имеются две независимые выборки: X с элементами $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и Y с элементами $(y_1, y_2, \dots, y_m)$, а соответствующие случайные величины имеют нормальное распределение, причем

$$X_i \sim N(m_x, \sigma_x^2); Y_j \sim N(m_y, \sigma_y^2); \quad i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}.$$

В качестве статистики критерия значимости в данном случае следует принять соотношение (3.38), которое при справедливости гипотезы H_0 примет вид:

$$F^* = s_x^2 / s_y^2. \quad (4.46)$$

Как показано в *разд. 3.5*, случайная величина F^* имеет распределение Фишера $(n - 1)$ и $(m - 1)$ степенями свободы, т. е. $F^* \sim F_{n-1, m-1}$.

В подобных задачах обычно выбирается односторонняя критическая область, выбор типа которой определяется соотношением числителя и знаменателя в выражении (4.46). При $s_x^2 > s_y^2$ выбирается правосторонняя критическая область, поскольку выборочное значение F_B статистики (4.46) будет

больше единицы и контролю будут подлежать большие значения $F_{n-1,m-1}$. При $s_x^2 < s_y^2$ выбирают левостороннюю критическую область. При $s_x^2 < s_y^2$ можно рассматривать статистику $1/F^* = s_y^2/s_x^2$, которая также имеет распределение Фишера (см. прил. 11), но с $(m-1)$ и $(n-1)$ степенями свободы, т. е. $1/F^* \sim F_{m-1,n-1}$. Поэтому без потери общности можно считать, что выборка $\mathbf{X}$ имеет бóльшую выборочную дисперсию ($s_x^2 > s_y^2$) и проверка ведется с использованием правосторонней критической области по правилу:

1. Назначается уровень значимости α .
2. Определяется квантиль $F_{1-\alpha}$ распределения Фишера с $(n-1)$ и $(m-1)$ степенями свободы из условий $P[F^* < F_{1-\alpha}] = 1 - \alpha$.
3. Вычисление выборочного значения F_B статистики (4.46).
4. Сравнение F_B и $F_{1-\alpha}$. При $F_B < F_{1-\alpha}$, т. е. при попадании F_B в допустимую область, гипотеза H_0 принимается. В противном случае H_0 отвергается.

Пример 4.18. В условиях примера 4.17 проверить правильность предположения о равенстве дисперсий выборок $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ объемом $n = m = 25$, приведенные в прил. 14.

□ Решение. Проведем проверку при уровне значимости $\alpha = 0.03$. Результаты вычислений представлены на рис. 4.28.

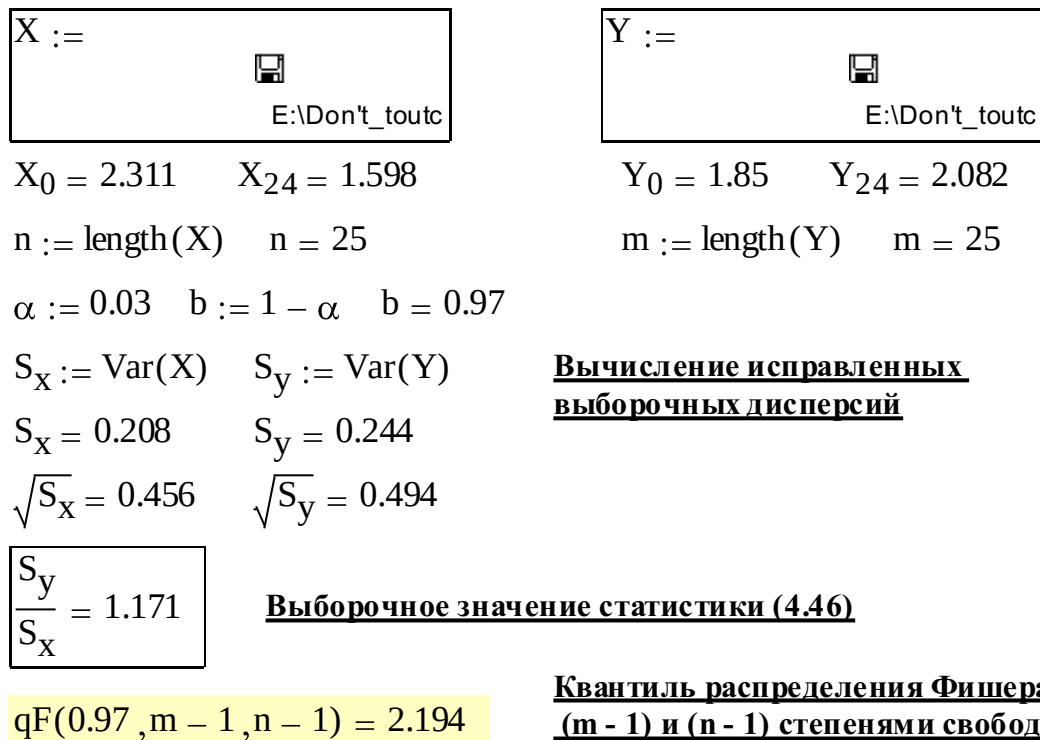


Рис. 4.28. Сопоставление двух выборочных дисперсий

В представленном файле (см. рис. 4.28) предварительно осуществляется ввод выборочных данных и проверка соответствия выборок тем данным, которые были использованы в примере 4.17 (см. рис. 4.27). Вычисления выборочных дисперсий показали, что $s_x^2 < s_y^2$, поэтому в качестве статистики (4.46) использована обратная величина, выборочное значение которой равно 1.171. Квантиль порядка 0.97 (левая граница правосторонней критической области) распределения Фишера с $(m - 1)$ и $(n - 1)$ степенями свободы определена с применением встроенной функции **qF**. Полученное значение квантили (2.194) больше выборочного значения статистики (1.171), поэтому принятое в примере 4.17 предположение о равенстве дисперсий можно считать правомочным. ■

При сравнении нескольких выборочных дисперсий, найденных по независимым выборкам, используются критерии Кокрена (для выборок одного объема) и Бартлетта (для выборок различных объемов) [4, 5]. Общая схема проверки с использованием этих критериев остается прежней.

4.7.3. Проверка гипотез об однородности выборок (критерии χ^2 , Смирнова, Уилкокса, знаков)

В практике статистической обработки данных наблюдений существует класс задач, связанный с необходимостью объединения нескольких массивов выборочных данных, полученных в разное время, из разнородных источников, от различных технических средств. Необходимость объединения нескольких выборок в одну диктуется желанием получить более полную информацию о наблюдаемых явлениях, повысить достоверность оценок параметров, повысить мощность критерия значимости при проверках гипотез. Возможность объединения выборочных данных существует в случаях, когда выборки принадлежат единой совокупности экспериментальных данных, т. е. выборки — однородны. Необходимыми условиями однородности выборок служат равенство математических ожиданий и дисперсий. Задачи проверки этих равенств рассматривались в *разд. 4.7.1* и *4.7.2*.

Проверка однородности выборок может осуществляться с применением различных критериев, часть из которых была рассмотрена выше. Одним из наиболее употребительных критериев при таких проверках служит критерий хи-квадрат, позволяющий анализировать однородность нескольких выборок.

Рассмотрим основные положения подхода, связанного с применением критерия хи-квадрат при проверке однородности выборок, учитывая, что общая схема проверки и особенности критерия хи-квадрат были достаточно подробно рассмотрены в *разд. 4.2* и *4.6.1*.

Критерий χ^2 . Пусть имеется s независимых выборок с объемами $n_1, n_2, \dots, n_j, \dots, n_s$ и суммарным объемом n . Пусть также каждая из выборок распадается на L групп h_i ($i = \overline{1, L}$) таких, что в группу h_i попадает n_{ij} элементов j -ой выбор-

ки. Требуется проверить гипотезу H_0 о том, что все выборки однородны, т. е. получены в результате экспериментов над одной случайной величиной.

Если выборки однородны, то с ростом объема выборки n_j относительные частоты $w_{ij} = n_{ij} / n_j$ попадания элементов j -ой выборки в группу h_i будут приближаться к вероятности p_i . Поэтому для j -ой выборки статистика критерия значимости может быть записана в форме, аналогичной (4.35):

$$\chi_j^* = \sum_{i=1}^L \frac{(n_{ij} - p_i n_j)^2}{p_i n_j} = \sum_{i=1}^L \frac{(n_{ij} - n'_{ij})^2}{n'_{ij}}.$$

Здесь $n'_{ij} = p_i n_j$ — теоретические частоты попаданий элементов j -ой выборки в группу h_i .

Для всех выборок, в совокупности составляющих массив объемом n , статистика критерия значимости примет вид:

$$\chi^* = \sum_{j=1}^s \chi_j^* = \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^L \frac{(n_{ij} - n'_{ij})^2}{n'_{ij}}. \quad (4.47)$$

Показано [8], что статистика (4.47) имеет асимптотическое ($n \rightarrow \infty$) распределение, принадлежащее закону χ^2 с $(s-1)(L-1)$ степенями свободы.

Имеют место следующие равенства:

$$\sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^L n_{ij} = n; \quad \sum_{i=1}^L n_{ij} = n_j; \quad \sum_{j=1}^s n_{ij} = v_i; \quad \sum_{i=1}^L v_i = \sum_{j=1}^s n_j = n. \quad (4.48)$$

Здесь n_j — объем j -ой выборки, v_i — число элементов всех выборок, попавших в группу h_i .

В случае, когда имеется предположение о виде распределения случайной величины, теоретические частоты n'_{ij} в выражении (4.47) могут быть определены с использованием процедуры, описанной в *разд. 4.6.1*. Если предположение о виде распределения отсутствует, получают точечные оценки частот n'_{ij} , применяя метод максимального правдоподобия. Выражения для оценок имеют вид [5]: $\hat{n}'_{ij} = n_j v_i / n$.

Подставляя оценки $\hat{n}'_{ij}$ в выражение (4.47), с учетом (4.48) получаем:

$$\chi^* = n \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^L \frac{(n_{ij} - n_j v_i / n)^2}{n_j v_i} = n \left(\sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^L \frac{n_{ij}^2}{n_j v_i} - 1 \right). \quad (4.49)$$

При $n \rightarrow \infty$ статистика (4.49) имеет асимптотическое χ^2 -распределение, с $(s-1)(L-1)$ степенями свободы [5, 8].

Проверка однородности выборок производится в рамках общих процедур, описанных в *разд. 4.2* и *4.6*.

При анализе однородности двух выборок, статистика (4.49) имеет вид:

$$\chi^* = n \left[\sum_{i=1}^L \frac{1}{v_i} \left(\frac{n_{i1}^2}{n_1} + \frac{n_{i2}^2}{n_2} \right) \right] - n, \quad (4.50)$$

где n_{i1} и n_{i2} — число элементов первой и второй выборок, попавших в группу h_i ; $v_i = (n_{i1} + n_{i2})$ — общее число элементов двух выборок, попавших в группу h_i ; n_1 и n_2 — объемы первой и второй выборок ($n_1 + n_2 = n$).

Используем полученные выражения для анализа выборок, которые были введены ранее в примерах 4.17 и 4.11.

Пример 4.19. Проанализировать однородность выборок **X** и **Y**, приведенных в прил. 14, используя критерий хи-квадрат. Эти выборки были использованы в примере 4.17 (см. рис. 4.27). Там же были получены их характеристики.

□ Решение. Выдвигается гипотеза об однородности выборок **X** и **Y** (объемом $n_1 = n_2 = 25$, $n = 50$). Примем уровень значимости $\alpha = 0.05$.

Вычисление выборочного значения статистики (4.50) проведем в несколько этапов:

1. Объединим два $(n_1 \times 1)$ и $(n_2 \times 1)$ -вектора **X** и **Y** в один массив (вектор-столбец) **XY** размером $(n \times 1)$, имея цель определить число групп (промежутков) L , ширину промежутков h_i ($i = \overline{1, L}$) и их границы.

2. Используя выбранное разбиение диапазона выборочных значений на разряды, по данным вектора **XY** определим общее число элементов v_i двух выборок, попавших в группу h_i .

3. Для того же разбиения на разряды определяем n_{i1} и n_{i2} по данным векторов **X** и **Y**.

В среде Mathcad намеченные позиции могут быть выполнены с применением функций **stack**. (п. 1) и **hist** (п. 2 и п. 3). Рис. 4.29 содержит копию фрагментов mcd-файла, началом которого служит ввод выборок **X** и **Y**, предварительное определение границ промежутков (вектор **Int0**) и частот (вектор **f0**). Ввод был показан на рис. 4.27, а определение векторов **Int0** и **f0** приведено, например, на рис. 4.22, а. Поэтому указанные части на рис. 4.29 не приводятся.

$XY := \text{stack}(X, Y)$	$XY_0 = 2.311$	$XY_{24} = 1.598$
	$XY_{25} = 1.85$	$XY_{49} = 2.082$

Рис. 4.29, а. Объединение выборочных данных

Во фрагменте, изображенном на рис. 4.29, а, производится объединение векторов в единый (50×1) -вектор **XY**; для пояснения структуры этого вектора выведены начальные и конечные значения составляющих его векторов **X** и **Y**, значения которых приведены ранее (см. рис. 4.27).

После объединения ряда предварительно определенных промежутков, выбрано $L = 5$ промежутков с границами, составляющими вектор **Int** (см. рис. 4.29, б). Частоты v_i , n_{i1} и n_{i2} определены (см. рис. 4.29, б) с применением встроенной функции **hist** и содержатся в векторах **f**, **fx** и **fy** соответственно. Суммы элементов каждого из этих векторов дают значения $n = 50$, $n_1 = n_2 = 25$. Выборочное значение статистики (4.50), обозначенное на рис. 4.29, б через χ^2 уровня $\gamma = 1 - \alpha = 0.95$ с $L - 1 = 4$ степенями свободы, которая равна 9.488. Выдвинутая гипотеза об однородности выборок **X** и **Y** противоречит имеющимся данным. ■

$$\begin{aligned}
 \alpha &:= 0.05 & \gamma &:= 1 - \alpha & \gamma &= 0.95 \\
 \text{Int} &:= (0 \quad 1 \quad 1.5 \quad 2 \quad 2.5 \quad 3.5)^T & \boxed{b} &:= 5 & i &:= 0..b-1 \\
 \boxed{f} &:= \text{hist}(\text{Int}, XY) & f^T &= (9 \quad 8 \quad 11 \quad 11 \quad 11) & n &:= \sum_i f_i & n &= 50 \\
 fx &:= \text{hist}(\text{Int}, X) & fx^T &= (0 \quad 0 \quad 5 \quad 9 \quad 11) & nx &:= \sum_i fx_i & nx &= 25 \\
 fy &:= \text{hist}(\text{Int}, Y) & fy^T &= (9 \quad 8 \quad 6 \quad 2 \quad 0) & ny &:= \sum_i fy_i & ny &= 25 \\
 \chi^2 &:= n \cdot \left[\sum_i \frac{1}{f_i} \cdot \left[\frac{fx_i^2}{nx} + \frac{fy_i^2}{ny} \right] \right] - n & \chi^2 &= 32.545 & qchisq & \gamma, 4 = 9.488
 \end{aligned}$$

Рис. 4.29, б. Решение примера 4.19

Результаты решения примеров 4.17 и 4.18 объясняют причину отклонения гипотезы об однородности выборок **X** и **Y**.

Эти выборки сформированы из значений случайных величин, имеющих практически одинаковые дисперсии и различные математические ожидания. Как отмечалось ранее, необходимым условием однородности выборок служит равенство или достаточная близость числовых характеристик случайных величин. Рассмотрим другой пример, где это условие выполняется.

Пример 4.20. Из выборочных данных, представленных в табл. 4.5 (см. пример 4.11,) образовать две выборки равного объема и проверить их однородность, используя критерий χ^2 .

□ Решение. Исходная выборка имеет объем $n = 100$. Предварительно следует преобразовать матрицу **X** (табл. 4.5) в вектор-столбец **y**. Это было сделано в начальной части рис. 4.22, а. Образует из полученного (100×1) -вектора **y** два (50×1) -вектора **x1** и **x2**. Анализ однородности этих выборочных данных проведем при уровне значимости $\alpha = 0.05$. Как и в предыдущей задаче, объединенные выборочные данные (вектор **y** в рассматриваемом случае) служат

базой для получения значений v_i ; векторы **x1** и **x2** позволят нам найти значения n_{i1} и n_{i2} . Результаты решения (Mathcad) приведены на рис. 4.30.

Образуем вектор **x1** из 50 верхних элементов вектора **y**, а вектор **x2** — из 50 нижних, воспользовавшись встроенной функцией **submatrix** (рис. 4.30, а).

$x1 := \text{submatrix}(y, 0, 49, 0, 0)$	$x1_0 = 0.781$	$x1_{49} = 1.081$
$x2 := \text{submatrix}(y, 50, 99, 0, 0)$	$x2_0 = 1.214$	$x2_{49} = 1.19$

Рис. 4.30, а. Формирование выборок

Опуская промежуточные вычисления, связанные с объединением малочисленных промежутков (выполнено аналогично начальной части рис. 4.22, а), приведем решение рассматриваемой задачи (см. рис. 4.30, б) с краткими комментариями, указывая в скобках соответствующие обозначения.

$\text{Int} := (-0.5 \ 0 \ 0.5 \ 1 \ 1.5 \ 3)^T$			$b := 5$	$i := 0..b-1$
$f := \text{hist}(\text{Int}, y)$	$f^T = (4 \ 16 \ 32 \ 39 \ 9)$	$n := \sum_i f_i$	$n = 100$	
$f1 := \text{hist}(\text{Int}, x1)$	$f1^T = (2 \ 3 \ 18 \ 23 \ 4)$	$n1 := \sum_i f1_i$	$n1 = 50$	
$f2 := \text{hist}(\text{Int}, x2)$	$f2^T = (2 \ 13 \ 14 \ 16 \ 5)$	$n2 := \sum_i f2_i$	$n2 = 50$	
$\text{chi} := n \cdot \left[\sum_i \frac{1}{f_i} \cdot \left[\frac{f1_i^2}{n1} + \frac{f2_i^2}{n2} \right] \right] - n$			$\text{chi} = 8.118$	
			$\text{qchisq}(\gamma, 4) = 9.488$	

Рис. 4.30, б. Проверка однородности выборок по критерию χ^2

Границы выбранных промежутков введены в вектор **Int**. Значения v_i , n_{i1} и n_{i2} (элементы векторов **f**, **f1**, **f2** в файле на рис. 4.30, б) определены по выборочным данным **y**, **x1** и **x2** с помощью функции **hist**. Выборочное значение статистики (4.50) в данном случае равно 8.118, что меньше квантили распределения χ^2 уровня $\gamma = 1 - \alpha = 0.95$ с $L - 1 = 4$ степенями свободы, равной 9.488. Выдвинутая гипотеза об однородности выборок **x1** и **x2** не противоречит имеющимся данным. ■

Критерий Смирнова. Критерий базируется на теоретическом результате, полученном А. Н. Колмогоровым (см. разд. 4.6.2) применительно к задаче проверки гипотезы о виде распределения. С помощью статистики (4.39) в критерии Колмогорова сопоставляются гипотетическая и эмпирическая функции

распределения. Для задач проверки однородности двух независимых выборок X и Y объемом m и n Н. В. Смирновым была предложена статистика вида [1]:

$$D_{mn} = \sup_{x,y} |F_m(x) - F_n(x)|, \quad (4.51)$$

где $F_m(x)$, $F_n(x)$ — эмпирические функции распределения, полученные по выборкам X и Y . В работе [5] показано, что распределение случайной величины (4.51) в пределе стремится к распределению Колмогорова:

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} P(\lambda_{mn} < x) = K(x); \quad \lambda_{mn} = D_{mn} / \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}, \quad (4.52)$$

где $K(x)$ — функция Колмогорова (4.40).

При правосторонней критической области на уровне значимости α левую границу этой области будет определять квантиль $x_{1-\alpha}$ порядка $(1 - \alpha)$ распределения (4.40), удовлетворяющий уравнению $K(x_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$.

Этот результат позволяет проводить проверку однородности выборок согласно общей схеме:

- используя выборочные данные, определяются: выборочные значения D_B и λ_B статистики D_{mn} (4.51) и λ_{mn} (4.52);
- находится квантиль $x_{1-\alpha}$ распределения (4.40) путем решения уравнения $K(x_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$ (см. рис. 4.25,б);
- сравниваются значения λ_B и $x_{1-\alpha}$. При $\lambda_B > x_{1-\alpha}$ нулевая гипотеза $H_0: F(x) = F_0(x)$ отклоняется в пользу альтернативы $H_1: F(x) \neq F_0(x)$; при $\lambda_B \leq x_{1-\alpha}$ нулевая гипотеза принимается на уровне значимости α .

Критерий Смирнова осуществляет проверку распределения путем прямого сопоставления эмпирических функций распределения анализируемых выборок. При $n \rightarrow \infty$ и истинности нулевой гипотезы случайная величина D_{mn} (4.51) будет стремиться к нулю.

Таким образом, процедура проверки однородности выборок по критерию Смирнова близка к процедуре проверки вида распределения по критерию Колмогорова (см. разд. 4.6.2). Отличие заключается в том, что по выборочным данным требуется вычислить две эмпирические функции распределения с целью получения их разности в выражении (4.51). Это, в свою очередь, требует, чтобы массивы значений $F_m(x)$ и $F_n(x)$ имели одинаковое число элементов, несмотря на возможное различие в объемах выборок m и n . Последнее требование можно выполнить, объединяя выборки X и Y в общую выборку Z объема $(m + n)$. Тогда значения эмпирических функций распределения $F_m(x)$ и $F_n(x)$ можно получить путем последовательного суммирования относительных частот попадания элементов X и Y в промежутки группированного статистического ряда, сформированного из Z , или не прибегая к группированию элементов Z .

Применение систем компьютерной математики позволяют решать большинство прикладных задач математической статистики на основе непосредст-

венного использования всех выборочных данных, без их группирования. При этом исключаются известные методические погрешности, сопровождающие статистический анализ на основе группированных рядов, когда выборка заменяется средними значениями промежутков и частотами попаданий в эти промежутки. Рассмотрим пример, в котором на основе критерия Смирнова проводится анализ однородности двух выборок различных объемов.

Пример 4.21. Из выборочных данных, представленных в табл. 4.5 (см. пример 4.11), образовать две выборки объемом 40 и 60. Проверить однородность этих выборок на основе критерия Смирнова.

□ Решение. Исходная выборка y , составленная по данным табл. 4.5, как и в примере 4.20, имеет объем $n = 100$. образуем из (100×1) -вектора y два вектора $x1$ и $x2$, размерности которых (40×1) и (60×1) соответственно. Анализ однородности этих выборочных данных проведем, как и в предыдущем примере, при уровне значимости $\alpha = 0.05$.

образуем вектор $x1$ из 40 верхних элементов вектора y ; остальные элементы вектора y отнесем к вектору $x2$. Формирование этих векторов осуществим с применением встроенной функцией **submatrix** (см. рис. 4.31).

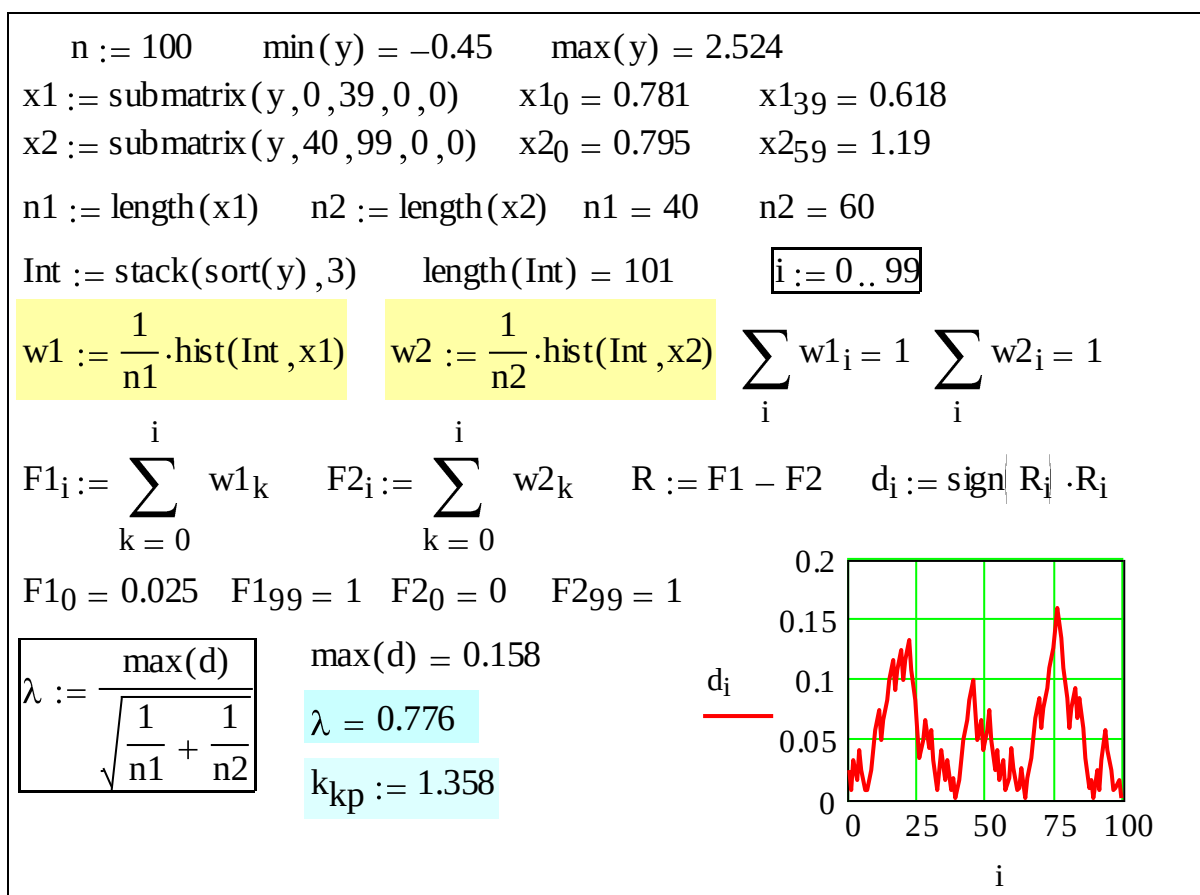


Рис. 4.31. Проверка однородности выборок по критерию Смирнова

Отсортируем элементы вектора по возрастанию и добавим к полученному вариационному ряду 101-ый элемент, равный 3. Полученный вектор **Int** (см. рис. 4.31) в данном случае служит аналогом вектора, в котором в предыдущих

примерах размещались значения границ промежутков. С помощью встроенной функции **hist**, аргументами которой служат вектор **Int** и один из векторов выборочных данных (**x1** или **x2**), определены относительные частоты для элементов выборок **x1** и **x2** (векторы **w1** и **w2** на рис. 4.31) соответственно. Эмпирические функции распределения для выборок (векторы **F1** и **F2** на рис. 4.31) получены последовательным суммированием относительных частот. Образуя разности эмпирических функций распределения (вектор **R**), вычисляем абсолютные значения разностей (вектор **d**), выборочное значение статистики D_B (**max(d)**) и значение параметра λ_B по формулам (4.51) и (4.52). Элементы вектора **d** выведены на график (см. рис. 4.31). Полученное значение $\lambda_B = 0.776$.

Значение критической точки — квантили порядка 0.95 распределения Колмогорова, было определено ранее (см. рис. 4.25, б) в результате решения уравнения $\{K(x_{1-\alpha}) = 1 - \alpha\}$ с помощью вычислительного блока и равно 1.358. Значение параметра $\lambda_B = 0.776$ не попало в критическую область, поэтому выборки **x1** и **x2** можно считать однородными. ■

В файле, фрагмент которого приведен на рис. 4.31, по соображениям экономии места не приведено множество дополнительной информации, касающейся состава векторов абсолютных и относительных частот для выборок **x1** и **x2**, элементов векторов эмпирических функций распределения и др. Каждый из этих векторов имеет размерность (100×1) и их выведение существенно увеличило бы объем иллюстративного материала. Это касается и других иллюстраций к предыдущим примерам.

Однако при решении подобных задач можно рекомендовать читателю выводить структуры промежуточных результатов на экран компьютера. Это позволит более глубоко проникнуть в сущность решаемой задачи и избежать возможных погрешностей.

Критерий Уилкокса. Этот критерий позволяет анализировать однородность двух выборок. Он основан на подсчете числа инверсий, т. е. числа нарушений порядков следования элементов первой и второй выборок в объединенном вариационном ряду.

Пусть, например, из двух выборок **X** и **Y** с элементами $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ сформирован следующий вариационный ряд:

$$y_1, x_1, x_2, y_2, y_3, y_4, x_3, y_5, y_6, x_4, \dots$$

Если какому-либо элементу выборки **X** предшествует некоторый элемент **Y**, то говорят, что эта пара элементов дает инверсию. В приведенном вариационном ряду x_1 и x_2 дают по одной инверсии с y_1 ; x_3 дает 4 инверсии с y_1, y_2, y_3 и y_4 ; x_4 — 6 инверсий с $y_1, y_2, \dots, y_6$. Всего в приведенном фрагменте вариационного ряда $V = 1 + 1 + 4 + 6 = 12$ инверсий.

Гипотеза H_0 , заключающаяся в том, что выборки **X** и **Y** принадлежат одной случайной величине (имеют одинаковое распределение), принимается, если общее число инверсий не превышает установленного порога. Известен результат [1], согласно которому число инверсий имеет при $n > 10, m > 10$ рас-

пределение, приближенно соответствующее нормальному распределению с математическим ожиданием и дисперсией, равными

$$M(V) = mn / 2; D(V) = mn (m + n + 1) / 12.$$

В качестве статистики критерия значимости может быть принято число инверсий V или нормированное число инверсий $V^* = [V - M(V)] / \sqrt{D(V)}$. Тогда, при заданном уровне значимости α , пороговые значения для V или V^* будут определяться квантилями нормальных распределений $N[M(V), D(V)]$ или $N(0, 1)$.

Критерий знаков. При проведении предварительного анализа однородности двух выборок равного объема X и Y с элементами $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \dots, y_n)$, может быть использован критерий знаков [1].

Основой критерия знаков служит подсчет числа плюсов и минусов разностей $d_i = x_i - y_i$; $i = \overline{1, n}$. Предполагается, что, при однородности выборок X и Y плюсы и минусы в последовательности чисел d_i должны встречаться одинаково часто, т. е. выборка d с элементами $(d_1, d_2, \dots, d_n)$, сформированная в результате экспериментов над одной случайной величиной, должна иметь одинаковое число положительных и отрицательных чисел. На этом предположении строится нулевая гипотеза H_0 .

Таким образом, выборочные данные, содержащиеся в векторе d , можно рассматривать в качестве результатов n независимых экспериментов, при проведении каждого из которых возможны два исхода («плюс» или «минус»). Равенство некоторых результатов нулю исключается из рассмотрения и объем выборки уменьшается на число нулевых результатов.

Вероятность появления положительных и отрицательных результатов равна 0.5, т. е. d имеет в данном случае биномиальное распределение с вероятностью успеха $p = P(\text{«+»}) = 0.5$. В качестве критической целесообразно выбрать двустороннюю область (см. рис. 4.1) с критическими точками $k_{1кр}$ и $k_{2кр}$, причем

$$P(k_+ \leq k_{1кр}) + P(k_+ \geq k_{2кр}) = \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha, \quad (4.53)$$

где k_+ — число положительных результатов экспериментов; α — уровень значимости. Примем в дальнейших выкладках $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$.

В процессе анализа числа знаков в выборке d фиксируют число k_+ положительных результатов и k_- — число отрицательных результатов, из которых выбирают наименьшее k_m . Если $k_m = k_+$, то при $k_m \leq k_{1кр}$ нулевая гипотеза H_0 отклоняется; если $k_m = k_-$, то H_0 отклоняется при $k_m \geq k_{2кр}$.

Критические точки $k_{1кр}$ и $k_{2кр}$ определяются как квантили биномиального распределения порядков $\alpha/2$ и $(1 - \alpha/2)$ соответственно.

Пример 4.22. Проверить с применением критерия знаков однородность двух выборок, объемом $n = 50$ каждая, сформированных в примере 4.20.

□ Решение. Выборки были образованы разделением выборочных данных, представленных в табл. 4.5 (см. пример 4.11), на две равные части. Начальные и конечные значения выборок приведены на рис. 4.30, *a*.

На рис. 4.32 представлена копия mcd-файла с решением данной задачи при уровне значимости $\alpha = 0.05$. В файле (см. рис. 4.32) сохранены обозначения выборок, принятые на рис. 4.30, *a*.

Анализ разности векторов выборочных данных (вектора **d**) показал, что результатами экспериментов являются $k_+ = 29$, $k_- = 21$. Эти значения получены с применением простого цикла (см. рис. 4.32). Критические точки определялись с помощью встроенных функций **qbinom** и равны: $k_{1кр} = 18$, $k_{2кр} = 32$. Полученные результаты показывают, что числа знаков входят в допустимую область, что свидетельствует о нулевой гипотезе об однородности выборок не противоречит исходным данным.

```

x1 := submatrix(y, 0, 49, 0, 0)  x10 = 0.781  x149 = 1.081
x2 := submatrix(y, 50, 99, 0, 0) x20 = 1.214  x249 = 1.19

d := x1 - x2      i := 0.. 49

s :=
  r ← 0
  v ← 0
  for k ∈ 0.. 49
    if dk > 0
      r ← r + 1
    else
      v ← v + 1
  stack(r, v)

```

$s = \begin{pmatrix} 29 \\ 21 \end{pmatrix}$

$k_{1кр} := \text{qbinom}(0.025, 50, 0.5)$
 $k_{2кр} := \text{qbinom}(0.975, 50, 0.5)$

$k_{1кр} = 18$

$k_{2кр} = 32$

sign(d) =

	0
0	-1
1	-1
2	1
3	-1
4	-1
5	1
6	-1
7	1
8	1
9	1
10	1
11	1

Рис. 4.32. Проверка однородности выборок по критерию знаков

Глава 5. ОСНОВЫ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА

В практике анализа систем различных классов (технических, экономических, социальных, биологических и др.) большое распространение получили задачи, связанные с построением математических моделей наблюдаемых процессов и явлений. В простейшем случае сущность таких задач заключается в определении параметров заданного математического выражения, наилучшим образом соответствующего наблюдаемым данным. Если такое выражение — линейная функция искомых параметров, подобные задачи относятся к классу линейных и их решение может быть получено без привлечения поисковых процедур. В случае нелинейной зависимости решение достигается, в общем случае, с применением алгоритмов поиска. Среди задач этого класса выделяются задачи регрессии, выявляющие зависимости одной случайной величины от другой (одномерная регрессия) или — нескольких случайных величин (множественная, многофакторная регрессия).

Задачи, рассматриваемые ниже, решаются в рамках общей теории оценивания. Помимо методов точечного и интервального оценивания, рассмотренных в главах 2 и 3, современная теория оценивания включает также и задачи оценивания состояний динамических объектов на основе фильтрации, интерполяции (сглаживания), экстраполяции (прогнозирования), которые служат основой создания информационно-вычислительных и управляющих систем подвижных объектов [10, 12, 13]. Эти задачи входят в специальные разделы математической статистики и здесь не рассматриваются.

Ниже основное внимание уделяется задачам линейной регрессии, решение которых находится в рамках теории точечного и интервального оценивания без применения поисковых процедур. В конце главы кратко описываются подходы к решению нелинейных задач.

5.1. Задачи регрессии

Пусть наблюдению подлежит случайная величина Y , в общем случае зависящая от одной или нескольких других случайных (или неслучайных) величин $X_1, X_2, \dots, X_k$. Величину Y называют выходной переменной или **откликом**, а $X_1, X_2, \dots, X_k$ — входными переменными, **факторами**. Целью исследования служит получение зависимости $y = \overline{f}(x_1, x_2, \dots, x_k)$, где y и x_j — значения отклика и факторов соответственно ($j = \overline{1, k}$).

Число влияющих на Y факторов определяется изученностью анализируемых процессов; в общем случае число факторов может быть неизвестным. Исследователь, опираясь на результаты предварительных исследований, выбирает k факторов в качестве наиболее существенных или известных. В этих условиях строгая функциональная зависимость между Y и X недостижима по причинам влияния множества дополнительных неопределенных факторов, кото-

рые выступают в качестве случайных воздействий на исследуемые процессы. Это означает, что между Y и X существует лишь стохастическая (вероятностная) связь $y \approx f(x_1, x_2, \dots, x_k)$, выявление которой и составляет сущность задачи регрессии.

Общая задача регрессионного анализа заключается в следующем. Рассматривая процесс наблюдений как последовательность экспериментов, в каждом i -ом эксперименте фиксируются значения отклика y_i и факторов $(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki})$, соотношения между которыми записываются в виде

$$y_i = f(\mathbf{X}_i, \beta) + \varepsilon_i, i = \overline{1, n}. \quad (5.1)$$

Здесь $\mathbf{X}_i = (x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki})^T$ — $(k \times 1)$ -вектор значений факторов в i -ом испытании, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)^T$ — вектор неизвестных параметров, ε_i — случайная величина, характеризующая ошибку (невязку) соответствия y_i и $f(\mathbf{X}_i, \beta)$ в i -ом испытании. Задача регрессии заключается в определении оценок $\hat{\beta}$ неизвестных параметров и построении оценки функциональной зависимости между откликом и факторами вида:

$$\hat{y} = f(\mathbf{X}, \hat{\beta}). \quad (5.2)$$

Выбирая один из допустимых по условиям задачи вариантов регрессионной зависимости $f(\mathbf{X}_i, \beta)$, исследователь решает задачу регрессии в рамках той или иной меры близости (точности).

Рассмотрим задачу регрессии при наличии одного фактора, влияющего на наблюдаемую переменную. Учет влияния нескольких факторов будет проведен ниже, при рассмотрении множественной регрессии.

Различают задачи линейной и нелинейной регрессии. В задачах **линейной регрессии** зависимости $f(\mathbf{X}_i, \beta)$ в (5.1) имеют линейный относительно неизвестных параметров β вид, например,

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon; \quad (5.3)$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \varepsilon; \quad (5.4)$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 \sin(x) + \varepsilon. \quad (5.5)$$

Выражения (5.3) и (5.5) соответствуют варианту простой линейной регрессии, выражение (5.4) — полиномиальной (квадратичной) регрессии. Задача (5.3) также может быть названа задачей полиномиальной регрессии, поскольку зависимость $f(\mathbf{X}_i, \beta)$ выражена здесь полиномом первого порядка.

Задачи **нелинейной регрессии** предполагают нелинейный относительно неизвестных параметров характер регрессионных зависимостей $f(\mathbf{X}_i, \beta)$. Простейшим примером таких задач служит экспоненциальная связь факторов и отклика вида $y = \exp(\beta x) + \varepsilon$. Некоторые из задач нелинейной регрессии с помощью функциональных преобразований могут быть сведены к линейному случаю (см. разд. 5.5). Однако решение большинства задач нелинейной регрессии требует привлечения поисковых процедур [5, 17].

В задачах регрессии с моделью в форме (5.1) предполагается, что невязки ε_i — независимые случайные величины, имеющие одинаковый закон распре-

деления с нулевым математическим ожиданием $M(\varepsilon_i) = 0$ и дисперсией $D(\varepsilon_i) = \sigma^2$. Эти величины образуют вектор невязок $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)^T$, математическое ожидание которого соответствует нулевому вектору, а ковариационная матрица $\text{cov}(\varepsilon) = \sigma^2 \mathbf{E}_n$, где $\mathbf{E}_n$ — единичная матрица порядка n .

В разд. 7.7 первой части регрессионные зависимости и их основные свойства рассматривались с позиции условных распределений. Из этого материала следовало, что уравнению регрессии Y на X соответствует условное математическое ожидание $M(Y/X)$ (7.97). Уравнение регрессии геометрически объединяет центры условных распределений Y , соответствующих заданным значениям факторов. Отсюда следует, что регрессионная зависимость (5.2) отображает связь Y и X лишь в среднем и решение задач регрессии всегда сопровождается наличием погрешностей. Эти погрешности зависят от степени соответствия математической модели (5.1) истинной природе взаимосвязи Y и X .

Следует отметить, что общей теории выбора вида зависимости $f(X_i, \beta)$ в (5.1) не существует. Выбор регрессионных зависимостей при решении конкретных задач регрессии (как и других задач аппроксимации) исследователь осуществляет, пользуясь чаще всего теоретическими представлениями о возможном характере взаимосвязи Y и X , иногда — результатами визуального анализа графиков, на которые нанесены результаты наблюдений. Ниже показано, что каждый вид зависимости $f(X_i, \beta)$ в конкретной задаче регрессии может быть охарактеризован количественной мерой погрешности. Это позволяет осуществлять выбор наиболее рациональной зависимости путем сопоставительного анализа ряда вариантов задач регрессии. Такое сопоставление вариантов требует выполнения больших объемов вычислений, но применение систем компьютерной математики в значительной мере устраняет эти трудности, позволяя по результатам сопоставления вариантов выбрать наилучший из них.

5.2. Линейная регрессия. Метод наименьших квадратов

Пусть по данным наблюдений получены вектор $\mathbf{Y}$ значений откликов y_i и вектор $\mathbf{X}$ значений фактора x_i , $i = \overline{1, n}$. Используя эти данные, требуется построить, например, простую линейную регрессию (5.3):

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (5.6)$$

где β_0, β_1 — неизвестные параметры, подлежащие определению; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ — независимые нормально распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, т. е. $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma)$.

Значения ε_i могут быть вызваны совокупным влиянием множества независимых случайных воздействий, таких как инструментальные погрешности приборов наблюдений, методические погрешности процессов измерений, случайным разбросом условий проведения испытаний и проч. Это совокупное

влияние разнообразных причин служит обоснованием предположения о нормальном распределении величин ε_i в силу центральной предельной теоремы.

Представим n уравнений (5.6) в векторно-матричной форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \mathbf{A}\beta + \varepsilon, \quad \mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T, \\ \varepsilon &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)^T, \quad \mathbf{R} = \text{cov}(\varepsilon) = \sigma^2 \mathbf{E}_n. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Здесь β — вектор неизвестных параметров, для случая простой линейной регрессии имеющий вид $\beta = (\beta_0, \beta_1)^T$; $\mathbf{R}$ — $(n \times n)$ -ковариационная матрица вектора ε ; $\mathbf{E}_n$ — единичная матрица порядка n . Заметим, что выражение (5.7) служит общей формой для задач линейной регрессии, конкретный вариант которых определяется размерностью вектора β и структурой матрицы $\mathbf{A}$.

Для варианта простой линейной регрессии (5.6) вектор β имеет два элемента, а $(n \times 2)$ -матрица $\mathbf{A}$ имеет два столбца, первый из которых содержит n единиц, а второй соответствует вектору $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{1} \mid \mathbf{X}] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}; \quad \beta = [\beta_0, \beta_1]^T. \quad (5.8)$$

Задача линейной регрессии состоит в получении вектора $\hat{\beta}$ оценок неизвестных параметров. Для ее решения необходимо ввести критерий близости элементов вектора $\mathbf{Y}$ и вектора регрессионных зависимостей $\mathbf{A}\beta$. Этот критерий обычно формируется в виде суммы квадратов отклонений элементов вектора $\mathbf{Y}$ от $\mathbf{A}\beta$, т. е. в виде суммы квадратов элементов вектора ε (квадратов невязок). Например, в задаче простой линейной регрессии критерий записывается в виде суммы квадратов отклонений элементов вектора $\mathbf{Y}$ от прямой линии с параметрами (β_0, β_1) :

$$G(\beta) = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2. \quad (5.9)$$

Для определения параметров линейной регрессии следует найти минимум критерия подобного вида. Минимизация критериев вида (5.9) составляет сущность метода наименьших квадратов (МНК). Этот метод позволяет получить решение в двух видах — в форме обобщенного обращения неквадратной матрицы $\mathbf{A}$ и в рекуррентной форме. Последняя форма удобна в практических приложениях для получения текущих оценок параметров β в процессе последовательных наблюдений. Она будет рассмотрена ниже.

5.2.1. Алгоритм МНК в форме обобщенного обращения матрицы

Для решения задачи линейной регрессии перепишем критерий (5.9), вводя в рассмотрение скалярное произведение $(\varepsilon^T \varepsilon)$ и след матрицы $(\varepsilon \varepsilon^T)$:

$$G(\beta) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \varepsilon^T \varepsilon = \text{sp}(\varepsilon \varepsilon^T). \quad (5.10)$$

Здесь ε — вектор невязок (5.7); sp — обозначение следа матрицы. Основные свойства следа матрицы приведены в прил. 15. В данном случае $(\varepsilon\varepsilon^T)$ — симметричная $(n \times n)$ -матрица, на диагонали которой расположены ε_i^2 .

Из соотношений (5.10) следует, что результат решения рассматриваемой задачи может быть получен как минимизацией скалярного произведения $\varepsilon^T\varepsilon$, так и минимизацией следа матрицы $(\varepsilon\varepsilon^T)$. В этих целях может быть использовано векторное и матричное дифференцирование, основные формулы которых приведены в прил. 15. Так, для критерия (5.10) в виде скалярного произведения $\varepsilon^T\varepsilon$, в силу (5.7), имеем

$$G(\beta) = \varepsilon^T\varepsilon = (\mathbf{Y}^T - \beta^T\mathbf{A}^T)(\mathbf{Y} - \mathbf{A}\beta) = \mathbf{Y}^T\mathbf{Y} - \beta^T\mathbf{A}^T\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^T\mathbf{A}\beta + \beta^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\beta. \quad (5.11)$$

Из необходимых условий $\partial(\varepsilon^T\varepsilon) / \partial\beta = 0$ минимума, применяя формулы 7 и 6 (см. прил. 15) к третьему и четвертому слагаемым (5.11) соответственно, получаем

$$2\beta^T\mathbf{A}^T\mathbf{A} - 2\mathbf{Y}^T\mathbf{A} = \mathbf{0}. \quad (5.12)$$

Выражение (5.12) учитывает, что второе и третье слагаемые в (5.11) — взаимно транспонированные. После транспонирования (5.12), выражение для оценок вектора искомых параметров принимает вид:

$$\hat{\beta} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Y}. \quad (5.13)$$

Здесь предполагается, что матрица $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ — неособенная.

Покажем теперь, что результирующее выражение (5.13) достаточно просто получить и с использованием следа матрицы $(\varepsilon\varepsilon^T)$ в качестве критерия (5.10). Для этого случая получаем:

$$\text{sp}(\varepsilon\varepsilon^T) = \text{sp}(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T - \mathbf{Y}\beta^T\mathbf{A}^T - \mathbf{A}\beta\mathbf{Y}^T + \mathbf{A}\beta\beta^T\mathbf{A}^T). \quad (5.14)$$

Учитывая, как и ранее, что второе и третье слагаемые в скобках (5.14) — взаимно транспонированные, имеем:

$$\text{sp}(\mathbf{Y}\beta^T\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\beta\mathbf{Y}^T) = 2\text{sp}(\mathbf{A}\beta\mathbf{Y}^T).$$

Кроме того, из свойств следа произведения матриц (см. прил. 15):

$$\text{sp}(\mathbf{A}\beta\beta^T\mathbf{A}^T) = \text{sp}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\beta\beta^T).$$

С учетом сделанных замечаний, применяя формулы (а — ж) дифференцирования следа матрицы по матрице (вектору) из прил. 15, получаем необходимые условия минимума в форме $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\beta - \mathbf{A}^T\mathbf{Y} = \mathbf{0}$, откуда, учитывая исходное предположение о неособенности матрицы $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$, непосредственно следует выражение (5.13) для вектора оценок искомых параметров.

Качество оценок (5.13) характеризует вектор $\mathbf{e}$ ошибок оценок

$$\mathbf{e} = \hat{\beta} - \beta. \quad (5.15)$$

Нетрудно убедиться в том, что (5.13) обеспечивает минимум критерия (5.10). Для доказательства этого утверждения воспользуемся тем же приемом, который был использован в разд. 2.6.2 при получении оценок максимального правдоподобия параметров нормального распределения.

Достаточным признаком минимума функции (5.10) нескольких переменных служит положительная определенность симметричной матрицы $\mathbf{H}$ вторых производных (матрицы Гессе), образованной двукратным дифференцированием

ем скалярной функции $G(\beta)$ (5.10) по вектору-столбцу β искомых параметров в точке экстремума. В данном случае матрица Гессе

$$\mathbf{H} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}, \quad (5.16)$$

которая, по условию, является неособенной и, следовательно, положительно определенной.

По результатам выполненного анализа следует сделать два замечания.

1. Нетрудно видеть, что исходное соотношение (5.7) и результирующее выражение (5.13) имеют общий вид, справедливый для совокупности задач линейной регрессии. Конкретный вид линейной регрессии (простая, квадратичная и проч.) будет определяться, как отмечалось, размерностью вектора β и структурой матрицы $\mathbf{A}$. Так, подставив в (5.13) матрицу $\mathbf{A}$ вида (5.8), можно получить аналитические соотношения для оценок параметров $\hat{\beta}_0$ и $\hat{\beta}_1$ простой линейной регрессии. Это будет сделано ниже.

2. В форме (5.13) вектор оценок $\hat{\beta}$ является результатом всех n наблюдений, т. е. $\hat{\beta} = \hat{\beta}_n$. Таким образом, оценки (5.13) могут быть получены только по завершению процесса наблюдений. Это же выражение может быть использовано и для получения оценок по результатам промежуточных наблюдений ($s < n$), но для этого необходимо выполнять достаточно громоздкие вычисления по выражению вида (5.13) для каждого шага процесса наблюдений.

3. Матрица $\mathbf{A}^\# = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$ носит название обобщенной обратной матрицы, поэтому выражение (5.13) называют решением задачи оценки методом наименьших квадратов (или алгоритмом МНК) **в форме обобщенного обращения**.

4. Получение оценок (5.13) позволяет, в свою очередь, получить оценки $\hat{\mathbf{Y}}$ откликов, выражения для которых следуют из (5.7):

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{A} \hat{\beta}. \quad (5.17)$$

Ошибки оценки откликов характеризуются выражением

$$\mathbf{e}_y = \hat{\mathbf{Y}} - \mathbf{Y}, \quad (5.18)$$

где $\mathbf{e}_y$ — вектор ошибок оценок откликов, элементы которого содержат значения остаточных (после решения задачи регрессии, после нахождения параметров) невязок. Сумма квадратов элементов вектора $\mathbf{e}_y$ (5.18) называется **оста-**

точной суммой квадратов $S = \sum_{i=1}^n (e_y)_i^2$. Значение S характеризует точность решения задачи регрессии.

С использованием (5.17) могут быть получены соотношения для оценок откликов в конкретных задачах линейной регрессии. Так, в случае простой линейной регрессии из (5.17), для i -го значения фактора имеем:

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i; \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.19)$$

Подобные выражения остаются справедливыми для произвольных значений факторов, в том числе — для x_j при $j > n$, т. е. соотношения типа (5.19) могут быть использованы и для прогноза (экстраполяции) значений откликов после завершения наблюдений.

5.2.2. Свойства МНК-оценок параметров линейной регрессии

Полученные соотношения позволяют провести анализ общих свойств оценок параметров линейной регрессии, полученных методом наименьших квадратов. Из этих общих свойств, для каждого конкретного случая линейной регрессии (простой, квадратичной и проч.), можно получить частные свойства оценок в конкретной задаче. Это будет сделано ниже применительно к простой линейной регрессии.

Свойства полученных МНК-оценок линейной регрессии сформулируем в виде ряда утверждений, которые будут доказаны:

1. Оценки (5.13) параметров линейной регрессии (5.7) доставляют минимум критериям (5.9), (5.10), являются несмещенными и эффективными.

2. Ковариационная $(m \times m)$ -матрица $\mathbf{P}$ ошибок оценок (5.15) равна

$$\mathbf{P} = \text{cov}(\mathbf{e}) = \text{cov}(\hat{\beta}) = \sigma^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}. \quad (5.20)$$

3. Ковариационная $(n \times n)$ -матрица $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{Y}}}$ оценок откликов (5.17)

$$\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{Y}}} = \text{cov}(\hat{\mathbf{Y}}) = \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{A}^T = \sigma^2 \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T. \quad (5.21)$$

4. Ковариационная $(n \times n)$ -матрица $\mathbf{P}_{\mathbf{y}}$ ошибок оценки откликов (5.18)

$$\mathbf{P}_{\mathbf{y}} = \text{cov}(\mathbf{e}_{\mathbf{y}}) = \sigma^2 [\mathbf{E}_n - \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T] = \sigma^2 \mathbf{E}_n - \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{Y}}}. \quad (5.22)$$

5. Дисперсии оценок параметров расположены на диагонали матрицы $\mathbf{P}$ (5.20), а дисперсии откликов размещаются на диагонали матрицы $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{Y}}}$ (5.21).

6. Оценки (5.13), (5.17) нормально распределены с математическими ожиданиями β , $\mathbf{A}\beta$ и ковариационными матрицами $\mathbf{P}$ (5.20) и $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{Y}}}$ (5.21) соответственно.

7. Остаточная сумма квадратов невязок оценок откликов $\mathbf{Y}$ и их оценок $\hat{\mathbf{Y}}$

$$S = (\mathbf{e}_{\mathbf{y}})^T \mathbf{e}_{\mathbf{y}} = \boldsymbol{\varepsilon}^T [\mathbf{E}_n - \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T] \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (5.23)$$

Доказательство свойства 1

Выше было показано, что, в силу положительной определенности матрицы Гессе (5.16), оценки (5.13) обеспечивают минимум критериям (5.9) и (5.10).

Для доказательства несмещенности оценок (5.13), умножим все части равенства (5.7) на обобщенную обратную матрицу $\mathbf{A}^{\#} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$ слева:

$$\mathbf{A}^{\#} \mathbf{Y} = \mathbf{A}^{\#} \mathbf{A} \beta + \mathbf{A}^{\#} \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (5.24)$$

Учитывая (5.13) и (5.15), из (5.23) после упрощений получаем:

$$\hat{\beta} = \beta + \mathbf{A}^{\#} \boldsymbol{\varepsilon}; \quad \mathbf{e} = \mathbf{A}^{\#} \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (5.25)$$

По условию задачи математические ожидания элементов вектора невязок равны нулю, т. е. математическое ожидание вектора невязок является нулевым вектором. Отсюда непосредственно следует, что и математическое ожидание вектора $\mathbf{e}$ ошибок оценок (5.25) — также нулевой вектор:

$$M(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}; \quad M(\mathbf{e}) = \mathbf{A}^{\#} M(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}. \quad (5.26)$$

Соотношение (5.26) подтверждает несмещенность оценок (5.13):

$$M(\mathbf{e}) = M(\hat{\boldsymbol{\beta}}) - M(\boldsymbol{\beta}) = M(\hat{\boldsymbol{\beta}}) - \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}; \quad M(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\beta}. \quad (5.27)$$

Ранее было показано, что минимизация критериев (5.9) и (5.10) приводит к одному результату — выражению (5.13). Ниже, при анализе рекуррентных процедур получения оценок параметров линейной регрессии, будет показано, что этот результат полностью совпадает с результатом минимизации суммы дисперсий оценок — следа матрицы $\mathbf{P}$ (5.20). Это доказывает эффективность оценок (5.13).

Доказательство свойства 2

Вектор ошибок оценки $\mathbf{e} = \mathbf{A}^{\#} \boldsymbol{\varepsilon}$ (5.25) имеет, в силу (5.26), нулевое математическое ожидание. Учитывая, что ковариационная матрица невязок

$$\text{cov}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{R} = \mathbf{E}_n, \quad (5.28)$$

где $\mathbf{E}_n$ — единичная матрица порядка n , а для обобщенной обратной матрицы

$$\mathbf{A}^{\#} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \quad (5.29)$$

справедливо следующее очевидное соотношение

$$\mathbf{A}^{\#} (\mathbf{A}^{\#})^T = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}, \quad (5.30)$$

ковариационная матрица вектора $\mathbf{e}$ (5.15) равна:

$$\mathbf{P} = M(\mathbf{e} \mathbf{e}^T) = \mathbf{A}^{\#} \text{cov}(\boldsymbol{\varepsilon}) (\mathbf{A}^{\#})^T = \sigma^2 \mathbf{A}^{\#} (\mathbf{A}^{\#})^T = \sigma^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}, \quad (5.31)$$

что подтверждает справедливость выражения (5.20).

В силу несмещенности оценок параметров справедливо соотношение (2.5), поэтому ковариационная матрица ошибок оценок есть ковариационная матрица оценок: $\mathbf{P} = \text{cov}(\mathbf{e}) = \text{cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$, т. е. на диагонали матрицы $\mathbf{P}$ расположены дисперсии оценок или, что то же, дисперсии ошибок оценок параметров.

Доказательство свойства 3

Центрированные оценки откликов, с учетом выражений (5.15), (5.17), (5.27) и (5.33), могут быть представлены в форме:

$$\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{Y}}} = \hat{\mathbf{Y}} - M(\hat{\mathbf{Y}}) = \mathbf{A} \hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{A} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{A} \mathbf{e}. \quad (5.32)$$

Отсюда следует, что ковариационная матрица $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{Y}}}$

$$\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{Y}}} = \text{cov}(\hat{\mathbf{Y}}) = M(\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{Y}}} (\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{Y}}})^T) = \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{A}^T = \sigma^2 \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T. \quad (5.33)$$

Доказательство свойства 4

Анализируя полученные выше соотношения, нетрудно видеть, что математическое ожидание вектора $\mathbf{e}_{\mathbf{y}}$ (5.18) равно нулю. Действительно, учитывая (5.7), (5.15), (5.17), (5.25), (5.26), (5.27), получаем

$$\mathbf{e}_y = \hat{\mathbf{Y}} - \mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{e} - \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{A}\mathbf{A}^\# - \mathbf{E}_n)\boldsymbol{\varepsilon}; \quad M(\mathbf{e}_y) = (\mathbf{A}\mathbf{A}^\# - \mathbf{E}_n)M(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}. \quad (5.34)$$

Этот результат свидетельствует о несмещенности оценок окликов, т. е.

$$M(\hat{\mathbf{Y}}) = M(\mathbf{Y}) = \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}. \quad (5.35)$$

Ковариационная матрица вектора $\mathbf{e}_y$ с учетом (5.34) и (5.28) может быть представлена соотношением:

$$\mathbf{P}_y = M[\mathbf{e}_y (\mathbf{e}_y)^T] = \sigma^2[(\mathbf{A}\mathbf{A}^\# - \mathbf{E}_n)(\mathbf{A}\mathbf{A}^\# - \mathbf{E}_n)^T].$$

Для выражения в квадратных скобках, учитывая полученное в (5.30) соотношение $\mathbf{A}^\#(\mathbf{A}^\#)^T = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}$, симметричность матрицы $\mathbf{A}\mathbf{A}^\#$ и выражение для ковариационной матрицы $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{Y}}}$ (5.21), имеем:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}\mathbf{A}^\# - \mathbf{E}_n)(\mathbf{A}\mathbf{A}^\# - \mathbf{E}_n)^T &= \mathbf{E}_n + \mathbf{A}\mathbf{A}^\#(\mathbf{A}^\#)^T\mathbf{A}^T - 2\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T = \\ &= \mathbf{E}_n - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T = \mathbf{E}_n - \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{Y}}} / \sigma^2. \end{aligned}$$

Подставляя последнее соотношение в $\mathbf{P}_y = \sigma^2[(\mathbf{A}\mathbf{A}^\# - \mathbf{E}_n)(\mathbf{A}\mathbf{A}^\# - \mathbf{E}_n)^T]$, непосредственно получаем (5.22).

Доказательство свойства 5

Из свойства 1 следует, что оценки (5.13) — несмещенные. Поэтому выражения для вектора ошибок (5.15) можно переписать:

$$\mathbf{e} = \hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta} = \hat{\boldsymbol{\beta}} - M(\hat{\boldsymbol{\beta}}),$$

откуда следует, что ковариационная матрица (5.20) содержит вторые центральные моменты элементов векторов оценок (5.13). На диагоналях ковариационных матриц расположены дисперсии элементов векторов, для которых сформированы эти матрицы. Поэтому дисперсии оценок параметров расположены на диагонали матрицы $\mathbf{P}$ (5.20), а дисперсии откликов размещаются на диагонали матрицы $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{Y}}}$ (5.22).

Доказательство свойства 6

Согласно исходным предположениям, вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$ в выражении (5.7) имеет нормально распределенные элементы. Вектор откликов $\mathbf{Y}$, как линейно связанный с вектором $\boldsymbol{\varepsilon}$, также имеет нормальное распределение. Векторы оценок параметров (5.13) и откликов (5.17) линейно зависят от нормально распределенного вектора $\mathbf{Y}$ и тоже имеют нормальное распределение. Параметрами этих многомерных распределений служат:

для $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ — вектор математических ожиданий $\boldsymbol{\beta}$ (5.27) и ковариационная матрица $\mathbf{P}$ (5.20);

для $\hat{\mathbf{Y}}$ — вектор математических ожиданий $\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}$ (5.35) и ковариационная матрица $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{Y}}}$ (5.21).

Доказательство свойства 7

Остаточная сумма квадратов невязок S , как отмечено выше, служит характеристикой результата решения задачи линейной регрессии, поскольку образуется суммой квадратов элементов вектора $\mathbf{e}_y$ (5.18). Для этого вектора в (5.34)

получено соотношение $\mathbf{e}_y = (\mathbf{A}\mathbf{A}^\# - \mathbf{E}_n)\boldsymbol{\varepsilon}$, где $\boldsymbol{\varepsilon}$ — вектор исходных невязок (5.7); матрица $\mathbf{A}^\#$ определяется выражением (5.29). С учетом этого остаточная сумма квадратов $S = (\mathbf{e}_y)^T \mathbf{e}_y = \boldsymbol{\varepsilon}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^\# - \mathbf{E}_n)^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^\# - \mathbf{E}_n) \boldsymbol{\varepsilon}$, после несложных преобразований, учитывая соотношение (5.30) и симметричность матрицы $\mathbf{A}\mathbf{A}^\#$, принимает форму (5.23).

Полученные выше общие соотношения (5.20)—(5.23) справедливы для произвольных задач линейной регрессии (простой, квадратичной, множественной и др.). Эти соотношения удобно использовать для анализа конкретных задач этого класса с применением СКМ и получения как численных, так и аналитических результатов. Однако формулы (5.20)—(5.23) содержат дисперсию невязок σ^2 , которая при решении задач линейной регрессии неизвестна. Это затрудняет статистический анализ результатов решения конкретных задач линейной регрессии, в процессе которого определяются дисперсии оценок параметров и откликов, вычисляются дисперсии ошибок соответствующих оценок. Для выполнения такого статистического анализа требуется вычислить оценку дисперсии невязок σ^2 по исходным данным задачи регрессии. Такой оценкой служит **остаточная дисперсия**, значение которой по выборочным данным находят в виде:

$$\hat{d}_{\text{ост}} = (\hat{\mathbf{Y}} - \mathbf{Y})^T (\hat{\mathbf{Y}} - \mathbf{Y}) / n = (\mathbf{e}_y)^T \mathbf{e}_y / n = S / n, \quad (5.36)$$

где $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ — вектор оценок откликов (5.17); S — остаточная сумма квадратов (5.23); n — число испытаний (наблюдений).

Можно убедиться в том, что остаточная дисперсия (5.36) — смещенная оценка дисперсии невязок σ^2 . Другие свойства остаточной дисперсии рассматриваются в разд. 6.2.2. Алгоритм вычисления несмещенной оценки σ^2 определяет следующая теорема.

Теорема 5.1. При справедливости всех исходных предположений, сделанных ранее применительно к методу наименьших квадратов и задачам линейной регрессии, несмещенная оценка дисперсии σ^2 невязок определяется выражением:

$$\hat{D}_{\text{ост}} = \frac{1}{n-m} (\hat{\mathbf{Y}} - \mathbf{Y})^T (\hat{\mathbf{Y}} - \mathbf{Y}) = \frac{n}{n-m} \hat{d}_{\text{ост}} = \frac{1}{n-m} S, \quad (5.37)$$

где m — число неизвестных параметров.

Доказательство

▷ Рассмотрим математическое ожидание остаточной суммы квадратов $M(S) = M[(\hat{\mathbf{Y}} - \mathbf{Y})^T (\hat{\mathbf{Y}} - \mathbf{Y})]$. Учитывая (5.18) и (5.22), а также свойства следа матрицы (см. прил. 15), математическое ожидание (5.36) представим в форме:

$$M(S) = M[(\mathbf{e}_y)^T \mathbf{e}_y] = M(\text{sp } \mathbf{P}_y) = \text{sp}[M(\mathbf{P}_y)] = \text{sp}(\mathbf{P}_y).$$

Здесь $\mathbf{P}_y$ — ковариационная матрица ошибок оценки откликов или, что то же — ковариационная матрица остаточных невязок (5.22). Заменяя эту матрицу на выражение $(\sigma^2 \mathbf{E}_n - \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{Y}}})$, полученное в (5.22), для $M(S)$ получим:

$$M(S) = \text{sp}(\mathbf{P}_y) = \text{sp}(\sigma^2 \mathbf{E}_n - \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{Y}}}) = n \sigma^2 - \text{sp}(\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{Y}}}),$$

где $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{Y}}}$ — ковариационная матрица оценок откликов (5.21). Эту матрицу, согласно выражению (5.33), можно представить в виде: $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{Y}}} = \sigma^2 \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$. Отсюда следует, что след матрицы $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{Y}}}$ равен

$$\text{sp}(\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{Y}}}) = \sigma^2 \text{sp}(\mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T) = \sigma^2 \text{sp}[\mathbf{A}^T \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}] = \sigma^2 \text{sp}[\mathbf{E}_m] = \sigma^2 m.$$

Таким образом, математическое ожидание $M(S)$ равно:

$$M(S) = n \sigma^2 - \text{sp}(\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{Y}}}) = n \sigma^2 - m \sigma^2 = \sigma^2 (n - m),$$

откуда $\sigma^2 = M(S)/(n - m)$.

Это означает, что несмещенной оценкой σ^2 служит

$$\hat{D}_{\text{ост}} = \frac{1}{n - m} S = \frac{1}{n - m} (\hat{\mathbf{Y}} - \mathbf{Y})^T (\hat{\mathbf{Y}} - \mathbf{Y}) = \frac{1}{n - m} (\mathbf{A} \hat{\beta} - \mathbf{Y})^T (\mathbf{A} \hat{\beta} - \mathbf{Y}). \blacktriangleleft$$

Величина (5.37) может быть названа **исправленной остаточной дисперсией**. В качестве примера применения описанных свойств оценок линейной регрессии в разд. 5.2.3 производится статистический анализ задачи простой линейной регрессии, которая описывается выражениями (5.6)—(5.9).

5.2.3. Оценки параметров простой линейной регрессии и их свойства

Проведем анализ и свойств оценок параметров простой линейной регрессии с использованием общих выражений, полученных в разд. 5.2.2.

Уравнение простой линейной регрессии, для i -го наблюдения, имеет вид (5.6): $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$, $i = \overline{1, n}$. Согласно (5.7), вектор наблюдений равен:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} \beta + \varepsilon; \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}; \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}; \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}.$$

Здесь β — вектор неизвестных параметров; вектор невязок ε , как и ранее, имеет нулевое математическое ожидание и диагональную ковариационную матрицу $\mathbf{R} = \text{cov}(\varepsilon) = \sigma^2 \mathbf{E}_n$, где $\mathbf{E}_n$ — единичная матрица порядка n .

Для численного решения рассматриваемой задачи достаточно применить общий алгоритм $\hat{\beta} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Y}$ (5.13). Однако, как ранее отмечалось, для выяснения статистических свойств оценок полезно получить аналитические соотношения с использованием общих выражений (5.20)—(5.23). Получим их вначале для элементов вектора $\hat{\beta}$ оценок параметров

Из общего алгоритма (5.13) для рассматриваемого случая следует:

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum_i x_i \\ \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \sum_i y_i \\ \sum_i x_i y_i \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \sum_i x_i^2 & -\sum_i x_i \\ -\sum_i x_i & n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sum_i y_i \\ \sum_i x_i y_i \end{bmatrix}, \quad (5.38)$$

где $\Delta = n \left(\sum_i x_i^2 \right) - \left(\sum_i x_i \right)^2$ — определитель матрицы $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$.

Выражения (5.38) можно переписать с использованием формул для начальных выборочных моментов первого и второго порядков:

$$\bar{x}_B = \frac{1}{n} \sum_i x_i; \quad \overline{x_B^2} = \frac{1}{n} \sum_i x_i^2; \quad \bar{y}_B = \frac{1}{n} \sum_i y_i; \quad \overline{xy}_B = \frac{1}{n} \sum_i x_i y_i, \quad (5.39)$$

подставляя которые в выражения оценок, получим:

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{[\overline{x_B^2} - (\bar{x}_B)^2]} \begin{bmatrix} \overline{x_B^2} & -\bar{x}_B \\ -\bar{x}_B & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y}_B \\ \overline{xy}_B \end{bmatrix}. \quad (5.40)$$

Разность $[\overline{x_B^2} - (\bar{x}_B)^2]$ равна выборочной дисперсии фактора D_B (2.17), поэтому оценки параметров простой линейной регрессии принимают вид:

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\overline{x_B^2} \bar{y}_B - \bar{x}_B \overline{xy}_B}{D_B}; \quad \hat{\beta}_1 = \frac{\overline{xy}_B - \bar{x}_B \bar{y}_B}{D_B}.$$

Последние выражения можно упростить, учитывая связь оценок параметров между собой. Действительно, из уравнения $(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{A}^T \mathbf{Y}$, которое следует из (5.13), учитывая, что структуры матрицы $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ и вектора $\mathbf{A}^T \mathbf{Y}$ раскрыты в (5.38)—(5.40), получаем:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_i x_i \\ \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i y_i \\ \sum_i x_i y_i \end{bmatrix} \text{ или } \begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_B \\ \bar{x}_B & \overline{x_B^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y}_B \\ \overline{xy}_B \end{bmatrix}. \quad (5.41)$$

Учитывая, что из первого уравнения системы (5.41) следует: $\hat{\beta}_0 + \bar{x}_B \hat{\beta}_1 = \bar{y}_B$, запишем окончательные выражения для оценок параметров простой линейной регрессии

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\overline{xy}_B - \bar{x}_B \bar{y}_B}{D_B}; \quad \hat{\beta}_0 = \bar{y}_B - \bar{x}_B \hat{\beta}_1. \quad (5.42)$$

Получим теперь выражения для вторых центральных моментов оценок простой линейной регрессии, используя для этой цели общие соотношения (5.20)—(5.22). Ключевой матрицей этих выражений служит $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$, отличающаяся от ковариационной матрицы ошибок оценки параметров $\mathbf{P}$ (5.20) множителем σ^2 . Из выражений (5.38)—(5.40), а также (5.20), следует:

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{n D_B} \begin{bmatrix} \overline{x_B^2} & -\bar{x}_B \\ -\bar{x}_B & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \sigma^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}, \quad (5.43)$$

откуда дисперсии ошибок оценки параметров β_0 и β_1 равны соответственно

$$D(\hat{\beta}_0) = \sigma^2 \overline{x_B^2} / n D_B; \quad D(\hat{\beta}_1) = \sigma^2 / n D_B, \quad (5.44)$$

а корреляционный момент этих ошибок равен:

$$K(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = -\sigma^2 \bar{x}_B / n D_B.$$

Для получения вторых центральных моментов оценок откликов и ошибок оценок откликов следует вычислить ковариационные матрицы (5.21) и (5.22). Вычисляя симметричную матрицу $\mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$, составляющую ядро этих ковариационных матриц, определяем дисперсию i -го элемента вектора оценок откликов $\hat{\mathbf{Y}}$ (5.17) — диагональный элемент матрицы $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{Y}}}$ (5.21):

$$D(\hat{y}_i) = \frac{\sigma^2}{n D_B} (\overline{x_B^2} - 2x_i \bar{x}_B + x_i^2) = \frac{\sigma^2}{n} \left[1 + \frac{(\bar{x}_B - x_i)^2}{D_B} \right]. \quad (5.45)$$

Недиагональный элемент матрицы $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{Y}}}$ — корреляционный момент элементов $\hat{y}_i$ и $\hat{y}_j$ ($i \neq j$) — выражается в форме:

$$K(\hat{y}_i, \hat{y}_j) = \frac{\sigma^2}{n D_B} [\overline{x_B^2} - (x_i + x_j) \bar{x}_B + x_i x_j]. \quad (5.46)$$

Матрица $[\mathbf{E}_n - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T]$, составляющая основу ковариационной матрицы ошибок оценки откликов (5.22), отличается от матрицы $\mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$, входящей в ковариационную матрицу оценки откликов (5.21), только диагональными элементами и знаком недиагональных элементов. Поэтому дисперсия i -го элемента вектора ошибок оценок откликов $\mathbf{e}_y$ (5.18), как диагональный элемент матрицы $\mathbf{P}_y$ (5.22), может быть преобразованием $D(\hat{y}_i)$ (5.45) найден в виде:

$$D(e_{yi}) = \frac{\sigma^2}{n} \left[n - \left(1 + \frac{(\bar{x}_B - x_i)^2}{D_B} \right) \right], \quad (5.47)$$

Корреляционный момент элементов e_{yi} и e_{yj} ($i \neq j$) — недиагональный элемент матрицы $\mathbf{P}_y$ (5.22), равен:

$$K(e_{yi}, e_{yj}) = -K(\hat{y}_i, \hat{y}_j) = -\frac{\sigma^2}{n D_B} [\overline{x_B^2} - (x_i + x_j) \bar{x}_B + x_i x_j]. \quad (5.48)$$

Из полученных выражений можно сделать следующие выводы:

- Оценки параметров простой линейной регрессии асимптотически эффективны ($D(\hat{\beta}_0) \rightarrow 0$; $D(\hat{\beta}_1) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$) и асимптотически некоррелированы ($K(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$).
- Оценки откликов также асимптотически эффективны и асимптотически некоррелированы ($D(\hat{y}_i) \rightarrow 0$; $K(\hat{y}_i, \hat{y}_j) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$).
- Дисперсии (5.45) элементов вектора $\mathbf{e}_y$ (5.18) $D(e_{yi}) \rightarrow \sigma^2$ при $n \rightarrow \infty$.

Подобный анализ на основе общих выражений (5.20)—(5.23) может быть проведен применительно к другим вариантам линейной регрессии. При аналитических преобразованиях над матрицами и векторами удобно прибегать к символьным вычислениям в СКМ. Такие символьные преобразования осуществляют для упрощенных случаев (например, используя всего несколько на-

блюдений), достаточных для выявления структурных особенностей векторно-матричных выражений, осуществления промежуточного и результирующего контроля преобразований.

На рис. 5.1 приведен пример символьных преобразований в Mathcad для выяснения структуры элементов матрицы $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{Y}}}$ (5.21) при $n = 3$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &:= \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{pmatrix} & \mathbf{S} &:= \frac{1}{n \cdot D_B} \cdot \begin{pmatrix} X_B & -x_B \\ -x_B & 1 \end{pmatrix} & \mathbf{W} &:= \mathbf{A} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{A}^T \\
 W_{0,0} \text{ simplify} &\rightarrow \frac{X_B - 2 \cdot x_1 \cdot x_B + x_1^2}{n \cdot D_B} \\
 W_{1,1} \text{ simplify} &\rightarrow \frac{X_B - 2 \cdot x_2 \cdot x_B + x_2^2}{n \cdot D_B} \\
 W_{0,1} \text{ simplify} &\rightarrow \frac{X_B - x_1 \cdot x_B - x_2 \cdot x_B + x_1 \cdot x_2}{n \cdot D_B}
 \end{aligned}$$

Рис. 5.1. Символьный анализ структуры матрицы (5.21)

Матрица $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{Y}}}$ (5.21), обозначенная в mcd-файле (см. рис. 5.1) как $\mathbf{W}$, формируется с использованием предварительно введенной матрицы $\mathbf{A}$ (5.8) и структуры матрицы $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$ (5.43); последняя матрица обозначена как $\mathbf{S}$. Далее выводятся два первых диагональных элемента матрицы $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{Y}}}$ и соответствующих им недиагональный элемент, позволяющие получить структуру выражений $D(\hat{y}_i)$ (5.45) и $K(\hat{y}_i, \hat{y}_j)$ (5.46).

Наиболее существенную помощь обеспечивает применение СКМ при численном анализе задач рассматриваемого класса, решение которых требует выполнения больших объемов вычислений. Каждая СКМ предоставляет пользователю несколько вариантов решения задач регрессии. Среди них — реализация алгоритма МНК вида (5.13), привлечение ряда встроенных функций для выполнения операций над матрицами, использование тех встроенных функций, которые специально предназначены для решения задач регрессии, поисковые процедуры нахождения параметров регрессии и т. д.. Эти способы будут кратко рассмотрены и проиллюстрированы в последующем материале этой главы. Для иллюстрации простоты решения задачи линейной регрессии в среде СКМ приведем пример сопоставления в среде Mathcad точности простой (5.3) и квадратичной (5.4) линейной регрессии.

Пример 5.1. В контрольный период проведено 10 измерений отклонения от допуска концентрации содержания анализируемых примесей в выходном

продукте промышленной установки. Измерения проводились через фиксированный интервал времени. Результаты наблюдений (в процентах) сведены в вектор Y . Решить задачу линейной регрессии, используя в качестве регрессионных зависимостей полиномы первого и второго порядков. Провести статистический анализ результатов и сопоставить точности вариантов.

□ **Решение.** На рис. 5.2 приведены результаты решения в среде Mathcad.

Процедуры решения для полинома первого порядка (рис. 5.2, а) и второго порядка (рис. 5.2, б) построены однотипно.

$$Y^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	-0.72	-0.637	-0.031	0.533	1.269	3.537	5.158	7.499	10.62	12.531

$n := 10 \quad i := 0..n-1 \quad x_i := i$

$$A =$$

	0	1
0	1	0
1	1	1
2	1	2
3	1	3
4	1	4
5	1	5
6	1	6
7	1	7
8	1	8
9	1	9

$$Y =$$

	0
0	-0.72
1	-0.637
2	-0.031
3	0.533
4	1.269
5	3.537
6	5.158
7	7.499
8	10.62
9	12.531

$a_i := 1 \quad b_i := x_i \quad c_i := |x_i|^2$

$A := \text{augment}(a, b)$

$\beta := (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot Y \quad \beta = \begin{pmatrix} -2.892 \\ 1.526 \end{pmatrix}$

$Y_0 := A \cdot \beta \quad \Delta := Y_0 - Y$

$\delta := \Delta^T \cdot \Delta$ Остаточная сумма квадратов

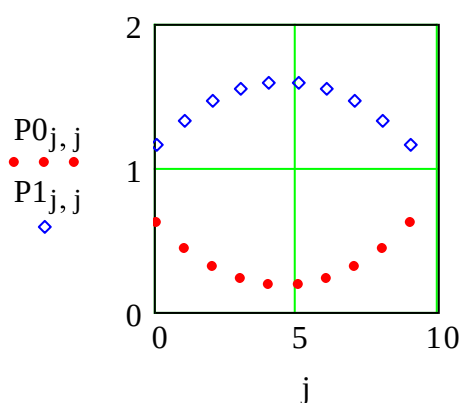
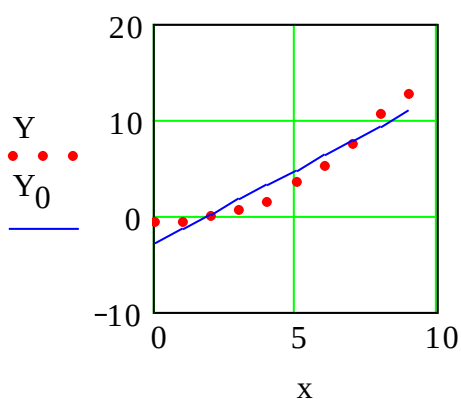
$d := \frac{1}{n} \cdot \delta$ Остаточная дисперсия

$\delta = 17.697 \quad d = 1.77$

$E := \text{identity}(n) \quad j := 0..n-1 \quad P := d \cdot (A^T \cdot A)^{-1}$ $P_{0,0} = 0.611$

$P0 := A \cdot P \cdot A^T \quad P1 := d \cdot E - P0$ $P0_{0,0} = 0.611 \quad P0_{2,2} = 0.311$

$P1_{0,0} = 1.158 \quad P1_{2,2} = 1.459 \quad d - P0_{0,0} = 1.158 \quad d - P0_{2,2} = 1.459$

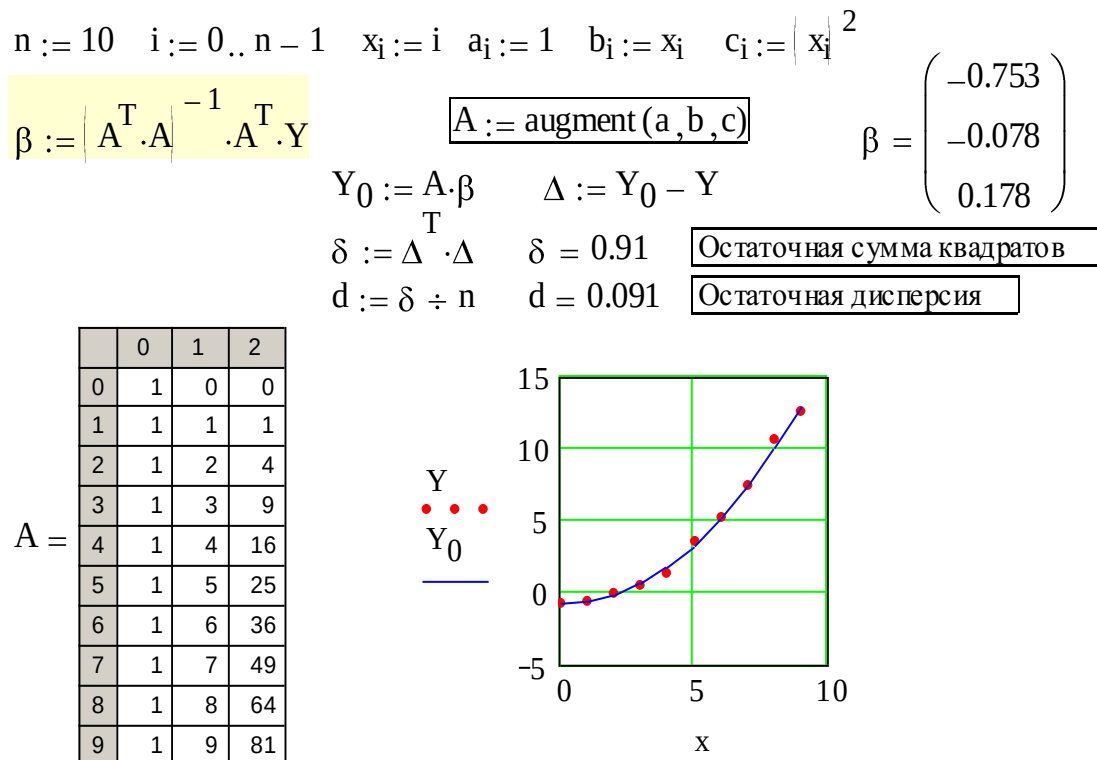


$$\Delta^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	-2.173	-0.729	0.191	1.153	1.944	1.202	1.108	0.293	-1.302

Рис. 5.2, а. Вариант простой линейной регрессии

Матрица **A** формируется (см. рис. 5.2, а) в виде совокупности столбцов, объединенных встроенной функцией **augment**. В файлах обозначены: **Y** — измеренные значения (отклики); **β** — вектор оценок параметров; **Y₀** — вектор оценок откликов $\hat{Y}$ (5.17); **Δ** — вектор ошибок оценки откликов **e_y** (5.18); **δ** — остаточная сумма квадратов **S** (5.23); **d** — остаточная дисперсия (5.36); **E** — единичная матрица порядка **n**; **P**, **P0**, **P1** — ковариационные матрицы оценок параметров (5.20), оценок откликов (5.21) и ошибок оценок откликов (5.22) соответственно. На графиках изображены: исходные значения измеренных концентраций **Y_i** (**i** = 0, 1, ..., 9) и оценки **Y_{0i}** = -2.892 + 1.526x_i этих значений (оценки откликов); диагональные элементы ковариационных матриц (5.21) и (5.22). Результаты анализа качества простой линейной регрессии (полинома вида (5.3)) в числовой и графической формах свидетельствуют о значительных погрешностях этого варианта регрессии. Дисперсии оценок параметров регрессии (диагональные элементы матрицы **P**) составляют 0.611 и 0.021, остаточная сумма квадратов равна 17.697, остаточная дисперсия равна ~ 1.77.



$Y^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	-0.72	-0.637	-0.031	0.533	1.269	3.537	5.158	7.499	10.62	12.531

$Y_0^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	-0.753	-0.653	-0.196	0.617	1.786	3.313	5.196	7.435	10.031	12.984

Рис. 5.2, б. Вариант квадратичной регрессии

Вариант квадратичной регрессии, когда используется полином второго порядка (5.4), в данном случае более предпочтителен, что следует из результатов анализа, представленных на рис. 5.2, б. Оценка отклика формируется в этом

случае в виде $\mathbf{Y}_{0i} = -0.753 - 0.078 x_i + 0.178 (x_i)^2$; этот вариант имеет остаточную сумму квадратов, равную 0.91, и остаточную дисперсию, равную 0.091.

Дисперсии оценок параметров регрессии (диагональные элементы матрицы $\mathbf{P}$) характеризуются в данном варианте величинами, не превышающими 0.0563 (см. рис. 5.2, в). Таким образом, второй вариант имеет на порядок более высокую точность по сравнению с первым, что свидетельствует о более высоком качестве представления данных наблюдений полиномом второго порядка. Этот результат предопределен характером исходных данных, предварительный анализ которых (например, визуальный анализ графика $y = f(x)$) показывает сугубо нелинейный характер этой зависимости.

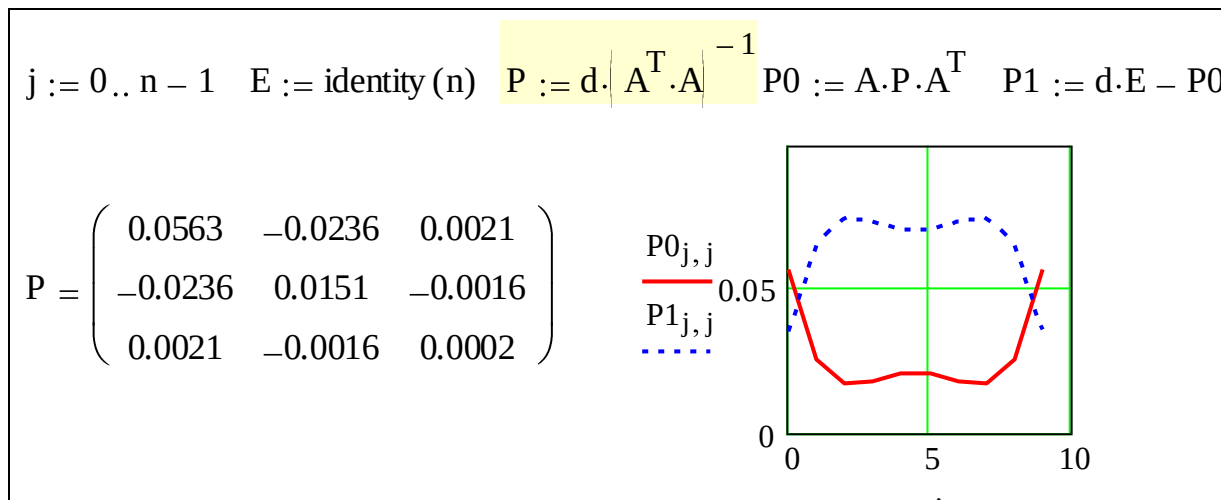


Рис. 5.2, в. Продолжение файла, изображенного на рис. 5.2, б

На графике (см. рис. 5.2, в) приведены диагональные элементы ковариационных матриц оценок откликов (5.21) и ошибок их оценок (5.22).

Проблема выбора регрессионного выражения обсуждается в разд. 5.3. Здесь отметим лишь то, что предварительный выбор может опираться на сопоставление значений остаточных дисперсий (см. рис. 5.2, а, б).

5.2.4. Множественная линейная регрессия

Анализ задач линейной регрессии, проведенный выше, опирался на примеры, в которых имелся один фактор. В прикладной математической статистике распространены также задачи, в которых требуется выявить зависимость некоторой случайной величины от нескольких случайных (или неслучайных) величин. Такие задачи составляют класс задач множественной регрессии.

В задачах множественной линейной регрессии зависимости $f(\mathbf{X}_i, \beta)$ в (5.1) имеют линейный относительно неизвестных параметров β вид, например,

$$\begin{aligned}
 y &= \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon; \\
 y &= \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 (x_2)^2 + \varepsilon; \\
 y &= \beta_0 + \beta_1 \sin(x_1) + \beta_2 \sin(x_2) + \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Как и ранее, каждая из приведенных зависимостей составляет структуру i -го уравнения в системе линейных алгебраических уравнений (5.7), например,

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 (x_{2i})^2 + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (5.49)$$

где y_i — отклик в i -ом испытании; x_{1i} и x_{2i} — значения первого и второго факторов в i -ом испытании; $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ — неизвестные параметры, составляющие вектор β ; ε_i — i -ая невязка, совокупность которых входит в вектор ε . Регрессионная зависимость в уравнении типа (5.49) может быть представлена в форме произведения строки $[1 \ x_{1i} \ (x_{2i})^2]$ на вектор параметров β . Совокупность строк аналогичного вида, записанных для каждого из испытаний, составляет $(n \times m)$ -матрицу A , где m — число искомых параметров.

Предполагая, как и ранее, что невязки ε_i — независимые случайные нормально распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием $M(\varepsilon_i) = 0$ и дисперсией $D(\varepsilon_i) = \sigma^2$, модель множественной регрессии может быть представлена в форме системы n линейных алгебраических уравнений вида

$$Y = A\beta + \varepsilon, \quad Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T, \quad \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)^T, \quad R = \text{cov}(\varepsilon) = \sigma^2 E_n. \quad (5.50)$$

Эта модель полностью соответствует выражениям (5.7), которые служили основой анализа однофакторных задач линейной регрессии. Поэтому рассмотренные в разд. 5.2.1 и 5.2.2 алгоритм (5.13) решения задачи линейной регрессии и свойства получаемых оценок (5.20)—(5.23) полностью применимы и к задачам множественной линейной регрессии.

Пример 5.2. В процессе тренировок многоборцев анализировались причины промахов спортсменов на этапе стрельбы. Для десяти спортсменов перед стрельбой фиксировались: сила бокового ветра (фактор x_1), отклонение частоты пульса спортсменов от 80 в течение 2 мин (фактор x_2) и максимальное по модулю отклонение попаданий (см) в серии выстрелов (отклик y). Принимая регрессионную зависимость в виде:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (5.51)$$

найти параметры множественной регрессии.

□ **Решение.** Данные 10 измерений и решение задачи регрессии в Mathcad содержатся в mcd-файле, копия которого представлена на рис. 5.3. Векторы x_1 , x_2 и y были предварительно трансформированы из текстового формата с применением команд **Insert/Date/File input** главного меню системы Mathcad. Эта часть из экономии места на рис. 5.3 не приведена.

Матрица A системы линейных алгебраических уравнений (5.50) формируется состыковкой столбцов с элементами 1, x_{1i} и x_{2i} с применением встроенной функции **augment**. По алгоритму (5.13), выделенному на рис. 5.3 заливкой, получаем оценки параметров (5.51), что позволяет составить уравнение регрессии: $\hat{y}_i = 0.18 + 0.17 x_{1i} + 0.09 x_{2i}$.

Обозначения элементов вычислительного процесса (см. рис. 5.3) в целом аналогичны обозначениям, принятым для рис. 5.2: y_0 — вектор оценок откли-

ков $\hat{\mathbf{Y}}$ (5.17); Δ — вектор ошибок оценки откликов $\mathbf{e}_y$ (5.18); δ — остаточная сумма квадратов S (5.23); d — остаточная дисперсия (5.36); $\mathbf{E}$ — единичная матрица порядка n ; $\mathbf{P}$, $\mathbf{P0}$, $\mathbf{P1}$ — ковариационные матрицы оценок параметров (5.20), оценок откликов (5.21) и ошибок оценок откликов (5.22).

$n := 10$ $i := 0..n-1$ $a_i := 1$ $b_i := x1_i$ $c_i := x2_i$ $\boxed{A := \text{augment}(a, b, c)}$

 $x1 =$

	0
0	-1.49
1	-0.45
2	-2.77
3	-2.2
4	-2.78
5	2.18
6	2.03
7	-0.6
8	-0.6
9	-2.23

 $x2 =$

	0
0	-0.65
1	-1.12
2	0.77
3	6.98
4	-1.19
5	8.61
6	3.86
7	-8.27
8	9.08
9	-0.47

 $A =$

	0	1	2
0	1	-1.49	-0.65
1	1	-0.45	-1.12
2	1	-2.77	0.77
3	1	-2.2	6.98
4	1	-2.78	-1.19
5	1	2.18	8.61
6	1	2.03	3.86
7	1	-0.6	-8.27
8	1	-0.6	9.08
9	1	-2.23	-0.47

$$\beta := (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot y$$

$$\boxed{\beta^T = (0.18 \quad 0.17 \quad 0.09)}$$

$$y_0 := A \cdot \beta \quad \Delta := y_0 - y$$

$$\delta := \Delta^T \cdot \Delta \quad \delta = 1.59 \quad d := \delta \div n \quad d = 0.16 \quad E := \text{identity}(n)$$

$$P := d \cdot (A^T \cdot A)^{-1}$$

$$\sqrt{P_{0,0}} = 0.16 \quad \sqrt{P_{1,1}} = 0.08 \quad \sqrt{P_{2,2}} = 0.03$$

$$P0 := A \cdot P \cdot A^T \quad P1 := d \cdot E - P0$$

 $y =$

	0
0	-0.1
1	-0.33
2	-0.64
3	0.42
4	-0.75
5	1.57
6	0.75
7	-0.7
8	0.84
9	0.82

 $y_0 =$

	0
0	-0.14
1	-0.01
2	-0.23
3	0.46
4	-0.42
5	1.37
6	0.89
7	-0.71
8	0.93
9	-0.26

 $\Delta =$

	0
0	-0.04
1	0.32
2	0.41
3	0.03
4	0.33
5	-0.2
6	0.15
7	-0.01
8	0.09
9	-1.07

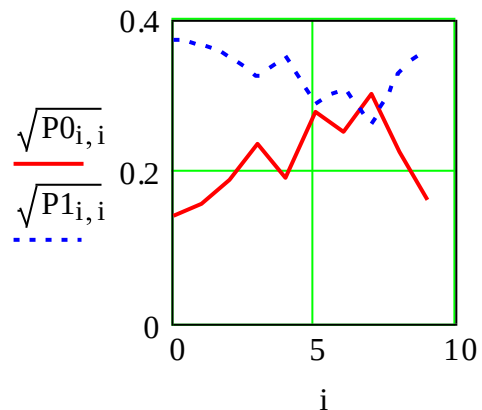


Рис. 5.3. Решение задачи множественной регрессии

Остаточная сумма квадратов и остаточная дисперсия получены достаточно малыми, равными ~ 1.59 и ~ 0.16 соответственно. Свидетельством точности решения данной задачи служат также СКО оценок параметров (корни квадратные из диагональных элементов матрицы $\mathbf{P}$), среди которых наименьшее значение 0.03 имеет СКО оценки параметра β_2 при втором факторе в выражении (5.51). Этот параметр «оценивается лучше», чем другие, поскольку его влия-

ние на функционал вида (5.9), (5.10) в данном примере заметно выше влияния других параметров. Средние квадратические отклонения оценок откликов и ошибок оценок откликов (корни квадратные из диагональных элементов матрицы **P0** и **P1**) приведены на графике (см. рис. 5.3) и имеют значения, не превышающие 0.4. ■

5.2.5. Рекуррентный алгоритм МНК

В практике исследования систем различных классов весьма часто встречаются итеративные процедуры и так называемые рекуррентные соотношения, которые позволяют последовательно получать очередной результат с использованием предыдущего. Распространенность рекуррентных алгоритмов обработки исходной информации объясняется простотой их программирования, отсутствием необходимости запоминания больших объемов данных, а также возможностью использования промежуточных оценок в реальном времени.

Классическим примером служит, например, последовательное наблюдение (измерение) траектории летательного аппарата с целью оценки параметров его движения. В таких задачах каждое измерение порождает одно линейное алгебраическое уравнение системы, связывающее искомые параметры с измеренными данными. Общее число таких уравнений обычно намного превосходит число неизвестных. Текущие оценки могут быть использованы, например, для оперативной коррекции траектории объекта в процессе полета.

Выше отмечалось (см. разд. 5.2), что решение задачи оценки параметров регрессии может достигаться двумя способами: путем обобщенного обращения прямоугольной матрицы (см. разд. 5.2.1) и с помощью рекуррентного алгоритма. В первом случае оценка вектора неизвестных параметров может быть получена лишь после завершения процесса измерений и накопления всех данных, т. е. после завершения наблюдения за объектом. Это исключает возможность использования результата для оперативного вмешательства в наблюдаемые процессы. Второй подход основан на коррекции предыдущей оценки вектора параметров путем использования очередного измерения. При такой процедуре нет необходимости в накоплении и хранении всей предыстории, а полученные текущие оценки могут быть использованы для принятия оперативного решения в режиме реального времени.

Преимущества рекуррентных процедур видны уже при рассмотрении, например, алгоритма вычисления выборочного среднего для некоторого массива данных x_i , ($i = \overline{1, n}$). Следуя первому из упомянутых выше принципов обработки информации, среднее значение может быть получено с использованием

формулы $y_{\text{ср}} = \sum_{i=1}^n x_i / n$, т. е. для определения $y_{\text{ср}}$ необходимо предварительно

накопить все значения x_i . Однако y_{Σ} может быть получено последовательным рекуррентным использованием каждого следующего элемента массива

данных: $y_i = y_{i-1} + \frac{1}{i}(x_i - y_{i-1})$; $y_n = y_\Sigma$, где y_i — среднее по первым i значениям. Подобный принцип вычисления оценок может быть применен и для решения задач регрессии.

Для реализации этого принципа будем рассматривать результаты измерений в виде последовательного ряда чисел y_i ($i = 1, n$), получаемых на i -ом такте измерений. Учитывая, что оценке подлежат константы (не зависящие от номера такта), запишем регрессионные зависимости вида (5.3)—(5.5), (5.49) в форме разностных уравнений:

$$\beta_i = \beta_{i-1}; y_i = \mathbf{a}_i \beta_i + \varepsilon_i; \beta_0 = M(\beta_0). \quad (5.52)$$

Здесь: β_i, y_i — вектор параметров и значение отклика на i -ом такте измерений; $\mathbf{a}_i$ — i -ая строка матрицы $\mathbf{A}$ системы уравнений (5.7); ε_i — i -ый элемент вектора невязок $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)^T$. Согласно ранее принятым условиям, вектор ε содержит независимые нормально распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсиями σ^2 , т. е.

$$M(\varepsilon) = \mathbf{0}; \mathbf{R} = \text{cov}(\varepsilon) = \sigma^2 \mathbf{E}_n. \quad (5.53)$$

Состав строки $\mathbf{a}$ в (5.52) определяется видом регрессионной зависимости. Для простой линейной регрессии $\mathbf{a}_i = [1 \ x_i]$; для варианта квадратичной регрессии (5.4) $\mathbf{a}_i = [1 \ x_i \ (x_i)^2]$; для множественной регрессии (5.51) строка $\mathbf{a}_i = [1 \ x_{1i} \ (x_{2i})^2]$.

Оценку $(m \times 1)$ -вектора параметров будем искать в общем виде:

$$\hat{\beta}_i = \mathbf{F}_i \hat{\beta}_{i-1} + \mathbf{K}_i y_i; \hat{\beta}_0 = M(\beta_0) = \beta_0. \quad (5.54)$$

где $\mathbf{F}$ — $(m \times m)$ -матрица и $\mathbf{K}$ — $(m \times 1)$ -вектор, подлежащие определению.

Задание уравнения оценки (5.54) при наличии модели (5.52) позволяет записать уравнение для $(m \times 1)$ -вектора ошибок оценки $\mathbf{e}_i = \hat{\beta}_i - \beta_i$ в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i &= \mathbf{F}_i \hat{\beta}_{i-1} + \mathbf{K}_i (\mathbf{a}_i \beta_{i-1} + \varepsilon_i) - \beta_{i-1} = \\ &= \mathbf{F}_i \hat{\beta}_{i-1} - (\mathbf{E}_m - \mathbf{K}_i \mathbf{a}_i) \beta_{i-1} + \mathbf{K}_i \varepsilon_i. \end{aligned} \quad (5.55)$$

где $\mathbf{E}_m$ — единичная матрица порядка m .

В уравнениях (5.54) и (5.55) имеются две матрицы ($\mathbf{F}$ и $\mathbf{K}$), которые необходимо определить. Для определения этих матриц следует задать те условия, которыми должны обладать оценки $\hat{\beta}$ параметров регрессии. Потребуем, чтобы эти оценки обладали двумя свойствами:

$$\circ \text{ несмещенностью, т. е. } M(\hat{\beta}_i) = M(\beta_i) = \beta_i \text{ или } M(\mathbf{e}_i) = \mathbf{0}; \quad (5.56)$$

$$\circ \text{ минимальностью дисперсий ошибок оценок, т. е. } \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \rightarrow \min. \quad (5.57)$$

Отметим здесь, что несмещенность (5.27) составляет одно из основных свойств оценок, получаемых по алгоритму МНК (5.13).

Применяя условие (5.56) к рассматриваемому рекуррентному варианту, можно определить матрицу $\mathbf{F}$ в (5.54), т. е. доопределить структуру алгоритма оценки.

Теорема 5.2. Матрица $\mathbf{F}$, обеспечивающая несмещенность оценок (5.54) при условии (5.53), равна:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{E}_m - \mathbf{K}_i \mathbf{a}_i. \quad (5.58)$$

▷ *Доказательство.* Составим уравнение для математических ожиданий вектора ошибок оценки (5.55):

$$M(\mathbf{e}_i) = \mathbf{F}_i M(\hat{\beta}_{i-1}) - (\mathbf{E}_m - \mathbf{K}_i \mathbf{a}_i) M(\beta_{i-1}) + \mathbf{K}_i M(\varepsilon_i). \quad (5.59)$$

Начальный вектор математических ожиданий ошибок оценок, в силу начального условия (5.54), равен нулю: $M(\mathbf{e}_i) = \mathbf{0}$.

Поскольку невязки ε_i , согласно условию (5.53), имеют нулевые математические ожидания, последнее слагаемое правой части (5.59) равно нулю. Требование несмещенности $M(\hat{\beta}_i) = M(\beta_i)$ при произвольном значении i будет выполнено, если в уравнении (5.59) матрица $[\mathbf{F}_i - (\mathbf{E}_m - \mathbf{K}_i \mathbf{a}_i)]$ будет нулевой, т. е. $\mathbf{F}_i - (\mathbf{E}_m - \mathbf{K}_i \mathbf{a}_i) = \mathbf{0}$, откуда следует выражение (5.58). ◀

Подставляя (5.58) в уравнения (5.54) и (5.55), получим алгоритм получения несмещенных оценок в процессе последовательных измерений:

$$\hat{\beta}_i = \hat{\beta}_{i-1} + \mathbf{K}_i(y_i - \mathbf{a}_i \hat{\beta}_{i-1}); \quad \hat{\beta}_0 = M(\beta_0) = \beta_0 \quad (5.60)$$

и уравнение ошибок несмещенных оценок:

$$\mathbf{e}_i = (\mathbf{E}_m - \mathbf{K}_i \mathbf{a}_i) \mathbf{e}_{i-1} + \mathbf{K}_i \varepsilon_i. \quad (5.61)$$

Уравнение (5.60) характеризует процесс получения текущих оценок вектора параметров β по мере осуществления последовательных измерений, т. е. последовательного поступления новой информации в виде y_i . Согласно (5.60), этот процесс протекает в форме коррекции предыдущих оценок поправочным членом $\mathbf{K}_i(y_i - \mathbf{a}_i \hat{\beta}_{i-1})$. Вектор $\mathbf{K}_i$ выступает в качестве вектора весовых коэффициентов при ошибке оценке невязки $(y_i - \mathbf{a}_i \hat{\beta}_{i-1})$ по данным i -го измерения. Уравнения (5.60), (5.61) содержат неопределенный вектор $\mathbf{K}$, выражение для которого устанавливает следующая теорема.

Теорема 5.3. Вектор коэффициентов $\mathbf{K}_i$ рекуррентного алгоритма (5.60) определяется соотношением вида:

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{P}_{i-1} \mathbf{a}_i^T / (\mathbf{a}_i \mathbf{P}_{i-1} \mathbf{a}_i^T + \sigma^2), \quad (5.62)$$

где $\mathbf{P}_{i-1}$ — ковариационная матрица ошибок оценок на $(i-1)$ -ом такте измерений.

▷ *Доказательство.* Применим определение ковариационной матрицы (см. разд. 7.6, ч. I, выражение (7.64)) к уравнению ошибок оценок (5.61) для получения ковариационного уравнения, связывающего матрицы $\mathbf{P}_i$ и $\mathbf{P}_{i-1}$. Ранее были введены условия, при которых оценки обладают свойством несмещенно-

сти, т. е. $M(\mathbf{e}_i) = \mathbf{0}$, поэтому ковариационная матрица для вектора $\mathbf{e}_i$ записывается в виде:

$$\mathbf{P}_i = M(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T) = M\{[(\mathbf{E}_m - \mathbf{K}_i \mathbf{a}_i) \mathbf{e}_{i-1} + \mathbf{K}_i \varepsilon_i][(\mathbf{E}_m - \mathbf{K}_i \mathbf{a}_i) \mathbf{e}_{i-1} + \mathbf{K}_i \varepsilon_i]^T\}.$$

Учитывая независимость векторов $\mathbf{e}_{i-1}$ и ε_i , а также применяя свойства математических ожиданий случайных векторов (см. , . 7.6, ч. I, выражения (7.54)—(7.57)), после несложных преобразований получим уравнение, связывающее ковариационные $(m \times m)$ -матрицы ошибок оценки $\mathbf{P} = M(\mathbf{e}\mathbf{e}^T)$ на соседних тактах измерений, в виде:

$$\mathbf{P}_i = (\mathbf{E}_m - \mathbf{K}_i \mathbf{a}_i) \mathbf{P}_{i-1} (\mathbf{E}_m - \mathbf{K}_i \mathbf{a}_i)^T + \sigma^2 \mathbf{K}_i (\mathbf{K}_i)^T. \quad (5.63)$$

Матричное ковариационное уравнение (5.63) позволяет последовательно находить ковариационные матрицы $\mathbf{P}$ на каждом такте наблюдений, начиная с матрицы $\mathbf{P}_0$. Это уравнение составлено для произвольной матрицы $\mathbf{K}_i$.

Критерием нахождения $\mathbf{K}$, как следует из (5.57), служит минимум суммы дисперсий ошибок оценок, т. е. минимум следа ковариационной матрицы. Потребуем, чтобы $\mathbf{K}_i$ на всех тактах измерений обеспечивала минимум следа ковариационной матрицы $\mathbf{P}_n$:

$$\arg \min_{\mathbf{K}_i} \text{sp } \mathbf{P}_n ; i = \overline{1, n}. \quad (5.64)$$

Задача в постановке (5.63), (5.64) относится к многошаговым задачам дифференциального исчисления со связью в форме ковариационного уравнения (5.63). Для ее решения составим гамильтониан [10]. Учитывая, что минимизируемая функция содержит только терминальный член ($\text{sp} \mathbf{P}_n$), гамильтониан $\mathbf{G}_i$ можно записать в виде следа произведения двух матриц: ковариационной матрицы $\mathbf{P}_i$ и транспонированной матрицы множителей Лагранжа Λ_i :

$$\mathbf{G}_i = \text{sp} [\mathbf{P}_i \Lambda_i^T]. \quad (5.65)$$

Запишем необходимые условия минимума:

$$\partial \mathbf{G}_i / \partial \mathbf{K}_i = \mathbf{0}; \quad \partial \mathbf{G}_i / \partial \mathbf{P}_{i-1} = \Lambda_{i-1}^T \quad (5.66)$$

и граничное условие в рассматриваемой задаче:

$$\Lambda_n^T = [\partial \text{sp}(\mathbf{P}_n) / \partial \mathbf{P}_n] = \mathbf{E}_m, \quad (5.67)$$

где $\mathbf{E}_m$ — единичная матрица порядка m .

Из первого необходимого условия имеем: $\partial \text{sp} [\mathbf{P}_i \Lambda_i^T] / \partial \mathbf{K}_i = \mathbf{0}$. Подставляя в числитель этого условия, вместо $\mathbf{P}_i$, правую часть уравнения (5.63) и применяя формулы дифференцирования следа матрицы по матрице (см. прил. 15), получаем:

$$\begin{aligned} & -\Lambda_i \mathbf{P}_{i-1} \mathbf{a}_i^T - \Lambda_i^T \mathbf{P}_{i-1} \mathbf{a}_i^T + \Lambda_i \mathbf{K}_i (\mathbf{a}_i \mathbf{P}_{i-1} \mathbf{a}_i^T + \sigma^2) + \\ & + \Lambda_i^T \mathbf{K}_i (\mathbf{a}_i \mathbf{P}_{i-1} \mathbf{a}_i^T + \sigma^2) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.68)$$

Поступая аналогично, из второго необходимого условия, после дифференцирования $\text{sp}\{[(\mathbf{E}_m - \mathbf{K}_i \mathbf{a}_i) \mathbf{P}_{i-1} (\mathbf{E}_m - \mathbf{K}_i \mathbf{a}_i)^T + \sigma^2 \mathbf{K}_i (\mathbf{K}_i)^T] \Lambda_i^T\}$ по матрице $\mathbf{P}_{i-1}$, получаем следующее матричное уравнение:

$$(\mathbf{E}_m - \mathbf{K}_i \mathbf{a}_i)^T \Lambda_i^T (\mathbf{E}_m - \mathbf{K}_i \mathbf{a}_i) = \Lambda_{i-1}^T, \quad \Lambda_n^T = \mathbf{E}_m. \quad (5.69)$$

Граничное условие для матрицы множителей Лагранжа на правом конце следует из (5.67).

Полученные соотношения (5.63), (5.68), (5.69) определяют двухточечную краевую задачу, поскольку ковариационное уравнение (5.63) имеет начальную ковариационную матрицу $\mathbf{P}_0$, заданную на левом конце рассматриваемой последовательности измерений, а матричное уравнение (5.69) для множителей Лагранжа имеет граничное значение на правом конце.

Решение возникшей задачи найдем, опираясь на свойства полученных уравнений и общие свойства матриц. Так, из (5.69) следует, что матрица множителей Лагранжа Λ на правом конце — симметричная положительно определенная матрица. Эти ее свойства сохраняются и при рассмотрении последовательности матриц Λ , получаемых по уравнению (5.69) в обратном порядке следования измерений.

Положительная определенность матриц Λ означает существование их обратных матриц. Применяя свойства симметричности и неособенности матриц Λ к уравнению (5.68), преобразуем это уравнение к виду:

$$-2 \mathbf{P}_{i-1} \mathbf{a}_i^T + 2 \mathbf{K}_i (\mathbf{a}_i \mathbf{P}_{i-1} \mathbf{a}_i^T + \sigma^2) = \mathbf{0},$$

откуда непосредственно следует утверждение (5.62) теоремы 5.3. ◀

Для получения ковариационного уравнения, характеризующего точность оптимальных оценок, подставим вектор $\mathbf{K}$ (5.62) в выражение (5.63), справедливое для произвольной $\mathbf{K}_i$; после несложных преобразований в результате такой подстановки получим:

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_{i-1} - \frac{\mathbf{P}_{i-1} \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i \mathbf{P}_{i-1}}{\mathbf{a}_i \mathbf{P}_{i-1} \mathbf{a}_i^T + \sigma^2}. \quad (5.70)$$

Второе слагаемое правой части (5.70) представлено в виде дроби, чтобы подчеркнуть, что $(\mathbf{a}_i \mathbf{P}_{i-1} \mathbf{a}_i^T + \sigma^2)$ — скаляр. Полученное матричное уравнение носит название **уравнения Риккати**. Форма (5.70) — разностная форма для скалярного измерения.

Таким образом, показано, что алгоритм оптимальной рекуррентной оценки параметров регрессионной модели (5.52) включает следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\beta}_i &= \hat{\beta}_{i-1} + \mathbf{K}_i (y_i - \mathbf{a}_i \hat{\beta}_{i-1}); \quad \hat{\beta}_0 = M(\beta_0) = \beta_0; \\ \mathbf{K}_i &= \mathbf{P}_{i-1} \mathbf{a}_i^T (\mathbf{a}_i \mathbf{P}_{i-1} \mathbf{a}_i^T + \sigma^2)^{-1}; \\ \mathbf{P}_i &= \mathbf{P}_{i-1} - \mathbf{P}_{i-1} \mathbf{a}_i^T (\mathbf{a}_i \mathbf{P}_{i-1} \mathbf{a}_i^T + \sigma^2)^{-1} \mathbf{a}_i \mathbf{P}_{i-1}. \end{aligned} \right\} \quad (5.71)$$

Эти оценки удовлетворяют условиям (5.56), (5.57) и, поэтому, являются несмещенными и эффективными.

Покажем теперь, что алгоритм (5.71) служит рекуррентной формой алгоритма (5.13) МНК. Для этого обратимся к результатам *разд. 5.2.2*.

Согласно (5.20), ковариационная $(m \times m)$ -матрица $\mathbf{P}$ ошибок оценок (5.15) равна $\mathbf{P} = \text{cov}(\mathbf{e}) = \sigma^2(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$. Применительно к последовательным измерениям, ранее введенная матрица $\mathbf{A}$ соответствует завершённому процессу n измерений, т. е. $\mathbf{A} = \mathbf{A}_n$. Первым i измерениям соответствует матрица $\mathbf{A}_i$, содержащая первые i строк матрицы $\mathbf{A}_n$. Аналогичные обозначения можно сделать применительно к вектору $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_n$ алгоритма (5.13). Тогда, оценки параметров, полученные по алгоритму (5.13) с использованием первых i измерений, можно представить в виде:

$$\hat{\beta}_i = (\mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i)^{-1} \mathbf{A}_i^T \mathbf{Y}_i. \quad (5.72)$$

Матрица $\mathbf{A}_i$ может быть представлена объединением матрицы $\mathbf{A}_{i-1}$ и строки $\mathbf{a}_i$ — i -ой строки матрицы $\mathbf{A}_n$. Аналогично, $\mathbf{Y}_i$ представим как совокупность вектора $\mathbf{Y}_{i-1}$ и y_i — i -го измеренного значения:

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{i-1} \\ \mathbf{a}_i \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Y}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{i-1} \\ y_i \end{bmatrix}.$$

Это позволяет представить элементы алгоритма (5.72) в следующем виде:

$$(\mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i)^{-1} = [\mathbf{A}_{i-1}^T \mathbf{A}_{i-1} + \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i]^{-1}; \quad (5.73)$$

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{Y}_i = [\mathbf{A}_{i-1}^T \mathbf{Y}_{i-1} + \mathbf{a}_i^T y_i]. \quad (5.74)$$

Введем обозначение:

$$(\mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i)^{-1} = \mathbf{S}_i \quad (5.75)$$

и перепишем выражения (5.72) и (5.73) с учетом (5.74) и (5.75):

$$\hat{\beta}_i = \mathbf{S}_i [\mathbf{A}_{i-1}^T \mathbf{Y}_{i-1} + \mathbf{a}_i^T y_i]; \quad (5.76)$$

$$\mathbf{S}_i = [\mathbf{S}_{i-1}^{-1} + \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i]^{-1}. \quad (5.77)$$

Выражение (5.77) может быть преобразовано с использованием **леммы об обращении матриц** [10, 12, 13].

Согласно этой лемме, для $(m \times m)$ -матрицы $\mathbf{M}$, $(r \times m)$ -матрицы $\mathbf{H}$ и $(r \times r)$ -матрицы $\mathbf{R}$ справедливо следующее соотношение:

$$[\mathbf{M}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}]^{-1} = \mathbf{M} - \mathbf{M} \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{M} \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{H} \mathbf{M}. \quad (5.78)$$

Применяя выражение (5.78) к формуле (5.77), в которой $\mathbf{S}$ — $(m \times m)$ -матрица, а строка $\mathbf{a}$ имеет размерность $(1 \times m)$, получаем рекуррентное соотношение, связывающее матрицы $\mathbf{S}$ (5.75) на соседних тактах измерений:

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{S}_{i-1} - \mathbf{S}_{i-1} \mathbf{a}_i^T (\mathbf{a}_i \mathbf{S}_{i-1} \mathbf{a}_i^T + 1)^{-1} \mathbf{a}_i \mathbf{S}_{i-1}. \quad (5.79)$$

Отметим, что в скобках правой части (5.79) записана скалярная величина.

Получение рекуррентного выражения (5.79) позволяет записать (5.76) в более рациональном виде. Подставим (5.79) в (5.76):

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_i &= \mathbf{S}_i[\mathbf{A}_{i-1}^T \mathbf{Y}_{i-1} + \mathbf{a}_i^T y_i] = \mathbf{S}_{i-1} \mathbf{A}_{i-1}^T \mathbf{Y}_{i-1} + \mathbf{S}_{i-1} \mathbf{a}_i^T y_i - \\ &- \mathbf{S}_{i-1} \mathbf{a}_i^T (\mathbf{a}_i \mathbf{S}_{i-1} \mathbf{a}_i^T + 1)^{-1} \mathbf{a}_i \mathbf{S}_{i-1} [\mathbf{A}_{i-1}^T \mathbf{Y}_{i-1} + \mathbf{a}_i^T y_i] = \hat{\beta}_{i-1} + \mathbf{S}_{i-1} \mathbf{a}_i^T y_i - \\ &- \mathbf{S}_{i-1} \mathbf{a}_i^T (\mathbf{a}_i \mathbf{S}_{i-1} \mathbf{a}_i^T + 1)^{-1} \mathbf{a}_i \hat{\beta}_{i-1} - \mathbf{S}_{i-1} \mathbf{a}_i^T (\mathbf{a}_i \mathbf{S}_{i-1} \mathbf{a}_i^T + 1)^{-1} \mathbf{a}_i \mathbf{S}_{i-1} \mathbf{a}_i^T y_i.\end{aligned}$$

Разность второго и четвертого слагаемых правой части полученного выражения, учитывая скалярность $(\mathbf{a}_i \mathbf{S}_{i-1} \mathbf{a}_i^T + 1)$, упрощается:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{i-1} \mathbf{a}_i^T y_i - \mathbf{S}_{i-1} \mathbf{a}_i^T (\mathbf{a}_i \mathbf{S}_{i-1} \mathbf{a}_i^T + 1)^{-1} \mathbf{a}_i \mathbf{S}_{i-1} \mathbf{a}_i^T y_i &= \\ &= \mathbf{S}_{i-1} \mathbf{a}_i^T (\mathbf{a}_i \mathbf{S}_{i-1} \mathbf{a}_i^T + 1)^{-1} y_i,\end{aligned}$$

поэтому выражение (5.76) в окончательной форме имеет вид:

$$\hat{\beta}_i = \hat{\beta}_{i-1} + \mathbf{S}_{i-1} \mathbf{a}_i^T (\mathbf{a}_i \mathbf{S}_{i-1} \mathbf{a}_i^T + 1)^{-1} (y_i - \mathbf{a}_i \hat{\beta}_{i-1})$$

Таким образом, рекуррентная форма алгоритма МНК содержит следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned}\hat{\beta}_i &= \hat{\beta}_{i-1} + \mathbf{S}_{i-1} \mathbf{a}_i^T (\mathbf{a}_i \mathbf{S}_{i-1} \mathbf{a}_i^T + 1)^{-1} (y_i - \mathbf{a}_i \hat{\beta}_{i-1}); \\ \mathbf{S}_i &= \mathbf{S}_{i-1} - \mathbf{S}_{i-1} \mathbf{a}_i^T (\mathbf{a}_i \mathbf{S}_{i-1} \mathbf{a}_i^T + 1)^{-1} \mathbf{a}_i \mathbf{S}_{i-1}.\end{aligned}\right\} \quad (5.80)$$

В случае, когда начальные условия для уравнений (5.80) не заданы, в этом качестве могут быть использованы результаты первых m измерений. При накоплении m измерений вектор оценок вычисляется по формуле (5.72), а матрица $\mathbf{S}_m$ – по формуле (5.75):

$$\hat{\beta}_m = (\mathbf{A}_m)^{-1} \mathbf{Y}_m, \quad \mathbf{S}_m = (\mathbf{A}_m^T \mathbf{A}_m)^{-1}. \quad (5.81)$$

После получения значений (5.81), дальнейшие вычисления (для $i > m$) осуществляются по алгоритму (5.80).

Сопоставление алгоритмов (5.71) и (5.80) показывает их полную идентичность. Действительно, из соотношений (5.20), (5.75) следует $\mathbf{P}_i = \sigma^2 \mathbf{S}_i$. Это позволяет переписать алгоритм (5.71) в форме (5.80). Установленная идентичность алгоритмов (5.71) и (5.80) свидетельствует об эффективности оценок, получаемых методом наименьших квадратов. Дополнительно к отмеченной идентичности алгоритмов, в конце раздела будут приведены и другие свойства рекуррентного алгоритма МНК (5.80).

Пример 5.3. По данным наблюдений из примера 5.1 получить оценки квадратичной регрессии, используя рекуррентный алгоритм МНК (5.80).

□ Решение. Подобная задача была решена в примере 5.1 (см. рис. 5.2, б) с использованием алгоритма (5.13). В результате решения задачи был получен вектор оценок параметров регрессии $\hat{\beta} = [-0.753, -0.078, 0.178]^T$. Применим теперь для решения (рис. 5.4) задачи рекуррентный алгоритм (5.80).

$$\begin{aligned}
n &:= 10 \quad i := 0..n-1 \quad x_i := i \quad a_i := \left[1 \quad x_i \quad x_i^2 \right] \\
A_3 &:= \text{stack} \left[a_0, a_1, a_2 \right] \quad Y_3 := \text{stack} \left[Y_0, Y_1, Y_2 \right] \\
A_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad Y_3 = \begin{pmatrix} -0.72 \\ -0.637 \\ -0.031 \end{pmatrix} \\
\beta_3 &:= A_3^{-1} \cdot Y_3 \quad s_3 := \left[A_3^T A_3 \right]^{-1} \\
\beta_3 &= \begin{pmatrix} -0.72 \\ -0.179 \\ 0.262 \end{pmatrix} \quad s_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1.5 & 0.5 \\ -1.5 & 6.5 & -3 \\ 0.5 & -3 & 1.5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

	0
0	-0.72
1	-0.637
2	-0.031
3	0.533
4	1.269
5	3.537
6	5.158
7	7.499
8	10.62
9	12.531

Рис. 5.4, а. Определение начальных условий для рекуррентного алгоритма

При решении задачи в среде Mathcad промежуточные результаты (векторы, матрицы) целесообразно выводить на экран для повышения информативности используемых процедур. В результате такого вывода промежуточных данных объем mcd-файла получается таким, который невозможно привести в нашем материале в виде одного блока. Поэтому на рис. 5.4 приведены копии последовательных фрагментов mcd-файла с решением рассматриваемой задачи. Предварительно, пользуясь рекомендациями к формулам (5.81), определим начальные значения оценок $\hat{\beta}_m$ и матрицы S_m . Процедура получения этих данных приведена на рис. 5.4, а.

Задавая i -ую строку матрицы A (выделена заливкой в первой строке рис. 5.4, а), с применением функции **stack** формируем матрицу A_3 , содержащую первые 3 строки матрицы A (см. рис. 5.2, б). Аналогично, с помощью функции **stack** формируется вектор Y_3 , содержащий первые три элемента вектора измеренных данных Y . Далее, по формулам (5.81) определяются необходимые начальные данные, которые в файле (см. рис. 5.4, а) обозначены β_3 и s_3 .

Следует отметить, что применение формул (5.81) не является единственно возможным способом определения начальных данных для рекуррентного алгоритма (5.80). Эти алгоритмы обладают низкой чувствительностью к начальным (стартовым) значениям своих элементов. В частности, вектор начальных значений $\hat{\beta}_0$ в (5.80) может быть задан произвольным, а матрица S_0 при этом должна быть возможно большей [10].

Последующие вычисления по алгоритму (5.80) используют циклическую процедуру, один из вариантов которой приведен на рис. 5.4, б. Простота цикла (см. рис. 5.4, б) исключает необходимость подробных пояснений.

```

d := | S ← s3
      | b ← β3
      | for i ∈ 3.. 9
      |   | K ←  $\frac{S \cdot a_i^T}{a_i \cdot S \cdot a_i^T + 1}$ 
      |   | b ← b + K · (Yi – ai · b)
      |   | S ← S – K · (ai · S · aiT + 1) · KT
      |   | for j ∈ 0.. 2
      |   |   | pj ← | Sj,j |
      |   |   | p⟨i⟩ ← p
      |   |   | Σ⟨i⟩ ← stack | b, p⟨i⟩ |
      |   | ΣT

```

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	-0.748	0.076	0.12	0.95	2.45	0.25
4	-0.766	0.154	0.09	0.886	1.243	0.071
5	-0.629	-0.234	0.204	0.821	0.727	0.027
6	-0.648	-0.193	0.195	0.762	0.464	0.012
7	-0.653	-0.186	0.193	0.708	0.315	5.952·10 ⁻³
8	-0.602	-0.256	0.205	0.661	0.224	3.247·10 ⁻³
9	-0.753	-0.078	0.178	0.618	0.166	1.894·10 ⁻³

d =

Рис. 5.4, б. Реализация рекуррентного алгоритма

Особенность приведенного варианта реализации алгоритма (5.80) заключается лишь в формировании векторов, включающих промежуточные значения оценок (вектор **b** на рис. 5.4, б) и дисперсии (диагональные элементы матриц **S_i**) оценок (вектор **p** на рис. 5.4, б). Составной вектор ($\Sigma^{< \triangleright}$) выводится в виде строки, поэтому результатом цикла служит матрица, состоящая из последовательности указанных строк. Первые три столбца результирующей матрицы **d** (см. рис. 5.4, б) содержат значения оценок параметров регрессии, которые получены по результатам каждого измерения (после трех первых, использованных для вычисления начальных значений).

$d := \text{submatrix}(d, 3, 9, 0, 5)$

$d =$

	0	1	2	3	4	5
0	-0.748	0.076	0.12	0.95	2.45	0.25
1	-0.766	0.154	0.09	0.886	1.243	0.071
2	-0.629	-0.234	0.204	0.821	0.727	0.027
3	-0.648	-0.193	0.195	0.762	0.464	0.012
4	-0.653	-0.186	0.193	0.708	0.315	$5.952 \cdot 10^{-3}$
5	-0.602	-0.256	0.205	0.661	0.224	$3.247 \cdot 10^{-3}$
6	-0.753	-0.078	0.178	0.618	0.166	$1.894 \cdot 10^{-3}$

$c := (-0.72 \ -0.179 \ 0.262 \ 1 \ 6.5 \ 1.5) \quad d := \text{stack}(c, d) \quad k := 0..7$

$d =$

	0	1	2	3	4	5
0	-0.72	-0.179	0.262	1	6.5	1.5
1	-0.748	0.076	0.12	0.95	2.45	0.25
2	-0.766	0.154	0.09	0.886	1.243	0.071
3	-0.629	-0.234	0.204	0.821	0.727	0.027
4	-0.648	-0.193	0.195	0.762	0.464	0.012
5	-0.653	-0.186	0.193	0.708	0.315	$5.952 \cdot 10^{-3}$
6	-0.602	-0.256	0.205	0.661	0.224	$3.247 \cdot 10^{-3}$
7	-0.753	-0.078	0.178	0.618	0.166	$1.894 \cdot 10^{-3}$

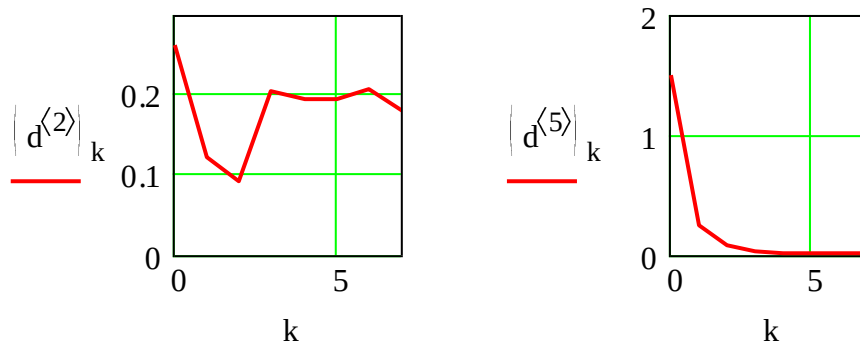


Рис. 5.4, в. Результаты промежуточных оценок

Три последних столбца матрицы результатов (см. рис. 5.4, б) относятся к диагональным элементам матрицы S_i . Эти матрицы, как следует из (5.20), (5.75), отличаются от ковариационных матриц ошибок оценки лишь постоянным множителем: $P_i = \sigma^2 S_i$. Поэтому изменение диагональных элементов матриц S_i в процессе накопления данных измерений хорошо передает тенденции изменения дисперсий ошибок оценки.

Заключительный фрагмент файла представлен на рис. 5.4, в. В нем из матрицы, полученной по результатам цикла, вырезается информативная часть, к которой добавляется первая строка — начальные данные из первого фрагмента (см. рис. 5.4, а). На графиках (см. рис. 5.4, в) приведены процесс последовательного изменения оценки третьего элемента вектора параметров (слева) и характер изменения его дисперсии в процессе рекуррентной оценки (справа).

Нетрудно заметить, что результаты, полученные по рекуррентному алгоритму для последнего такта измерений (последняя строка матрицы $\mathbf{d}$ на рис. 5.4, в), полностью совпали с ранее полученными результатами (см. рис. 5.2, б и 5.2, в). Из последней строки матрицы $\mathbf{d}$ следует, что $\hat{\beta}_9 = [-0.753, -0.078, 0.178]^T$, а диагональные элементы матрицы $\mathbf{S}_9$ отличаются от дисперсий — диагональных элементов матрицы $\mathbf{P}$ (см. рис. 5.2, в) на величину вычисленной ранее остаточной дисперсии 0.13. Например, $0.0804 : 0.13 = 0.618$. Это объясняется тем, что матрица $\mathbf{S}_9$, соответствующая последнему измерению, равна матрице $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$, полученной по результатам всех измерений в примере 5.1. ■

Проведенный анализ рекуррентных алгоритмов оценки позволяет сформулировать их основные свойства.

Свойства рекуррентного алгоритма МНК

1. Вектор коэффициентов алгоритма (5.80) совпадает с аналогичным вектором алгоритма (5.71), т. е. $\mathbf{K}_i = \mathbf{S}_{i-1} \mathbf{a}_i^T (\mathbf{a}_i \mathbf{S}_{i-1} \mathbf{a}_i^T + 1)^{-1}$.

2. Коэффициенты усиления $\mathbf{K}_i$ алгоритмов (5.71) и (5.80), обеспечивающие минимум критерия (5.64), доставляют минимум критериям $(\text{sp } \mathbf{P}_i)$ на каждом такте измерений.

3. Оценки, полученные по рекуррентным алгоритмам (5.71) и (5.80) на последнем такте измерений ($i = n$), равны оценкам параметров, полученным с использованием алгоритма (5.13) для всей совокупности измерений.

Перечисленные свойства рекуррентного алгоритма очевидны.

Первое из них опирается на связь ковариационной матрицы $\mathbf{P}$ (5.20) и матрицы $\mathbf{S}$ (5.75), согласно которой эти матрицы отличаются лишь постоянным множителем: $\mathbf{P}_i = \sigma^2 \mathbf{S}_i$. Второе свойство свидетельствует об оптимальности оценок на каждом такте вычислительного процесса; в справедливости второго свойства достаточно просто убедиться, применяя формулы (см. прил.15) дифференцирования $(\text{sp } \mathbf{P}_i)$ по матрице $\mathbf{K}_i$ для ковариационного уравнения (5.63). Предоставляем выполнение необходимых выкладок в этой части читателю.

Последнее свойство определяется оптимальностью алгоритмов (5.13), (5.71) и (5.80). Иллюстрацией этого свойства служит совпадение оценок, полученных в примерах 5.3 и 5.1 алгоритмами (5.80) и (5.13) по одному и тому же массиву данных наблюдений.

5.3. Подходы к анализу адекватности линейной регрессии

Задачи линейной регрессии, как следует из предыдущих разделов, являясь частным случаем задач аппроксимации, позволяют получать параметры регрессионных зависимостей, с той или иной степенью точности представляющих данные наблюдений. При решении любой из задач регрессии может быть использовано несколько вариантов регрессионных зависимостей, например, ва-

рианты (5.3)—(5.5). Сопоставление вариантов линейной регрессии осуществляется с применением точных и приближенных подходов.

При точной проверке адекватности используется критерий Фишера [5]. Эта проверка основана на многократном проведении экспериментов для получения нескольких откликов для одного значения фактора. В результате использования критерия Фишера проводится проверка гипотезы об адекватности, например, простой линейной регрессии. В случае отклонения этой гипотезы делается вывод о том, что следует принять более сложную регрессионную зависимость и т. д.

Касаясь практического применения точной проверки адекватности, следует отметить, что в подавляющем большинстве прикладных задач регрессионного анализа многократное проведение эксперимента в одинаковых условиях практически невозможно. Кроме того, точная проверка имеет теоретическое обоснование для линейной регрессии; варианты нелинейной регрессии не могут быть проанализированы в рамках описанного подхода. Поэтому в прикладной математической статистике чаще используются упрощенные подходы. Среди них наиболее распространен подход, в рамках которого исследователь выбирает несколько вариантов регрессионных зависимостей и для каждого варианта получает оценки регрессионных параметров $\hat{\beta}$, остаточную сумму квадратов (5.23) или остаточную дисперсию (5.36). Две последние величины отличается лишь множитель, поэтому объединим их обозначением $J(\hat{\beta})$.

Значение $J(\hat{\beta})$ целесообразно использовать при сопоставительном анализе вариантов регрессионных зависимостей как меру адекватности регрессионной модели данным наблюдений. Описываемый подход требует решения задач регрессии для каждого из сопоставляемых вариантов моделей, что без привлечения компьютеров может быть затруднительно. Применение СКМ делает подобный подход особенно удобным при практическом регрессионном анализе, учитывая предельную простоту перехода от одного варианта регрессионной модели к другому в рамках одной программы.

Например, рассматривая варианты полиномиальной регрессии, включающие полином первого порядка (простая линейная регрессия), полином второго порядка (квадратичная регрессия) и т. д., в результате решения задачи для каждого из них получаем значение $J_m(\hat{\beta})$, где m — число искоемых параметров. Эти значения образуют невозрастающий ряд

$$J_2(\hat{\beta}) \geq J_3(\hat{\beta}) \geq J_4(\hat{\beta}) \geq \dots, \quad (5.82)$$

имеющий тенденцию к достижению установившегося значения $J_{\min}(\hat{\beta})$ по мере повышения порядка полинома (увеличения числа параметров, усложнения регрессионной модели).

Типовой характер зависимости $J_m(\hat{\beta}) = f(m)$ представлен на рис. 5.5. Требуемый порядок полинома можно определить либо по установившемуся значению, либо вводя пороговое значение для величины $J_m(\hat{\beta})$.

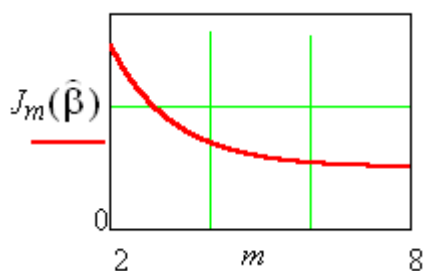


Рис. 5.5. Зависимость критерия от m

При сопоставлении разнородных моделей регрессии, целесообразно использовать другую (относительную) величину, которая позволит сопоставлять безразмерные относительные числовые характеристики качества оценок для различных вариантов.

В качестве такой относительной меры можно использовать, например,

$$J_m(\hat{\beta}) = J_m(\hat{\beta})/J_{\min}(\hat{\beta}). \quad (5.83)$$

К достоинствам описанного упрощенного подхода следует отнести его простоту и возможность применения и в задачах нелинейной регрессии.

Рассмотрим пример.

Пример 5.4. Для данных наблюдения, приведенных в примерах 5.1 и 5.3, сопоставить решения задач полиномиальной регрессии, используя регрессионные зависимости в виде полиномов $(m - 1)$ -го порядка при $m = 2, 3, 4, 5, 6$, где m — число искомых параметров.

□ Решение. На рис. 5.6 приведено решение рассматриваемого примера в Mathcad для одного из вариантов — полинома четвертого порядка ($m = 5$).

$n := 10 \quad i := 0..n - 1 \quad x_i := i$

$$Y^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	-0.72	-0.637	-0.031	0.533	1.269	3.537	5.158	7.499	10.62	12.531

$a_i := 1 \quad b_i := x_i \quad c_i := |x_i|^2 \quad d_i := |x_i|^3 \quad e_i := |x_i|^4 \quad f_i := |x_i|^5$

$A := \text{augment}(a, b, c, d, e)$

$m := \text{cols}(A) \quad m = 5$

$Y_0 := A \cdot \beta \quad \Delta := Y_0 - Y \quad \delta := \Delta^T \cdot \Delta$

$$\delta = 0.443$$

$$\beta := |A^T \cdot A|^{-1} \cdot A^T \cdot Y$$

$$\beta = \begin{pmatrix} -0.772 \\ 0.404 \\ -0.177 \\ 0.073 \\ -4.429 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

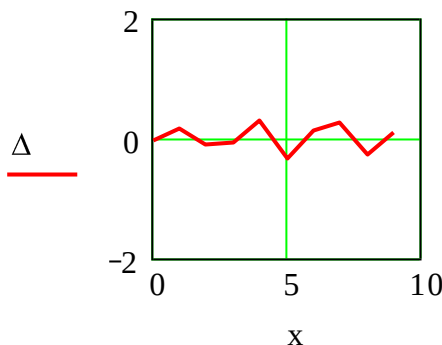
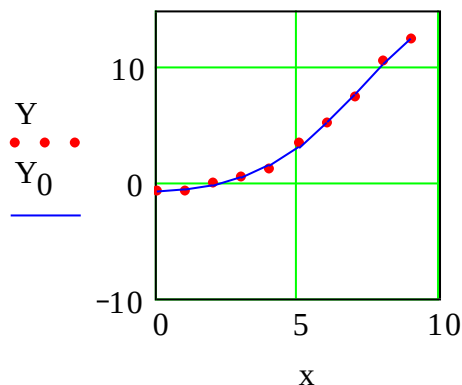


Рис. 5.6. Решение примера 5.4 для полинома четвертого порядка

При решении применен алгоритм (5.13) и сохранена основа процедуры, использованной ранее в примере 5.1 (см. рис. 5.2). Поскольку, по условиям примера 5.4, необходимо осуществить сопоставление нескольких полиномиальных регрессионных выражений (до полинома пятого порядка включительно), введены все необходимые элементы столбцов матрицы $\mathbf{A}$ (на рис. 5.6 они обозначены символами a, b, c, d, e, f).

Формирование полинома требуемого порядка из этих элементов в каждой конкретной задаче осуществляется введением нужных аргументов встроенной функции **augment**. Остаточная сумма квадратов (обозначена в файле как δ) для варианта, когда в качестве регрессионного выражения используется полином четвертого порядка, $\delta = 0.443$. Меняя состав аргументов функции **augment**, получаем аналогичные значения для других вариантов регрессионной модели. Результаты вычислений сведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Порядок полинома	1	2	3	4	5
Остаточная сумма квадратов δ	17.697	0.91	0.766	0.443	0.396

Данные табл. 5.1 подтверждают качественную зависимость (см. рис. 5.5) остаточной суммы квадратов от порядка полинома (или от числа параметров регрессии). В данном случае можно с уверенностью утверждать, что полином первого порядка (простая линейная регрессия) не может служить приемлемой моделью, согласующейся с данными наблюдения. Переход к полиному второго порядка приводит к резкому уменьшению величины δ , которая для этого варианта достигает значения $\delta = 0.91$. Дальнейшее повышение степени используемого полинома сопровождается постепенным уменьшением значений остаточной суммы квадратов δ до значения 0.396. ■

При выборе регрессионной модели путем сопоставления значений $J(\hat{\beta})$ все же остается некоторая неопределенность, которая связана с наличием ряда вариантов с близкими мерами адекватности. Так, по данным табл. 5.1 два последних варианта (полином четвертого и пятого порядков) характеризуются близкими значениями остаточной суммы квадратов, 0.443 и 0.396. Из таких вариантов обычно выбирают более простой, однако, окончательный выбор может быть осуществлен с применением дополнительных характеристик. В качестве этих характеристик могут выступать функции чувствительности [17] критериев $J(\hat{\beta})$ к вариациям оценок отдельных параметров $\hat{\beta}_j$, где $j = \overline{1, m}$.

С помощью функций чувствительности

$$f_j = \partial J(\hat{\beta}) / \partial \hat{\beta}_j \quad (5.84)$$

можно определить вклад оценки каждого параметра в результирующее значение меры адекватности $J(\hat{\beta})$, а также оценить необходимую точность задания

параметров в результирующем регрессионном соотношении. Умножая функцию чувствительности на приращение величины $\hat{\beta}_j$, получаем приращение меры адекватности:

$$\Delta[J(\hat{\beta})] \approx f_j \Delta[\hat{\beta}_j]. \quad (5.85)$$

При сопоставительном анализе чувствительности различных вариантов регрессионных зависимостей удобно перейти от абсолютных величин к относительным, вводя относительную функцию чувствительности вида:

$$F_j \approx f_j |\hat{\beta}_j| / J(\hat{\beta}). \quad (5.86)$$

Выбирая, например, в качестве $J(\hat{\beta})$ значения остаточной суммы квадратов, получим вектор функций чувствительности $\mathbf{f}$ путем дифференцирования скалярного произведения (5.23) по вектору оценок $\hat{\beta}$. Учитывая (5.23), (5.17), (5.18) и применяя формулы векторного дифференцирования (прил. 15), имеем:

$$J(\hat{\beta}) = S = \mathbf{e}_y^T \mathbf{e}_y = \hat{\beta}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \hat{\beta} - \hat{\beta}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Y} - \mathbf{Y}^T \mathbf{A} \hat{\beta} + \mathbf{Y}^T \mathbf{Y};$$

$$\mathbf{f} = \partial J(\hat{\beta}) / \partial \hat{\beta} = 2\mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{A} \hat{\beta} - \mathbf{Y}). \quad (5.87)$$

Вектор функций чувствительности приведен в (5.87) в виде m -мерного столбца $\mathbf{f}$. Умножая вектор $\mathbf{f}$ слева на диагональную матрицу $\mathbf{N}$, элементы диагонали которой составляют вектор $|\hat{\beta}| / J(\hat{\beta})$, получаем $(m \times 1)$ -вектор относительных функций чувствительности $\mathbf{F} = \mathbf{Nf}$ с элементами (5.86).

Применение функций чувствительности в качестве дополнительного способа выбора регрессионных моделей проиллюстрируем примером, в котором используем один из вариантов, проанализированных в примере 5.4.

Пример 5.5. Пусть в условиях примера 5.4 в качестве варианта регрессионной модели выбран полином второй степени $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$. В результате решения задачи регрессии найдены МНК-оценки параметров (см. рис. 5.2, б). Получить функции чувствительности $\mathbf{F}$ остаточной суммы квадратов и определить возможность дальнейшего упрощения регрессионной модели.

□ Решение. МНК-оценки параметров, полученные ранее (см. рис. 5.2, б) позволяют записать модель в виде: $\hat{y} = -0.753 - 0.078x + 0.178x^2$.

На рис. 5.7, а приведена копия mcd-файла, в котором в сокращенном варианте повторяется решение задачи регрессии для рассматриваемого случая ($m = 3$) и определяется вектор относительных функций чувствительности $\mathbf{F}$.

Анализ элементов вектора $\mathbf{F}$ показывает, что наименьшая функция чувствительности относится к оценке $\hat{\beta}_2$. Модуль оценки этого параметра (0.078) имеет, кроме того, и наименьшее значение по сравнению с двумя другими оценками параметров. Поэтому влияние $\hat{\beta}_2$ на качество результата решения задачи регрессии минимальное и в качестве возможного варианта может быть выбрана регрессионная модель, не включающая этот параметр: $y = \beta_0 + \beta_1 x$. Результат решения задачи при такой модели приведен на рис. 5.7, б.

$$\begin{aligned}
n &:= 10 & i &:= 0..n-1 & x_i &:= i \\
a_i &:= 1 & b_i &:= x_i & c_i &:= |x_i|^2 & d_i &:= |x_i|^3 & e_i &:= |x_i|^4 & f_i &:= |x_i|^5 \\
A &:= \text{augment}(a, b, c) & \beta &:= (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot Y & \beta &= \begin{pmatrix} -0.753 \\ -0.078 \\ 0.178 \end{pmatrix} \\
m &:= \text{cols}(A) & m &= 3 \\
Y_0 &:= A \cdot \beta & \Delta &:= Y_0 - Y & \delta &:= \Delta^T \cdot \Delta & \delta &= 0.91 \\
f &:= 2 \cdot A^T \cdot \Delta & j &:= 0..m-1 & k_j &:= \frac{|\beta_j|}{\delta} & N &:= \text{diag}(k) & F &:= N \cdot f \\
f &= \begin{pmatrix} -1.628 \times 10^{-13} \\ 1.377 \times 10^{-14} \\ 2.275 \times 10^{-12} \end{pmatrix} & k &= \begin{pmatrix} 0.827 \\ 0.086 \\ 0.196 \end{pmatrix} & F &= \begin{pmatrix} -1.346 \times 10^{-13} \\ 1.186 \times 10^{-15} \\ 4.455 \times 10^{-13} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Рис. 5.7, а. Получение вектора относительных функций чувствительности

В результате принятого упрощения получено значение остаточной суммы квадратов (0.948), незначительно отличающееся от значения (0.91) в исходном варианте. Это свидетельствует о возможности применения результирующего регрессионного выражения в виде: $\hat{y} = -0.875 + 0.17 x^2$. ■

$$\begin{aligned}
n &:= 10 & i &:= 0..n-1 & x_i &:= i \\
a_i &:= 1 & b_i &:= x_i & c_i &:= |x_i|^2 & d_i &:= |x_i|^3 & e_i &:= |x_i|^4 & f_i &:= |x_i|^5 \\
A &:= \text{augment}(a, c) & \beta &:= (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot Y & \beta &= \begin{pmatrix} -0.875 \\ 0.17 \end{pmatrix} \\
m &:= \text{cols}(A) & m &= 2 \\
Y_0 &:= A \cdot \beta & \Delta &:= Y_0 - Y & \delta &:= \Delta^T \cdot \Delta & \delta &= 0.948
\end{aligned}$$

Рис. 5.7, б. Решение упрощенной задачи регрессии

5.4. Надежность оценок линейной регрессии.

Доверительные интервалы

Применительно к задачам оценивания, как отмечалось ранее, важное практическое значение имеют такие характеристики, как точность и надежность оценок.

В разд. 5.2. и 5.3 доказаны свойства оценок параметров регрессии, которые могут быть использованы для анализа их точности. Так, точность оценок определяют дисперсии, расположенные на главных диагоналях ковариационных

матриц (5.20) и (5.22). Кроме того, о точности решения задачи регрессии можно судить по остаточной сумме квадратов невязок S (5.23) или остаточной дисперсии (5.36), которые позволяют оценить интегральное отклонение оценок откликов от их измеренных значений. Однако надежность полученных оценок следует определять, как отмечалось в главе 3, с помощью доверительных интервалов. Построим их.

Результатом решения задачи линейной регрессии служат как оценки $\hat{\beta}$ (5.13) параметров регрессии, так и оценки $\hat{Y}$ (5.17) регрессионных зависимостей вида, например, (5.19). Поэтому необходимо построить доверительные интервалы двух видов: доверительные интервалы для параметров регрессии и для регрессионной зависимости. При их формировании следует использовать свойства несмещенной оценки остаточной дисперсии (5.37).

Выше было показано (см. разд. 5.2.2), что $\hat{D}_{\text{ост}}$ (5.37) — несмещенная оценка дисперсии невязок σ^2 , т. е. $M(\hat{D}_{\text{ост}}) = \sigma^2$. Кроме того, можно показать, что, аналогично выборочной дисперсии (см. разд. 2.4.2, выражение (2.29)), дисперсия $\hat{D}_{\text{ост}}$ (5.37) характеризуется распределением хи-квадрат. Действительно, случайная величина

$$d^* = \frac{\hat{D}_{\text{ост}} \cdot (n - m)}{\sigma^2} \quad (5.88)$$

распределена по закону χ^2 с $(n - m)$ степенями свободы [4, 5]. Здесь n — число испытаний (наблюдений); m — число неизвестных параметров.

При построении доверительных интервалов для параметров регрессии введем в рассмотрение случайную величину, равную нормированной оценке k -го регрессионного параметра ($k = \overline{1, m}$): $\hat{z}_k = \frac{\hat{\beta}_k - M(\hat{\beta}_k)}{\sqrt{D(\hat{\beta}_k)}}$, где $D(\hat{\beta}_k)$ — дисперсия

оценки k -го параметра.

В разд. 5.2.2 показано (см. свойство 5 МНК-оценок), что $D(\hat{\beta}_k)$ расположено на месте k -го элемента главной диагонали ковариационной матрицы $\mathbf{P}$ (5.20): $D(\hat{\beta}_k) = \mathbf{P}_{k,k}$. Кроме того, согласно (5.27) $M(\hat{\beta}) = \beta$, поэтому выражение для $\hat{z}_k$ можно переписать:

$$\hat{z}_k = (\hat{\beta}_k - \beta_k) / \sqrt{\mathbf{P}_{k,k}}. \quad (5.89)$$

Ранее сделанные предположения позволяют считать, что $\hat{z}_k \sim N(0, 1)$. Кроме того, случайные величины $\hat{z}_k$ и χ_{n-m}^2 независимы [4].

Тогда статистики

$$T(\hat{\beta}_k) = \frac{\hat{z}_k \sqrt{n - m}}{\sqrt{\chi_{n-m}^2}} = \frac{(\hat{\beta}_k - \beta_k) \sigma}{\sqrt{D(\hat{\beta}_k)} \cdot \sqrt{\hat{D}_{\text{ост}}}} = \frac{(\hat{\beta}_k - \beta_k) \sigma}{\sqrt{\mathbf{P}_{k,k}} \cdot \sqrt{\hat{D}_{\text{ост}}}} \quad (5.90)$$

распределены по закону Стюдента с $(n - m)$ степенями свободы. Выбирая двустороннюю критическую область и уровень значимости α , критические точки $k_{1кр}$ и $k_{2кр}$ определим как квантили порядков $\alpha/2$ и $(1 - \alpha/2)$ соответственно для распределения Стюдента с $(n - m)$ степенями свободы:

$$k_{1кр} = t_{\alpha/2}(n - m) = -k_{кр}; \quad k_{2кр} = k_{кр} = t_{1-\alpha/2}(n - m). \quad (5.91)$$

Из (5.91) следует, что вероятность нахождения случайной величины (5.90) в диапазоне между критическими точками $k_{1кр}$ и $k_{2кр}$ равна доверительной вероятности $\gamma = 1 - \alpha$, т. е. $P[|T(\hat{\beta}_k)| < k_{кр}] = \gamma$. Отсюда, с вероятностью γ :

$$|(\hat{\beta}_k - \beta_k)| < k_{кр} \sqrt{\mathbf{P}_{k,k}} \cdot \sqrt{\hat{D}_{ост}} / \sigma$$

Таким образом, границы доверительного интервала, внутри которых k -ый параметр регрессии находится с вероятностью $\gamma = 1 - \alpha$, соответствуют

$$[(\hat{\beta}_k - \delta_k); (\hat{\beta}_k + \delta_k)]; \quad \delta_k = k_{кр} \sqrt{(\mathbf{A}^T \mathbf{A})_{k,k}^{-1}} \cdot \sqrt{\hat{D}_{ост}}. \quad (5.92)$$

В (5.92) использовано свойство (5.20) ковариационной матрицы $\mathbf{P}$ ошибок оценок (5.15).

При построении доверительных интервалов для регрессионной зависимости введем в рассмотрение случайную величину, равную нормированной оценке i -го отклика ($i = \overline{1, n}$): $\hat{Z}_i = \frac{\hat{y}_i - M(\hat{y}_i)}{\sqrt{D(\hat{y}_i)}}$, где $\hat{y}_i$ — i -ый элемент вектора оценок откликов $\hat{\mathbf{Y}}$ (5.17).

Ранее сделанные предположения позволяют заключить, что $\hat{Z}_i$ имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, т. е. $\hat{Z}_i \sim N(0, 1)$.

Рассматривая статистики

$$T(\hat{y}_i) = \frac{\hat{Z}_i \sqrt{n - m}}{\sqrt{\chi_{n-m}^2}} = \frac{[(\hat{y}_i - M(\hat{y}_i))]}{\sqrt{[\mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T]_{i,i}} \cdot \sqrt{\hat{D}_{ост}}} \quad (5.93)$$

и учитывая независимость случайных величин $\hat{Z}_i$ и χ_{n-m}^2 [4], можно утверждать, что $T(\hat{y}_i)$ распределены по закону Стюдента с $(n - m)$ степенями свободы. В (5.93) использованы: выражение (5.88) и свойство (5.21) МНК-оценок, согласно которому $D(\hat{y}_i) = \sigma^2 [\mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T]_{i,i}$.

Введем $\mathbf{a}_i$ — i -ую строку матрицы $\mathbf{A}$, как это сделано в разд. 5.2.5 применительно к (5.72)—(5.75). Тогда, i -ый диагональный элемент матрицы $\mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$ в выражении (5.93) может быть выражен в виде

$$[\mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T]_{i,i} = D(\hat{y}_i) / \sigma^2 = \mathbf{a}_i (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{a}_i^T. \quad (5.94)$$

Учитывая (5.94) и поступая аналогично предыдущему случаю, получим границы доверительного интервала, внутри которых i -ый элемент вектора оценок откликов $\hat{\mathbf{Y}}$ (5.17) находится с вероятностью $\gamma = 1 - \alpha$:

$$[(\hat{y}_i - \Delta_i); (\hat{y}_i + \Delta_i)]; \Delta_i = k_{кр} \sqrt{\mathbf{a}_i(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{a}_i^T} \cdot \sqrt{\hat{D}_{ост}}. \quad (5.95)$$

Здесь $k_{кр} = t_{1-\alpha/2}(n-m)$ — квантиль порядка $(1-\alpha/2)$ распределения Стьюдента с $(n-m)$ степенями свободы; $(i = \overline{1, n})$.

Отметим здесь, что величина Δ_i (5.95), определяющая точность интервального оценивания y_i , зависит от всех значений фактора x . Это следует из структур матриц $\mathbf{A}$ в задачах линейной регрессии (см. выражение (5.8), рис. 5.2, б). В то же время, существует такое значение фактора x^* , при котором значение Δ достигает минимума Δ^* . По мере удаления значений фактора от x^* значения Δ увеличиваются, т. е. точность интервального оценивания снижается. Ниже это факт иллюстрируется примером простой линейной регрессии.

Таким образом, каждому элементу $\hat{y}_i$ вектора оценок откликов $\hat{\mathbf{Y}}$ (5.17) соответствует значение Δ_i ($i = \overline{1, n}$). С его помощью определяется доверительный интервал, внутри которого с вероятностью $\gamma = 1 - \alpha$ находится истинное значение отклика. Этот доверительный интервал можно использовать и в целях прогнозирования.

Действительно, результатом решения задач регрессии служит регрессионное соотношение вида, например, $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x = [1 \ x] \hat{\beta} = \mathbf{a} \hat{\beta}$, где $\mathbf{a}$ — строка матрицы $\mathbf{A}$; $\hat{\beta}$ — вектор оценок параметров с элементами $\hat{\beta}_0$ и $\hat{\beta}_1$. Регрессионное соотношение может быть использовано для вычисления оценок откликов при любом значении фактора x , в том числе — и для получения прогноза (экстраполированного значения оценки отклика при значении фактора, выходящего за правый предел диапазона значений фактора, полученного при наблюдениях). Если в процессе вычислений $\hat{\beta}_0$ и $\hat{\beta}_1$ производилось n измерений, то прогноз для оценки отклика будет вычисляться с использованием выражения $\hat{y}_q = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_q = [1 \ x_q] \hat{\beta} = \mathbf{a}_q \hat{\beta}$, где $q = n+1, n+2, \dots; x_q > x_n$. Для этих же значений факторов можно вычислить Δ_q и доверительный интервал (5.95).

Общий вид выражений (5.92) и (5.95), справедливых для линейной регрессии, позволяет получить явные зависимости для точностей δ_k и Δ_i доверительных интервалов в каждой конкретной задаче. Так, для простой линейной регрессии ($m = 2$), дисперсии оценок которой выражаются соотношениями (5.44) и (5.45), получаем эти зависимости в форме:

$$\left. \begin{aligned} \delta_0 &= k_{кр} \sqrt{D(\hat{\beta}_0)} \cdot \sqrt{\hat{D}_{ост}} / \sigma = k_{кр} \sqrt{\hat{D}_{ост}} \cdot \sqrt{\bar{x}_B^2 / n D_B}; \\ \delta_1 &= k_{кр} \sqrt{D(\hat{\beta}_1)} \cdot \sqrt{\hat{D}_{ост}} / \sigma = k_{кр} \sqrt{\hat{D}_{ост}} / \sqrt{n D_B}; \\ \Delta_i &= k_{кр} \sqrt{D(\hat{y}_i)} \cdot \sqrt{\hat{D}_{ост}} / \sigma = k_{кр} \sqrt{\hat{D}_{ост}} \cdot \sqrt{1 + \frac{(\bar{x}_B - x_i)^2}{D_B}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.96)$$

Здесь $k_{кр} = t_{1 - \alpha/2} (n - 2)$ — квантиль распределения Стьюдента с $(n - 2)$ степенями свободы порядка $(1 - \alpha/2)$. Из (5.96) можно видеть, что максимальная точность Δ^* интервальных оценок откликов достигается при выборочном среднем значении фактора, т. е. $x^* = \bar{x}_B$. При удалении значений фактора от $\bar{x}_B$, границы доверительного интервала расширяются. Подобный вид зависимости ошибок оценки характерен для ошибок интерполяции, когда ищется оценка внутри некоторого диапазона определения фактора по данным, известным для всего диапазона.

Пример 5.6. По данным 60 наблюдений (см. прил. 14) за процессом изменения погрешности электронного измерителя напряжения, полученным с частотой 10 гц, определить: параметры простой линейной регрессии и границы доверительного интервала, внутри которых i -ые элементы вектора $\hat{Y}$ (5.17) находятся с вероятностью $\gamma = 0.99$.

□ Решение. На рис. 5.8 приведено решение в среде Mathcad.

$$\begin{aligned}
 n &:= \text{length}(Y) & n = 60 & \quad i := 0..n-1 & \quad x_i := 0.1 \cdot i & \quad a_i := 1 & \quad b_i := x_i \\
 A &:= \text{augment}(a, b) & \beta &:= (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot Y \\
 \beta &= \begin{pmatrix} 5.024 \\ -0.106 \end{pmatrix} & Y_0 &:= A \cdot \beta & \text{Вектор оценок откликов} \\
 e_y &:= Y - Y_0 & \text{Вектор ошибок оценок откликов} \\
 S &:= e_y^T \cdot e_y & S = 2.615 & \text{Остаточная сумма квадратов} \\
 D_B &:= \frac{1}{n - m} \cdot S & D_B = 0.045 & \text{Остаточная дисперсия} \\
 \alpha &:= 0.01 & k_{кр} &:= qt\left(1 - \frac{\alpha}{2}, n - m\right) & k_{кр} = 2.663 \\
 C &:= A \cdot (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T & \Delta_i &:= k_{кр} \cdot \sqrt{D_B} \cdot \sqrt{C_{i,i}} & U := Y_0 + \Delta \quad L := Y_0 - \Delta
 \end{aligned}$$

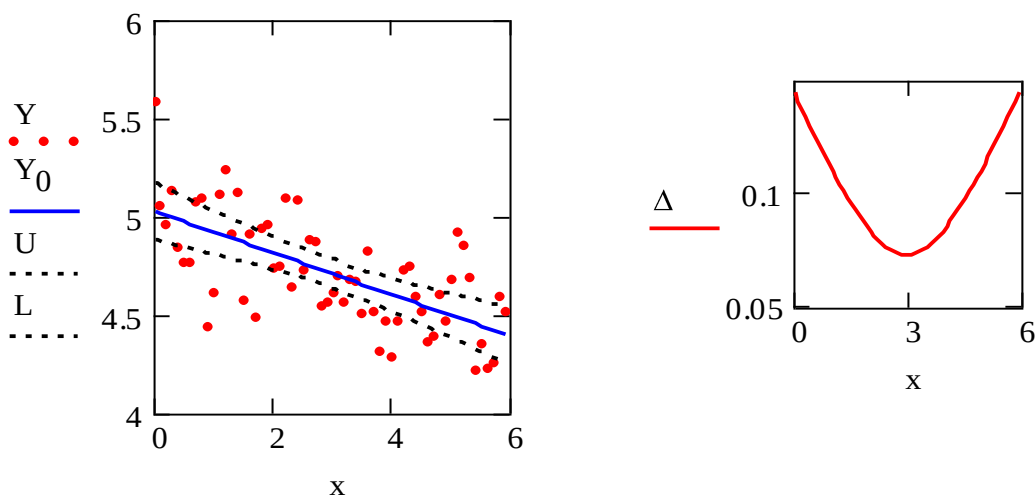


Рис. 5.8. Построение интервальных оценок для простой линейной регрессии

Матрица A для данного случая формируется, аналогично рис. 5.2, *a*, со- стыковкой столбцов с элементами, равными 1 и x_i . Используя формулы (5.13) и (5.17), получаем оценки параметров и оценки откликов, обозначенные на рис. 5.8 β и Y_0 .

Границы доверительных интервалов (векторы U — верхняя и L — нижняя) определяются (см. рис. 5.8) с применением формул общего вида (5.95) и (5.94). Значения откликов Y , их оценок Y_0 , границы интервальных оценок U и L изображены на левом графике рис. 5.8; на правом графике приведены значения Δ_i (5.95). Минимальное значение Δ , как и отмечено выше, соответствует выборочному среднему значений x_i , которое в данном случае равно 2.95. ■

Рассмотренный пример иллюстрирует простоту решения подобных задач в среде Mathcad. При усложнении регрессионной зависимости решение достигается по аналогичной схеме.

Пример 5.7. Для условий примера 5.1 построить интервальную оценку для элементов вектора $\hat{Y}$ (5.17) при квадратичной регрессионной зависимости.

□ Решение. На рис. 5.9 приведено решение в среде Mathcad.

Решение задачи квадратичной регрессии было рассмотрено ранее (см. рис. 5.2, *б*). Задаваясь уровнем значимости $\alpha = 0.01$, нижнюю и верхнюю границы интервальных оценок, как и в предыдущем примере, найдем с применением формул (5.95), (5.94). Графические иллюстрации (см. рис. 5.9) для данного случая свидетельствуют также о наличии минимальных значений Δ (5.95) в средней зоне определения значений фактора и постепенном увеличении значений Δ по мере удаления от этой зоны вправо или влево.

Из материала *разд. 5.2—5.4*, касающегося задач линейной регрессии, следует, что, в общем случае задачи этого класса могут быть успешно решены несколькими путями. Среди них основные базируются на методах алгебры (МНК, рекуррентный алгоритм). В частных случаях, например, при простой линейной регрессии, решение может быть достигнуто аналитически. К задачам линейной регрессии применимы и поисковые процедуры, реализующие один из численных методов поиска экстремумов. Однако область применения этих методов относится к задачам нелинейной регрессии, при решении которых поисковые процедуры служат практически единственной базой. Ниже кратко рассматриваются типовые задачи нелинейной регрессии. Их решение с применением СКМ практически не встречает затруднений.

5.5. Нелинейная регрессия

При выборе регрессионной зависимости в практике решения задач регрессии достаточно часто могут быть использованы нелинейные функции искомых параметров, которые определяют принадлежность такой задачи к классу задач нелинейной регрессии. Примерами нелинейных регрессионных зависимостей могут служить

$y = \exp(\beta_0) + \ln(\beta_1) x + \varepsilon$; $y = (\beta_0)^2 + \beta_1 x + (1/\beta_2) x^2 + \varepsilon$
и другие, в которых аддитивно или мультипликативно входят нелинейные функции искомых параметров.

$$\begin{aligned}
 n &:= \text{length}(Y) & n = 10 & \quad i := 0..n-1 & \quad x_i := i \\
 a_i &:= 1 & b_i &:= x_i & c_i &:= |x_i|^2 & A &:= \text{augment}(a, b, c) & \beta &:= (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot Y \\
 \beta &= \begin{pmatrix} -0.753 \\ -0.078 \\ 0.178 \end{pmatrix} & Y_0 &:= A \cdot \beta & & \text{Вектор оценок откликов} \\
 e_y &:= Y - Y_0 & & & & \text{Вектор ошибок оценок откликов} \\
 m &:= \text{cols}(A) & m &= 3 & & \\
 S &:= e_y^T \cdot e_y & S &= 0.91 & & \text{Остаточная сумма квадратов} \\
 D_B &:= \frac{1}{n-m} \cdot S & D_B &= 0.13 & & \text{Остаточная дисперсия} \\
 \alpha &:= 0.01 & k_{kp} &:= qt\left(1 - \frac{\alpha}{2}, n-m\right) & k_{kp} &= 3.499 \\
 C &:= A \cdot (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T & \Delta_i &:= k_{kp} \cdot \sqrt{D_B} \cdot \sqrt{C_{i,i}} & U &:= Y_0 + \Delta & L &:= Y_0 - \Delta
 \end{aligned}$$

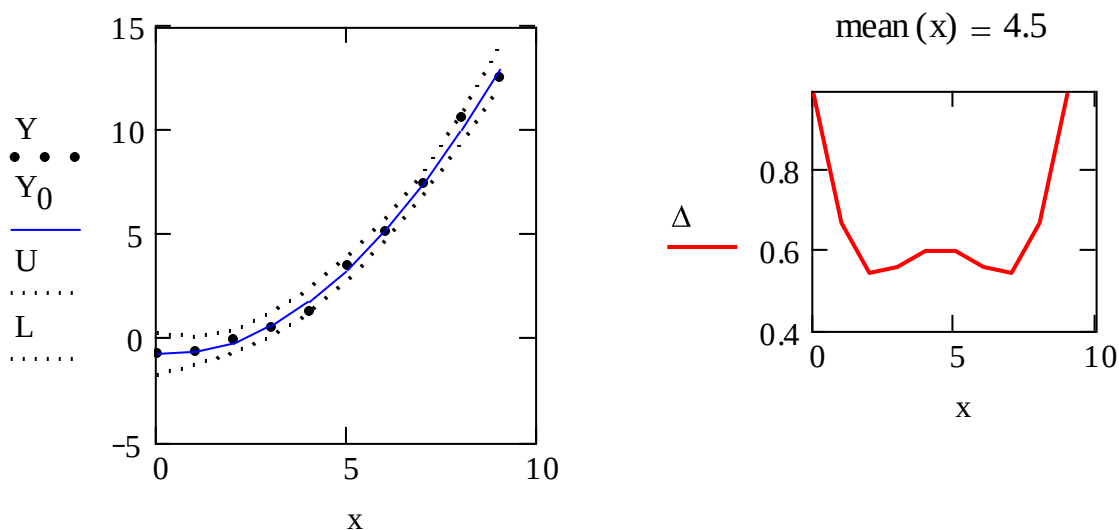


Рис. 5.9. Построение интервальных оценок для квадратичной регрессии

Решение задач нелинейной регрессии требует применения численных методов, реализующих один из методов поиска экстремума функции многих переменных. Известно, что разработка и отладка соответствующих программ поиска экстремумов — сложная и трудоемкая проблема, требующая значительных затрат времени и сил. Поэтому применение систем компьютерной математики, в которых такие программы имеются, существенно упрощает и, в большом числе случаев, делает весьма простым практическое применение поисковых методов решения задач регрессии. В среде Mathcad подобные про-

граммы существуют в виде процедур, вызов которых осуществляется встроенными функциями **minimize** и **maximize** для минимизации и максимизации целевых функций соответственно. Практическое применение функций **minimize** и **maximize** возможно как автономно (задачи без ограничений на искомые параметры), так и в составе так называемых вычислительных блоков (при наличии ограничений) [17].

Поисковые процедуры можно использовать, как отмечалось, и при решении задач линейной регрессии. Но в этом случае требуются достаточно серьезные обоснования необходимости применения поисковых методов, поскольку их реализация значительно сложнее, чем применение обычных операций линейной алгебры. К числу таких аргументов необходимости использования поисковых методов в задачах линейной регрессии можно отнести, например, наличие ограничений на искомые параметры.

В качестве иллюстрации возможности поисковых процедур, приведем два варианта решения задачи линейной регрессии, рассмотренной ранее.

Пример 5.8. В условиях примера 5.1 решить задачу линейной регрессии путем поиска экстремума функции искомых параметров $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$, используя в качестве регрессионной зависимости полином второго порядка. Получить решение:

- 1) без наложения ограничений на искомые параметры;
- 2) при наложении ограничения вида $\beta_1 \geq -0.03$.

□ Решение. На рис. 5.10 приведено решение в среде Mathcad путем поиска экстремума целевой функции $z(\beta)$.

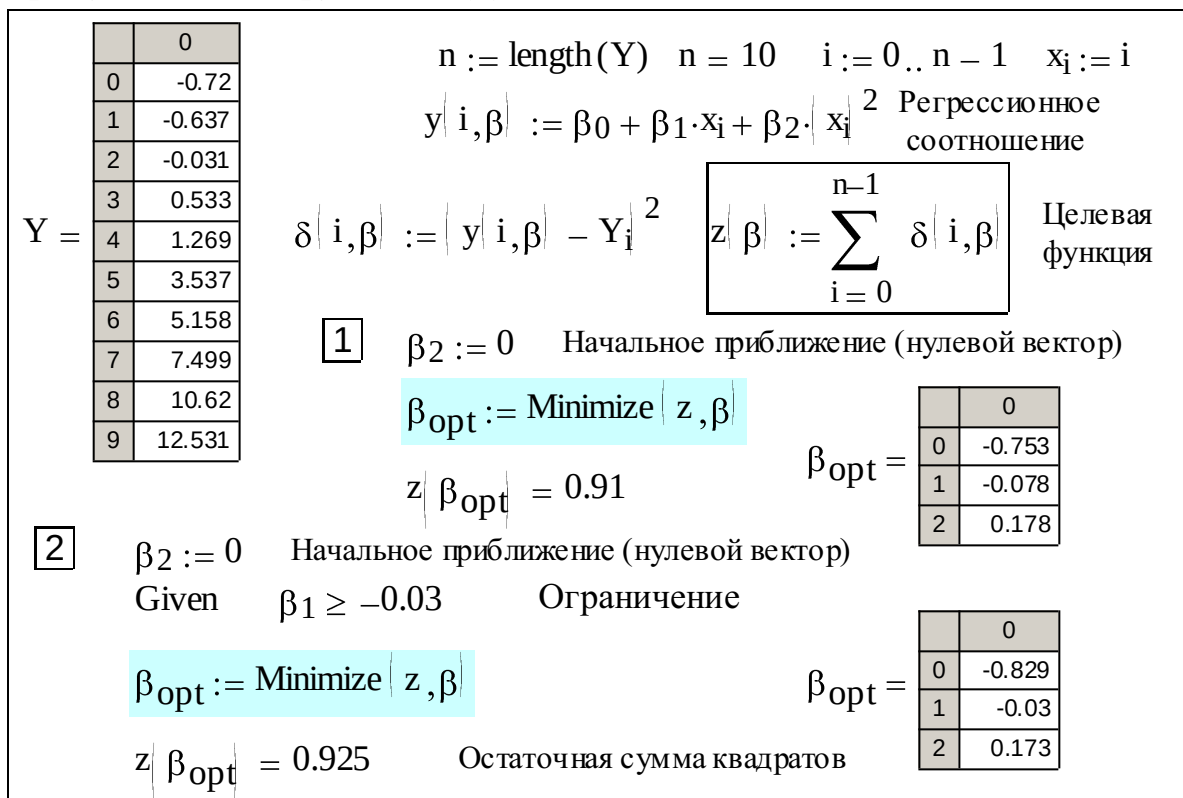


Рис. 5.10. Поисковая процедура решения примера 5.8

Ответ на первый вопрос рассматриваемой задачи с использованием метода наименьших квадратов дан на рис. 5.2, б и 5.4, б. Результирующее регрессионное соотношение было получено в форме: $\hat{y} = -0.753 - 0.078x + 0.178x^2$; остаточная сумма квадратов равна 0.91.

Оптимизация (см. рис. 5.10) производилась применением встроенной функции **minimize**, реализующей несколько численных методов поиска. При решении был выбран метод Ньютона. Целевая функция выбрана в виде суммы квадратов невязок. Функция **minimize** по умолчанию реализует метод сопряженных градиентов, в чем можно убедиться, щелкнув правой кнопкой мыши по логотипу этой функции.

В появляющемся контекстном меню можно выбрать и другие методы поиска экстремумов. Для получения решения без ограничений на параметры (вариант 1 на рис. 5.10) необходимо задать начальное приближение и указать в аргументах функции **minimize** имя целевой функции и обозначение искомого вектора. Во втором варианте получено решение с заданным ограничением. Вводу ограничений при использовании **minimize** должно предшествовать ключевое слово **given**, означающее, что решение ищется в рамках вычислительного блока [17].

В варианте 1 получены значения параметров $(-0.753, -0.078, 0.178)$, совпадающие с ранее полученными в примерах 5.1 и 5.3 значениями. Совпадение результатов объясняется использованием одного и того же критерия (минимум суммы квадратов невязок) и отсутствием ограничений на параметры. Значение целевой функции при найденных параметрах соответствует остаточной сумме квадратов невязок S (5.36); в первом варианте она равна 0.91, что также совпадает с ранее найденной величиной.

В варианте 2 вводится ограничение $\beta_1 \geq -0.03$, что несколько изменяет результат и, естественно, увеличивает значение остаточной суммы квадратов невязок. Регрессионные параметры в варианте 2 получены равными $(-0.829, -0.03, 0.173)$; $S = 0.925$. Результирующее регрессионное соотношение при введенном ограничении $\beta_1 \geq -0.03$ принимает вид: $\hat{y} = -0.829 - 0.03x + 0.173x^2$. Минимальное значение критерия (0.925) соответствует нижней допустимой границе параметра $\beta_1 = -0.03$, при которой остальные параметры определены алгоритмом поиска равными $\beta_0 = -0.829$ и $\beta_2 = 0.173$. Завершая комментарии по поводу рассмотренной задачи, нельзя не отметить предельную простоту ее решения в среде Mathcad с применением поисковых процедур. Это замечание, как будет понятно из последующего материала этого раздела, относится в полной мере и к задачам нелинейной регрессии. ■

При решении задач нелинейной регрессии общего вида применение поисковых процедур служит единственно возможным способом достижения результата. Однако среди задач нелинейной регрессии существует достаточно широкий класс, который допускает приведение исходной задачи к линейному случаю путем функциональных преобразований нелинейных регрессионных зависимостей. В этом множестве задач регрессионные соотношения включают

нелинейности в виде экспоненциальных, степенных, обратных функций и их комбинаций. Учитывая те возможности, которые предоставляют исследователям системы компьютерной математики, подобные преобразования не являются необходимыми, однако, конечно, решение линейных регрессионных задач остается предпочтительным в силу предельной простоты. Приведем некоторые примеры нелинейных регрессионных зависимостей, которые сводятся к линейным моделям.

Экспоненциальные функции: $y_1 = k \cdot \beta_0 \cdot \exp(\beta_1 \cdot x)$; $y_2 = k \cdot [1 - \beta_0 \cdot \exp(\beta_1 \cdot x)]$, где k — известная константа. Переход к линейной регрессионной модели производится путем логарифмирования отклика. После его преобразования:

$$Y_1 = \beta_0 + \beta_1 \cdot x; Y_2 = \beta_0 + \beta_1 \cdot x; Y_1 = \ln(y_1/k); Y_2 = \ln(1 - y_2/k).$$

Степенные функции: $y_3 = k \cdot \beta_0 \cdot x^{\beta_1}$; $y_4 = k \cdot [1 - \beta_0 \cdot x^{\beta_1}]$, где k — известная константа. Линейная модель также образуется после логарифмирования исходных соотношений:

$$Y_3 = \beta_0 + \beta_1 \cdot \ln(x); Y_4 = \beta_0 + \beta_1 \cdot \ln(x); Y_3 = \ln(y_3/k); Y_4 = \ln(1 - y_4/k).$$

Обратные функции: $y_5 = 1 / (\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2)$; $y_6 = 1 / (k \cdot \beta_0 \cdot x^{\beta_1})$; $y_7 = 1 / \{k \cdot [1 - \beta_0 \cdot x^{\beta_1}]\}$; $y_8 = 1/y_1$, $y_9 = 1/y_2$, где k — известная константа. Переход к линейной модели может быть осуществлен путем использования обратных функций в качестве откликов, например, $Y_5 = 1/y_5 = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$.

Остальные варианты (y_6 , y_7 , y_8 , y_9) также приводятся к линейным моделям путем перехода к обратным значениям откликов с последующим использованием рассмотренных выше преобразований для экспоненциальных и степенных функций.

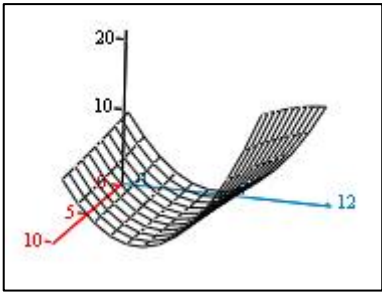
Выбор наиболее подходящего преобразования, так же как и наиболее рациональной регрессионной модели осуществляется путем анализа исследуемых зависимостей и оценки результата по величине остаточной суммы квадратов (см. разд. 5.3).

Решение задач нелинейной регрессии в общем случае может встретить трудности, связанные с особенностями минимизируемых функций. В большом числе задач нелинейной регрессии это связано с сильной вытянутостью линий уровней (линий равных значений целевой функции) и «овражностью» поверхностей уровней, что служит причинами известных трудностей достижения экстремума итеративными процедурами [17].

В качестве иллюстрации этого факта рассмотрим простейшую задачу нелинейной регрессии, в которой можно показать поверхность уровней.

Пример 5.9. Пусть значения 51 отклика имитируются значениями элементов вектора Y выборочных данных, полученных с использованием регрессионного соотношения вида $Y = 2[1 - \exp(-0.5x)]$ для значений фактора x , меняющихся в диапазоне от 0 до 10 с шагом 0.2. Определить параметры регрессии, построить поверхность уровней и провести анализ целевой функции в 10%-ой зоне вокруг найденных параметров.

□ **Решение.** В рассматриваемой учебной задаче отклики не содержат случайных составляющих, поэтому путем оптимизации заданного критерия должны быть найдены исходные параметры регрессионного соотношения, равные 2 и 0.5. На рис. 5.11 приведен файл Mathcad с решением. Отклики задаются вектором $\mathbf{Y}$, факторы — вектором $\mathbf{x}$. Введены обозначения: y — регрессионное соотношение; β — вектор искомых параметров; $z(\beta)$ — минимизируемая функция; β_{opt} — вектор параметров, полученных в результате решения задачи нелинейной регрессии; $\mathbf{Z}$ — матрица поверхности уровней.

$$\begin{aligned}
 n &:= 50 \quad i := 0..n \quad x_i := 0.2 \cdot i \quad y_i := 2 \cdot \left(1 - e^{-0.5 \cdot x_i} \right) \\
 Y[i, \beta] &:= \beta_1 \cdot \left(1 - \exp \left(-\beta_0 \cdot x_i \right) \right) \\
 \delta[i, \beta] &:= \frac{\left(Y[i, \beta] - y_i \right)^2}{y_n^2} \\
 z[\beta] &:= \sum_i \delta[i, \beta] \\
 \beta_1 &:= 0.2 \quad \beta^T = (0 \quad 0.2) \quad \text{нач. приближение} \\
 \beta_{\text{opt}} &:= \text{Minimize} \left(z, \beta \right) \quad \beta_{\text{opt}} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad z[\beta_{\text{opt}}] = 1.179 \times 10^{-12} \\
 k &:= 0..10 \quad m := 0..12 \quad Z_{k,m} := z \left(\begin{pmatrix} 0.4 + 0.02 \cdot k \\ 1.0 + 0.2 \cdot m \end{pmatrix} \right) \\
 \end{aligned}$$


$$\begin{aligned}
 z \left(\begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.8 \end{pmatrix} \right) &= 0.361 & z \left(\begin{pmatrix} 0.5 \\ 2.2 \end{pmatrix} \right) &= 0.361 \\
 z \left(\begin{pmatrix} 0.55 \\ 2.0 \end{pmatrix} \right) &= 0.022 & z \left(\begin{pmatrix} 0.45 \\ 2.0 \end{pmatrix} \right) &= 0.03
 \end{aligned}$$

$\mathbf{Z}$

Рис. 5.11. Анализ поверхности уровней в нелинейной задаче регрессии

Поверхность уровней изображена на трехмерном графике. Хорошо виден «овражный» характер этой поверхности, вытянутой вдоль оси, которая соответствует значениям первого элемента вектора β искомых параметров. Справа от графика (см. рис. 5.11) приведены значения целевой функции z , полученные при поочередном 10-процентном изменении значений параметров относительно полученных оптимальных.

Эти значения функции z подтверждают вывод об «овражном» характере поверхности уровней. Так, 10-процентное изменение первого элемента вектора β относительно оптимального значения практически не приводит к изменению значения целевой функции (~ 0.03). В то же время такое же 10-процентное изменение второго элемента вызывает заметное изменение z (~ 0.36).

Отмеченный характер поверхности уровней является типовым в задачах рассматриваемого класса и часто служит причиной вычислительных трудностей при попытке достичь решения путем реализации поисковой процедуры. В частности, в таких задачах обычно требуется увеличивать точность вычислений относительно принятой в СКМ по умолчанию. В среде Mathcad точность вычислений определяется значением системной переменной **TOL** (позиция меню **Tools/Worksheet options**), равной по умолчанию 0.001. Так, результаты, приведенные на рис. 5.11, получены при значении **TOL** = 0.0001, что на порядок меньше установленного по умолчанию. При **TOL** = 0.001 точность результата снижается, значения параметров получаются равными 0.502 и 1.997, а остаточная сумма квадратов увеличивается до значения $z(\beta_{\text{opt}}) = 4.127 \cdot 10^{-5}$. ■

Рассмотренный пример касался решения задачи нелинейной регрессии, в которой данные наблюдений не были искажены случайными помехами, но вывод о характере поверхности уровней и рекомендация о необходимости обеспечения требуемой точности справедливы и для реальных задач этого класса. В этом несложно убедиться, моделируя реальную ситуацию введением вектора ε (5.1) случайных составляющих с элементами ε_i , $i = \overline{1, n}$. Такой прием моделирования реальных наблюдений весьма удобен при формировании учебных заданий при изучении курса математической статистики. Он будет проиллюстрирован в следующем примере.

Другая рекомендация, которая направлена на успешное решение задач нелинейной регрессии, касается целесообразности учета дополнительной информации об исследуемых процессах. Дополнительная информация может быть получена путем анализа данных наблюдений. Так, по результатам наблюдений может быть примерно оценен установившийся уровень процесса (для так называемых устойчивых процессов) или установившееся значение скорости изменения исследуемых величин (для неустойчивых процессов). Точность таких оценок может быть не очень высокой, но даже такие данные позволят резко сократить время поиска оценок регрессионных параметров, поскольку, при учете дополнительных данных, поиск будет идти на сокращенном множестве значений параметров. Понятно, что точность дополнительной информации может быть повышена путем проведения повторных испытаний.

Для иллюстрации значения дополнительной информации при решении задач нелинейной регрессии рассмотрим учебную задачу, в которой вначале не будут учитываться случайные составляющие в значениях откликов, а затем будет произведена оценка влияния этих составляющих на результат.

Пример 5.10. В результате наблюдений получен 51 отклик; значения откликов графически представлены на рис. 5.12, *а*. Отклики получены для значений фактора x , меняющихся в диапазоне от 0 до 10 с шагом 0.2. Они сведены в вектор **Y**; первые 15 значений откликов показаны на рис. 5.12, *а*. Решить задачу регрессии в вариантах:

- 1) В рамках условия без использования дополнительных данных.
- 2) В рамках условия с использованием дополнительных данных.

3) При дополнительных данных и при наличии независимых случайных помех $\varepsilon_i \sim N(m, \sigma)$, $i = 1, n$ в составе наблюдений при $m = 0$, $\sigma = 0.1$.

□ Решение. На рис. 5.12, а приведено решение п. 1 поставленной задачи.

1. Учитывая бесколебательный характер данных наблюдения, регрессионное соотношение $(y(i, \beta))$ выбрано в форме разности двух экспоненциальных зависимостей. Критерий $z(\beta)$ в виде суммы квадратов невязок (см. рис. 5.12, а) выделен заливкой. Поиск четырех неизвестных параметров в данной задаче потребовал существенного увеличения точности (**TOL** = 0.00000001).

При таком значении системной переменной **TOL** получено значение остаточной суммы квадратов $z(\beta_0) = 1.381 \cdot 10^{-7}$. Оценки параметров регрессии составили: $\beta_0 = 0.5$; $\beta_1 = 2.001$; $\beta_2 = 1.999$; $\beta_3 = 4.001$. Отметим, что эти результаты получены без привлечения дополнительной информации о характере наблюдаемого процесса.

$i := 0..50 \quad x_i := 0.2 \cdot i$

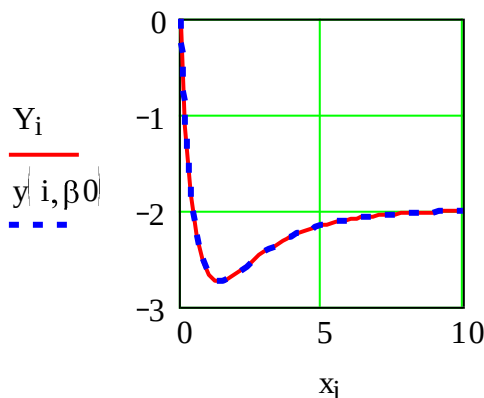
$$y(i, \beta) := \beta_1 \cdot (1 - e^{-\beta_0 \cdot x_i}) - \beta_3 \cdot (1 - e^{-\beta_2 \cdot x_i})$$

$$\delta(i, \beta) := (y(i, \beta) - Y_i)^2 \quad z(\beta) := \sum_i \delta(i, \beta)$$

нач. приближение

$$\beta := (0 \ 1 \ 1 \ 0)^T$$

$$\text{TOL} := 0.00000001 \quad \beta_0 := \text{Minimize}(z, \beta)$$



$$\beta_0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2.001 \\ 1.999 \\ 4.001 \end{pmatrix}$$

$$z(\beta_0) = 1.381 \times 10^{-7}$$

	0
0	0
1	-1.128
2	-1.84
3	-2.277
4	-2.533
5	-2.672
6	-2.735
7	-2.75
8	-2.736
9	-2.704
10	-2.662
11	-2.617
12	-2.569
13	-2.523
14	-2.478
15	-2.436

Рис. 5.12, а. Решение задач без использования дополнительных данных

Решение потребовало осуществить вариантное задание **TOL** и начального приближения с контролем достигаемого значения критерия $z(\beta_0)$ для каждого варианта. Снижения уровня неопределенности в задачах подобного класса можно достичь, привлекая дополнительную информацию об исследуемом процессе.

2. Анализ кривой на графике (см. рис. 5.11, а) и полученные значения параметров позволяют считать, что β_1 и β_3 связаны линейным соотношением вида: $\beta_1 - \beta_3 \approx -2$. Использование этого соотношения при решении задачи сокра-

щает число неизвестных параметров до трех: $\beta_0, \beta_1, \beta_2$. После нахождения этих параметров четвертый параметр будет найден с учетом введенной связи: $\beta_3 = -2 + \beta_1$.

Учет линейной связи между параметрами при решении задачи можно осуществить двумя способами: введением ограничений в процесс поиска или трансформацией регрессионного соотношения путем введения в него указанной линейной связи.

На рис. 5.12,б приведено решение с использованием второго способа. Преобразованное регрессионное соотношение $(y1(i, \beta))$ учитывает связь $\beta_1 - \beta_3 = -2$. Введение дополнительных данных позволило в рассматриваемой задаче достичь более высокой точности: $z1(\beta_0) = 7.041 \cdot 10^{-8}$ при уменьшенном на два порядка значении системной переменной **TOL**. Кроме того, учет указанной связи обеспечил значительно большую свободу выбора начальных приближений при существенном сокращении времени поиска.

$i := 0..50$	$x_i := 0.2 \cdot i$	TOL := 0.000001
$y1(i, \beta) := -2 - \beta_1 \cdot e^{-\beta_0 \cdot x_i} + (\beta_1 + 2) \cdot e^{-\beta_2 \cdot x_i}$		$\delta(i, \beta) := y1(i, \beta) - Y_i ^2$
$z1(\beta) := \sum_i \delta(i, \beta)$	$\beta_2 := 0$ <u>нач. приближение - нулевой вектор</u> $\beta ::$ $\beta^T = (0 \ 0 \ 0)$	
$\beta_0 := \text{Minimize } z1, \beta$	$z1(\beta_0) = 7.041 \times 10^{-8}$ $\beta_0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2.001 \\ 2 \end{pmatrix}$	

Рис. 5.12, б. Решение задач с использованием дополнительных данных

Последнее обстоятельство объясняется тем, что при фиксации установившегося значения исследуемого процесса поиск осуществляется на ограниченном множестве процессов, которые обладают этим свойством, т. е. имеют установившееся значение, равное (-2) .

3. Дополнительно к варианту 2 введем теперь в mcd-файл с помощью встроенной функции **rnorm** вектор независимых нормально распределенных случайных чисел с заданными параметрами и добавим эти случайные числа к каждому из ранее использованных откликов (рис. 5.12, в).

Таким образом, вектор **Y** откликов теперь сформирован (см. рис. 5.12, в) путем суммирования прежнего вектора, использованного в вариантах 1 и 2, с вектором **r** независимых случайных чисел заданного распределения. Несмотря на довольно заметный разброс исходных данных (см. рис. 5.12, в), поиск параметров обеспечивает их достаточную близость к эталонным значениям. Целевая функция при найденных параметрах достигает значения $z(\beta_0) = 0.492$. График, приведенный на рис. 5.12, в, иллюстрирует качество полученных оценок. ■

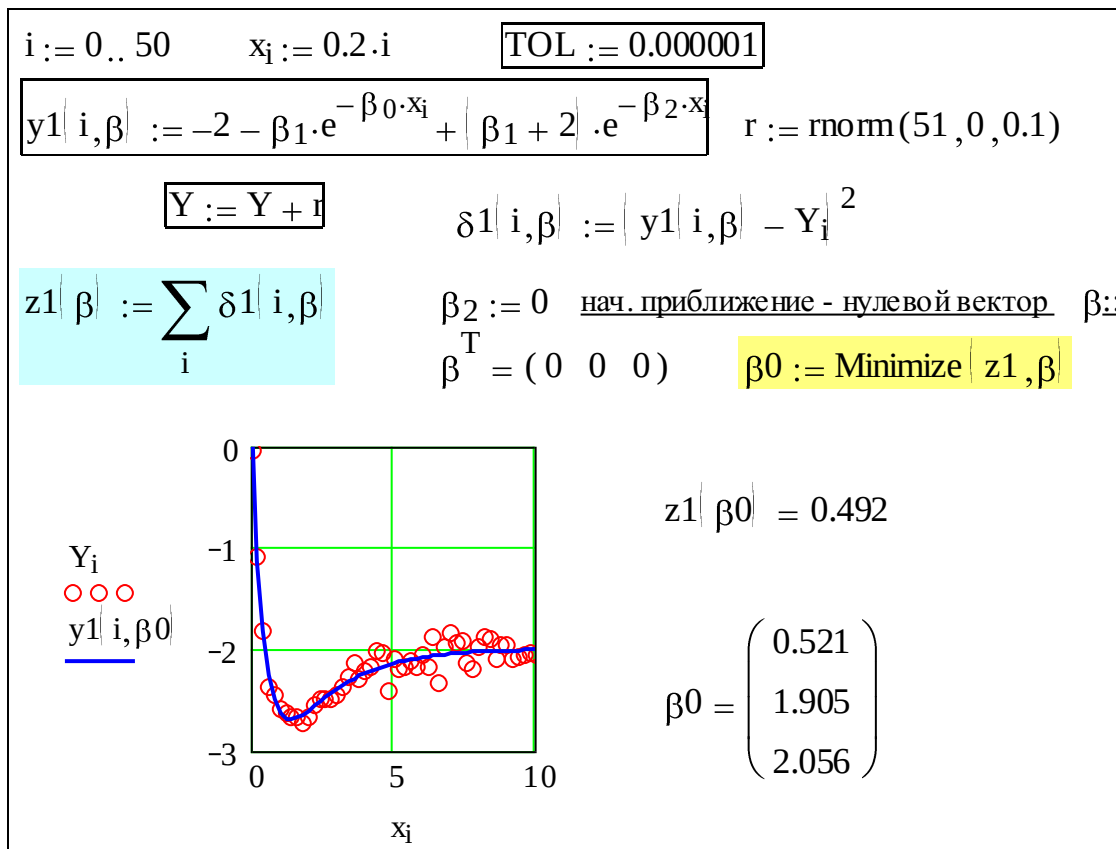


Рис. 5.12, в. Влияние искажений данных наблюдений

На основе подобных программных структур могут быть организованы научно-исследовательские работы, которые в данном случае могут быть связаны с анализом влияния параметров случайных воздействий на точность результатов нелинейной регрессии. Для получения вариантов моделируемых ситуаций достаточно вводить измененные данные в два последних аргумента встроенной функции **rnorm** — генератора помех.

Касаясь использования дополнительной информации при решении задач регрессии, следует отметить, что дополнительные данные могут быть получены и более сложным путем, например, усреднением части откликов на выбранном интервале изменения факторов, определением тренда и проч. Рассмотреть все многообразие задач нелинейной регрессии практически невозможно и в этом материале такая задача не ставится. Как показала практика применения описанного подхода, принципы решения этих нетривиальных задач могут успешно применяться и для других задач аппроксимации данных наблюдений. Выполненный анализ задач нелинейной регрессии позволяет сформулировать некоторые рекомендации, полезные в практике решения таких задач с применением СКМ:

1. Интервал дискретности Δx фактора, с которым осуществляются наблюдения за исследуемым процессом $y = f(x)$, должен гарантировать информативность исходного массива откликов, способность массива данных отражать все особенности процесса. Следует, по возможности, стараться избегать задания y

на частичном диапазоне изменения фактора, когда еще не проявились все особенности исследуемого процесса (процесс не достиг установившегося состояния, установившейся скорости изменения и проч.). При исследовании процесса на частичном диапазоне x могут быть получены результаты, не отражающие его основные свойства.

2. Выбор регрессионного соотношения $y(\beta)$ должен осуществляться в соответствии с характером изменения откликов $y = f(x)$. Выражение $y(\beta)$ должно предельно лаконично описывать вариант регрессионной модели, принятый при решении; число искомых параметров этого выражения должно выбираться из принципа минимальной достаточности.

3. При решении задач регрессии целесообразно использовать всю доступную дополнительную информацию о характере изменения откликов. Это способствует сокращению времени поиска решения и повышению точности результата.

4. Выбор начального приближения полезно предварять анализом изображений поверхности (линий) уровней или ее сечений. Богатые возможности вывода результатов на двумерные и трехмерные графики в СКМ оказывают реальную помощь при поиске оптимальных параметров регрессии в условиях, когда имеют место локальные экстремумы. Вариация начальных приближений при этом позволяет достичь требуемого качества получаемого решения и, в ряде случаев, избежать локальных минимумов.

5. При решении задач регрессии с применением поисковых процедур точность вычислений, которая задается значением параметра **TOL**, должна быть увеличена минимум на порядок относительно принятой по умолчанию; приемлемые результаты достигаются уже при **TOL** = 0.0001.

Большинство из приведенных рекомендаций служат обычными правилами, применяемыми в целях успешного применения поисковых процедур в задачах аппроксимации, идентификации, отыскания экстремумов, однако, в рассматриваемых задачах регрессии их учет имеет особое значение.

В процессе решения задач регрессии в среде Mathcad дополнительно к использованным в *главе 5* встроенным функциям можно применять достаточно большое семейство других специальных встроенных функций, упрощающих процесс решения. Практика их применения подробно рассмотрена в работе [17].

Глава 6. ОСНОВЫ КОРРЕЛЯЦИОННОГО АНАЛИЗА

6.1. Коэффициент корреляции и корреляционное отношение

В практике применения математической статистики часто возникают задачи, в которых требуется выявить зависимости между случайными величинами, проанализировать степень влияния одной случайной величины на другую, определить степень их взаимообусловленности. К этому же классу относятся задачи экспериментального подтверждения гипотетических или известных связей между случайными величинами. Подобные задачи требуют вычисления (получения оценок) корреляционных моментов или коэффициентов корреляции на основе данных наблюдений, полученных в процессе экспериментов. Методы, составляющие основу алгоритмов получения таких оценок, объединяются разделом математической статистики, который носит название **корреляционный анализ**.

В главе 7 (ч. I), при введении понятий регрессии, рассмотрении вопросов взаимосвязи, взаимообусловленности совокупностей случайных величин, отмечалось, что зависимости между случайными величинами X и Y могут иметь различный характер. При линейной взаимосвязи X и Y степень их взаимообусловленности определяет безразмерный коэффициент корреляции (7.74), численно равный отношению корреляционного момента K_{xy} (7.73) к произведению средних квадратических отклонений σ_x и σ_y случайных величин:

$$r_{xy} = K_{xy} / (\sigma_x \cdot \sigma_y). \quad (6.1)$$

Знак этого коэффициента характеризует в среднем поведение откликов при изменении значений факторов (см., например, рис. 7.4, ч. I).

Если рассматривать случайные величины X и Y в качестве элементов двумерного случайного вектора $\mathbf{Z}$, то все элементы правой части соотношения (6.1) можно найти среди элементов ковариационной матрицы (7.64), (7.66) составленной для этого вектора, т. е. матрицы $\text{cov}(\mathbf{Z}) = M[(\mathbf{Z} - \mathbf{m}_Z)(\mathbf{Z} - \mathbf{m}_Z)^T]$:

$$\text{cov}(\mathbf{Z}) = \mathbf{P}_Z = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & K_{xy} \\ K_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

Наряду с ковариационной матрицей (6.2) может быть введена и матрица $\mathbf{S}_Z$, диагональные элементы которой равны единице, а недиагональный элемент — коэффициент корреляции:

$$\mathbf{S}_Z = (\Sigma_Z)^{-1} \mathbf{P}_Z (\Sigma_Z)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & r_{xy} \\ r_{xy} & 1 \end{bmatrix}; \quad \Sigma_Z = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{bmatrix}.$$

Соотношение для $\mathbf{S}_Z$ легко обобщается на случайные векторы произвольной размерности. Так, для n -мерного случайного вектора $\mathbf{X}$, с ковариационной

матрицей $\mathbf{P}$, матрица $\mathbf{S}$ коэффициентов корреляции определяется соотношением:

$$\mathbf{S} = \Sigma^{-1} \mathbf{P} \Sigma^{-1}. \quad (6.3)$$

Здесь $\mathbf{P}$ — ковариационная матрица вида (7.66); Σ — диагональная матрица, i -й диагональный элемент которой равен σ_i . Вычисление $\mathbf{S}$ позволяет определить все множество коэффициентов корреляции одновременно, поэтому назовем $\mathbf{S}$ **матрицей коэффициентов корреляции**.

Выражение (6.3) можно рассматривать в качестве теоретической основы оценки коэффициентов корреляции r_{ji} ; $i, j = \overline{1, n}, i \neq j$ по выборочным данным.

Матрица коэффициентов корреляции $\mathbf{S}$ служит исчерпывающей характеристикой степени линейной взаимосвязи пар нормально распределенных случайных величин. Как показано в главе 7, (ч. I), условные плотности (7.114) двумерного нормально распределенного вектора $\mathbf{X}^T = [X_1, X_2]$ с двумерной плотностью (7.113) соответствуют нормальному распределению. Параметрами этого распределения служат условные математические ожидания $\overline{m}_2$ и $\overline{m}_1$ (7.115) и условные дисперсии (7.116), имеющие вид:

$$x_{1/2} = m_1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} r_{12} (x_2 - m_2); \quad x_{2/1} = m_2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} r_{12} (x_1 - m_1);$$

$$\sigma_{1/2}^2 = \sigma_1^2 (1 - r_{12}^2); \quad \sigma_{2/1}^2 = \sigma_2^2 (1 - r_{12}^2).$$

Сопоставляя эти выражения с соотношениями вида (7.103) и (7.104), можно видеть, что простая линейная регрессия X_2 на X_1 (7.115) обеспечивает минимум условной дисперсии X_2 при условии $X_1 = x_1$. Условная дисперсия (7.116) в этом случае определяется выражением (7.104):

$$\overline{\sigma}_2^2 = M \left[(X_2 - \overline{m}_2)^2 / x_1 \right] = \sigma_{2/1}^2 = \sigma_2^2 (1 - r_{12}^2)$$

Из этих соотношений следует, что условные математические ожидания $x_{1/2}$ и $x_{2/1}$ при нормальном распределении случайных величин X_1 и X_2 соответствуют прямым линиям. Взаимосвязи между X_1 и X_2 , при которых линии регрессии X_2 на X_1 и X_1 на X_2 — прямые линии, соответствуют случаю **простой линейной корреляции**. Количественной характеристикой линейной взаимосвязи X_1 и X_2 служит **коэффициент корреляции** r_{12} .

При размерности $n > 2$ случайного вектора $\mathbf{X}$ линейную корреляцию различных пар его элементов X_i и X_j определяют $n(n-1)/2$ коэффициентов корреляции r_{ij} ; $i, j = \overline{1, n}, i \neq j$.

На рис. 6.1, применительно к трехмерному вектору $\mathbf{X}$, приведен результат вычисления матрицы коэффициентов корреляции $\mathbf{S}$ (6.3), полученный символическими преобразованиями в среде Mathcad.

Результирующая матрица $\mathbf{S}$ (см. рис. 6.1) с единичными диагональными элементами содержит в качестве недиагональных элементов коэффициенты корреляции $r_{ij} = r_{ji}$; $i, j = \overline{1, 3}, i \neq j$. Эти коэффициенты определяют степень ли-

нейной взаимосвязи пар различных элементов вектора $\mathbf{X}$. Для n -мерного случайного вектора матрица $\mathbf{S}$ (6.3) содержит $n(n - 1)/2$ коэффициентов корреляции.

$$\mathbf{P} := \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & K_{12} & K_{13} \\ K_{12} & \sigma_2^2 & K_{23} \\ K_{13} & K_{23} & \sigma_3^2 \end{pmatrix} \quad \Sigma := \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma^{-1} \cdot \mathbf{P} \cdot \Sigma^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sigma_1} \cdot \frac{K_{12}}{\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_1} \cdot \frac{K_{13}}{\sigma_3} \\ \frac{1}{\sigma_1} \cdot \frac{K_{12}}{\sigma_2} & 1 & \frac{1}{\sigma_2} \cdot \frac{K_{23}}{\sigma_3} \\ \frac{1}{\sigma_1} \cdot \frac{K_{13}}{\sigma_3} & \frac{1}{\sigma_2} \cdot \frac{K_{23}}{\sigma_3} & 1 \end{pmatrix}$$

Рис. 6.1. Получение матрицы коэффициентов корреляции

Таким образом, коэффициент корреляции служит исчерпывающей характеристикой степени взаимосвязи пар случайных величин, если их распределение соответствует нормальному и/или зависимости между ними соответствуют прямым линиям. Этот вывод следует из соображений, приведенных выше, а также может быть подтвержден следующими простыми рассуждениями.

Если случайная величина Y связана со случайной величиной X линейным соотношением вида $Y = aX + b$, то в данном случае может быть рассмотрен случайный вектор $\mathbf{Z}^T = |Y, X|$ с элементами Y и X , и ковариационной матрицей $\mathbf{W}$ вида:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \sigma_y^2 & r_{xy} \sigma_x \sigma_y \\ r \sigma_x \sigma_y & \sigma_x^2 \end{bmatrix}.$$

Здесь r_{xy} — коэффициент корреляции Y и X , который в данном случае связан с условной дисперсией $\sigma_{y/x}^2$ очевидным соотношением:

$$r_{xy} = \frac{M(X - m_x)(Y - m_y)}{\sigma_x \sigma_y} ; \quad r_{xy}^2 = 1 - \frac{\sigma_{y/x}^2}{\sigma_y^2} ; \quad \sigma_{y/x}^2 = \sigma_y^2 (1 - r_{xy}^2). \quad (6.4)$$

При нормальном распределении случайной величины X , закон распределения Y , в силу линейной зависимости Y от X , остается нормальным.

Если же связь между Y и X — нелинейная, например, $Y = cX^2 + aX + b$, то случайный вектор, который должен рассматриваться в этом случае, содержит три элемента: $\mathbf{z}^T = |Y, X, X^2|$. Ковариационная матрица $\mathbf{W}$ для такого вектора имеет следующую структуру:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \sigma_y^2 & r_1 \sigma_x \sigma_y & r_2 \sigma_y \sigma_z \\ r_1 \sigma_x \sigma_y & \sigma_x^2 & r_3 \sigma_x \sigma_z \\ r_2 \sigma_y \sigma_z & r_3 \sigma_x \sigma_z & \sigma_z^2 \end{bmatrix}.$$

В элементах последней матрицы использовано обозначение $Z = X^2$; r_1, r_2 и r_3 — коэффициенты корреляции Y и X , Y и Z , Z и X соответственно. Совокупность этих коэффициентов корреляции характеризует взаимосвязь случайных величин в рассмотренном случае. Эти коэффициенты будут входить в уравнения квадратичной регрессии и соотношение для условной дисперсии, в чем можно убедиться, выполнив анализ, подобный рассмотренному в прил. 3. При нормальном распределении случайной величины X законы распределения Y и Z не будут соответствовать нормальному распределению (см. разд. 5.7, ч. I).

Таким образом, при нелинейных соотношениях между случайными величинами Y и X и/или негауссовых законах распределения коэффициент корреляции r_{xy} уже не является исчерпывающей характеристикой взаимозависимости Y и X . Наряду с r_{xy} , связь между этими случайными величинами будут определять и другие параметры, которые также войдут и в выражения для условных математических ожиданий и условных дисперсий. В этих случаях для оценки степени взаимосвязи Y и X используется более общая характеристика — корреляционное отношение [4, 8].

Корреляционным отношением R_{yx} случайной величины Y по случайной величине X называют корень квадратный из дополнения до единицы относительной условной дисперсии $\sigma_{y/x}^2$:

$$R_{yx} = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{y/x}^2}{\sigma_y^2}}. \quad (6.5)$$

Сопоставляя выражения (6.4) и (6.5), нетрудно заметить сходство выражений для R_{yx} и r_{xy} . Однако это сходство — только внешнее, поскольку условная дисперсия $\sigma_{y/x}^2$ в (6.5) для случаев негауссового распределения или нелинейной связи Y и X будет определяться соотношением более сложного вида, чем выражение $\sigma_{y/x}^2 = \sigma_y^2 (1 - r_{xy}^2)$ для простой линейной регрессии.

Для выяснения статистической сущности выражения (6.5) найдем связь между дисперсией σ_y^2 случайной величины Y и условной дисперсией $\sigma_{y/x}^2$ в общем случае.

Пусть случайная величина Y имеет математическое ожидание m_y . Обозначая, как это делалось в главе 5 (выражение (5.2)), условное математическое ожидание $M(Y/X = x) = f(\mathbf{X}, \hat{\beta}) = \hat{y}$, где $\hat{y}$ — оценка откликов и рассмотрим отклонение возможных значений Y от m_y в форме:

$$Y - m_y = (\hat{y} - m_y) + (Y - \hat{y}) = d_1 + d_2. \quad (6.6)$$

На основании (5.7)—(5.32) математические ожидания d_1 и d_2 равны нулю, поэтому дисперсия $(Y - m_y)$ будет определяться суммой

$$D(d_1) + D(d_2) + 2 M(d_1 \cdot d_2).$$

Предполагая, что совместная плотность распределения $f_{XY}(x, y)$ случайных величин X и Y известна, покажем, что $M(d_1 \cdot d_2) = 0$. Действительно:

$$M(d_1 \cdot d_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d_1 \cdot d_2 \cdot f_{XY}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} d_1 \cdot f_X(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} d_2 \cdot \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)} dy.$$

Второй интеграл в этом выражении содержит разность условного математического ожидания $M(Y/X = x) = \hat{y}$ и интеграла от условной плотности $f_X(y/x)$ по y в бесконечных пределах, умноженного на $\hat{y}$. Поскольку последний интеграл равен единице (см. разд. 7.7, ч. I), в результате получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} d_2 \cdot \frac{f(x, y)}{f(x)} dy = \int_{-\infty}^{\infty} (y - \hat{y}) \cdot f_Y(y/x) dy = \hat{y} - \hat{y} \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y/x) dy = \hat{y} - \hat{y} = 0.$$

Это означает, что дисперсия случайной величины Y , с учетом выражения (6.6) равна: $\sigma_y^2 = D(d_1) + D(d_2)$.

Из соотношений (6.6) следует, что $D(d_2) = \sigma_{y/x}^2$ — условная дисперсия; $D(d_1)$ — дисперсия отклонения функции регрессии $\hat{y}$ при различных значениях аргумента x от математического ожидания m_y . Отсюда:

$$\sigma_y^2 = D(\hat{y} - m_y) + \sigma_{y/x}^2. \quad (6.7)$$

Выражение (6.7) позволяет переписать формулу для корреляционного отношения (6.5):

$$R_{yx} = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{y/x}^2}{\sigma_y^2}} = \sqrt{\frac{D(\hat{y} - m_y)}{\sigma_y^2}}. \quad (6.8)$$

Из полученных соотношений можно сделать следующие выводы, касающиеся корреляционного отношения и его составляющих:

1. Математические ожидания слагаемых d_1 и d_2 в (6.6) равны нулю. Это свойство следует из формулы полного математического ожидания (7.98*), ч. I, согласно которой $M[M(Y/X = x)] = M(\hat{y}) = m_y$.

2. Значения R_{yx} удовлетворяют неравенству

$$0 \leq R_{yx}^2 \leq 1. \quad (6.9)$$

Выражение (6.9) непосредственно следует из (6.5) и (6.6).

3. Значение $R_{yx} = 0$ имеет место при независимости, а следовательно — и некоррелированности, Y и X . Обратное утверждение в общем случае неверно. При независимых Y и X условная дисперсия $\sigma_{y/x}^2$ равна безусловной σ_y^2 и, как следствие, из (6.8) получаем $R_{yx} = 0$.

4. Значение $R_{yx}^2 = 1$ соответствует $\sigma_{y/x}^2 = 0$, т. е. нулевой условной дисперсии и функциональной зависимости случайных величин Y и X . Значения откликов y при различных значениях фактора x в этом случае будут размещаться без разброса на кривой, соответствующей конкретной функциональной зависимости.

Некоторые из перечисленных свойств корреляционного отношения R_{yx} формально аналогичны свойствам коэффициента корреляции r_{xy} , рассмотренным в разд. 7.7 и 7.8 (ч. I). В то же время R_{yx} и r_{xy} связывают более сложные взаимоотношения. Рассмотрим основные из них:

◦ Корреляционное отношение и коэффициент корреляции связаны неравенством вида [4, 8]:

$$0 \leq r_{xy}^2 \leq R_{yx}^2 \leq 1. \quad (6.10)$$

◦ Равенство $r_{xy} = R_{yx} = 0$ имеет место при независимости, а следовательно — и некоррелированности, случайных величин Y и X . Обратное утверждение в общем случае неверно.

◦ Случай $r_{xy}^2 = R_{yx}^2 = 1$ указывает на наличие строгой линейной функциональной зависимости Y от X .

◦ При $r_{xy}^2 < R_{yx}^2 = 1$ имеет место строгая нелинейная функциональная зависимость Y от X .

◦ Случай $r_{xy}^2 = R_{yx}^2 < 1$ соответствует варианту простой линейной регрессии. Строгая функциональная зависимость Y от X отсутствует. Такой вариант будет иметь место при нормальном распределении вектора $\mathbf{z}^T = [Y, X]$ с элементами Y и X (см. разд. 7.8, ч. I).

◦ Если $r_{xy}^2 < R_{yx}^2 < 1$, то это означает, что функциональная зависимость отсутствует, а использование некоторого нелинейного регрессионного соотношения (например, $Y = cX^2 + aX + b$) даст условную дисперсию, меньшую, чем использование линейного соотношения вида $Y = aX + b$.

Из определений и свойств корреляционного отношения следует, что отличия r_{xy} от R_{yx} касаются также и информативности этих показателей.

Наряду с количественной мерой взаимосвязи (модуль r_{xy}), коэффициент корреляции характеризуется также и знаком, который определяет свойство взаимосвязи Y и X в среднем. В отличие от этого, значения R_{yx} всегда положительны и характеризуют лишь степень близости связи Y и X к функциональной. При значениях R_{yx} , близких к 1, разброс откликов вокруг функции регрессии незначителен и увеличивается при снижении значений R_{yx} . При $R_{yx} = 1$ все отклики располагаются на кривой регрессии.

Типовые картины разброса откликов вокруг кривой регрессии представлены на рис. 6.2, на которых изображены результаты решения конкретных задач оценки корреляционного отношения (см. разд. 6.4) для линейной регрессии с зависимостью вида $y = \beta_0 + \beta_2 x^2 + \varepsilon$.

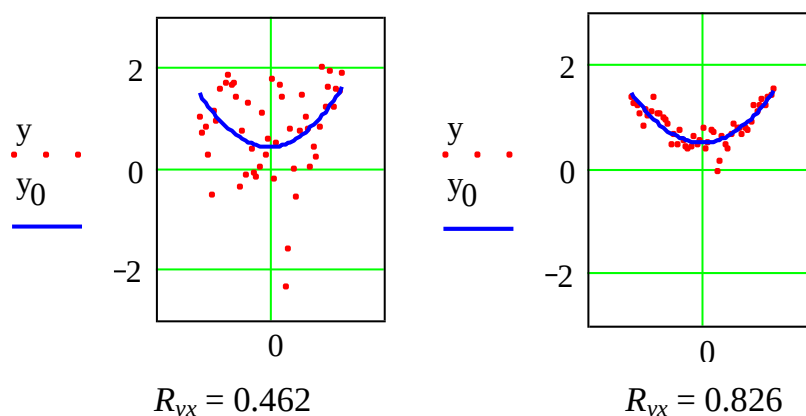


Рис. 6.2. Разброс откликов при различных значениях R_{yx}

Из соотношений (6.4) следует, что для определения коэффициента корреляции r_{xy} может быть использовано не только выражение (6.1), но и формулы, аналогичные (6.5), (6.8). Такая возможность следует из выражения для условной дисперсии $\sigma_{y/x}^2 = \sigma_y^2(1 - r_{xy}^2)$ простой линейной регрессии. Однако этим путем может быть определен лишь модуль коэффициента корреляции: $|r_{xy}| = \sqrt{1 - \sigma_{y/x}^2 / \sigma_y^2}$. Для уточнения характера линейной связи Y и X требуется установить знак r_{xy} . В случае простой линейной регрессии это не составляет труда.

Поскольку способ определения r_{xy} через условную дисперсию $\sigma_{y/x}^2$ предполагает, что задача простой линейной регрессии предварительно решена, то знак r_{xy} может быть определен посредством анализа, например, крайних точек регрессионной прямой. Оценки откликов (ординаты точек регрессионной прямой) объединяет вектор $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ (5.17), элементы которого (5.19) равны $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$; $i = \overline{1, n}$. Поэтому одним из возможных вариантов выражения для коэффициента корреляции по результатам решения задачи простой линейной регрессии может служить

$$r_{xy} = \text{sign}(\hat{y}_n - \hat{y}_1) \sqrt{1 - \sigma_{y/x}^2 / \sigma_y^2} = \text{sign}(\hat{y}_n - \hat{y}_1) \sqrt{D(\hat{y} - m_y) / \sigma_y^2}. \quad (6.11)$$

Это выражение использует априорную монотонность регрессионной зависимости в случае простой линейной регрессии. Подобным свойством обладают не все нелинейные регрессионные зависимости, поэтому выражение, аналогичное (6.11), для корреляционного отношения можно применять лишь в частных случаях, когда монотонность зависимости выявлена.

Проведенный анализ показывает, что коэффициент корреляции r_{xy} может использоваться при исследовании статистической взаимосвязи случайных величин X и Y лишь в частных случаях. Область практического применения r_{xy} ограничена случаями простой линейной регрессии или нормально распределенным случайным вектором $\mathbf{z}^T = [Y, X]$ с элементами Y и X . В этих случаях коэффициент корреляции служит исчерпывающей характеристикой степени взаимосвязи X и Y . Коэффициент корреляции теряет свою информативность при нелинейной зависимости Y от X . Классическим примером служит, например, параболическая зависимость Y от X , пример которой рассмотрен выше (см. рис. 6.2). Для задачи регрессии, результаты которой изображены на графиках рис. 6.2, вычисление коэффициента корреляции дает следующие результаты: $r_{xy} = 0.017$ (левый график, рис. 6.2) и $r_{xy} = 0.034$ (правый график). Значение r_{xy} (правый график) увеличилось вдвое, но, несмотря на достаточно тесное расположение экспериментальных данных вокруг расчетной, все же остается в зоне весьма малых величин.

Таким образом, в общем случае для анализа статистической взаимосвязи X и Y следует пользоваться корреляционным отношением R_{yx} .

Рассмотрим подходы, которые могут быть использованы для количественной оценки степени статистической взаимосвязи Y и X по данным наблюдений. Последовательно рассмотрим проблемы точечной и интервальной оценки коэффициента корреляции r_{xy} и корреляционного отношения R_{yx} .

6.2. Точечная оценка r_{xy} . Выборочный коэффициент корреляции

Пусть в результате наблюдений получены: вектор $\mathbf{Y}$ значений откликов y_i и вектор $\mathbf{X}$ факторов $x_i, i = \overline{1, n}$. Пусть также известно, что двумерный вектор $\mathbf{z}^T = [Y, X]$ имеет нормальное распределение. В этом случае, как отмечено выше, коэффициент корреляции r_{xy} служит исчерпывающей мерой связи X и Y . Поставим задачу получения точечной оценки $\hat{r}$ коэффициента корреляции (6.4) с использованием данных наблюдений $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{X}$. При анализе возможных алгоритмов оценки будем опираться на теоретические положения, рассмотренные в главе 7, ч. I, и предыдущий раздел.

Теоретическое значение r_{xy} определяется отношением корреляционного момента (см. разд. 7.6, ч. I, выражение (7.73)) к произведению средних квадратов отклонений (СКО) X и Y :

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{M(X - m_x)(Y - m_y)}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Точечная оценка коэффициента корреляции носит название **выборочного коэффициента корреляции** $\hat{r}$. Значение $\hat{r}$ получают путем замены в r_{xy} теоретических числовых характеристик на соответствующие выборочные значения: математических ожиданий m_x, m_y на выборочные средние $\bar{x}_B, \bar{y}_B$ (2.10) и дисперсий σ_x^2, σ_y^2 — на выборочные дисперсии $\sigma_{xB}^2, \sigma_{yB}^2$ (2.15):

$$\hat{r} = \frac{K_{xyB}}{\sigma_{xB} \sigma_{yB}} = \frac{\left[\sum_i (x_i - \bar{x}_B)(y_i - \bar{y}_B) \right]}{\left[\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x}_B)^2 \sum_i (y_i - \bar{y}_B)^2} \right]}, \quad (6.12)$$

где K_{xyB} — **выборочный корреляционный момент** (точечная оценка K_{xy}).

$$K_{xyB} = \sum_i (x_i - \bar{x}_B)(y_i - \bar{y}_B) / n, \quad (6.13)$$

а выборочные средние и дисперсии находятся по формулам:

$$\bar{x}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad \bar{y}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i; \quad \sigma_{xB}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_B)^2; \quad \sigma_{yB}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_B)^2.$$

Выражение (6.12) для выборочного коэффициента корреляции соответствует оценке максимального правдоподобия и предложено К. Пирсоном [9]. С помощью формулы (6.12) может быть получена полная характеристика линейной взаимосвязи составляющих двумерного вектора.

6.2.1. Свойства выборочного коэффициента корреляции

Выборочный коэффициент корреляции и выборочный корреляционный момент (6.12), (6.13) обладают следующими свойствами, которые формально аналогичны свойствам коэффициента корреляции r_{xy} и корреляционного момента K_{xy} рассмотренным в разд. 7.6 (ч. I):

$$|\hat{r}| \leq 1; \quad |K_{xyB}| \leq \sigma_{xB} \sigma_{yB}. \quad (6.14)$$

Значения $|\hat{r}| = 1$ соответствуют линейной функциональной связи случайных величин X и Y вида $Y = aX + b$, где $a \neq 0$ и b — детерминированные параметры:

$$|\hat{r}| = 1: \quad Y = aX + b, \quad a, b \rightarrow \text{детерминированы, } a \neq 0. \quad (6.15)$$

Для доказательства свойств (6.14) введем понятия выборочных центрированных значений:

$$\bar{x}_i^0 = x_i - \bar{x}_B, \quad \bar{y}_i^0 = y_i - \bar{y}_B \quad (6.16)$$

и рассмотрим сумму произведений $\bar{x}_i^0$ и $\bar{y}_i^0$.

Согласно неравенству Коши—Буняковского,

$$\left| \sum_i \bar{x}_i^o \bar{y}_i^o \right| \leq \sqrt{\sum_i (\bar{x}_i^o)^2} \sqrt{\sum_i (\bar{y}_i^o)^2}. \quad (6.17)$$

Поскольку выборочный корреляционный момент (6.13) и выборочные дисперсии выражаются через значения (6.16)

$$K_{xyB} = \frac{1}{n} \sum_i \bar{x}_i^o \bar{y}_i^o = \sum_i \frac{\bar{x}_i^o}{\sqrt{n}} \frac{\bar{y}_i^o}{\sqrt{n}}; \sigma_{xB}^2 = \frac{1}{n} \sum_i (\bar{x}_i^o)^2; \sigma_{yB}^2 = \frac{1}{n} \sum_i (\bar{y}_i^o)^2 \quad (6.18)$$

то (6.17) можно переписать в виде

$$|K_{xyB}| \leq \sigma_{xB} \sigma_{yB}.$$

Отсюда непосредственно следует, что модуль выборочного коэффициента корреляции не превышает единицы:

$$|\hat{r}| = \frac{|K_{xyB}|}{\sigma_{xB} \sigma_{yB}} \leq 1.$$

При линейной функциональной связи (6.15) выборочные центрированные значения $\bar{y}_i^o = a \bar{x}_i^o$, а характеристики (6.18) приобретают вид:

$$K_{xyB} = \frac{a}{n} \sum_i (\bar{x}_i^o)^2 = a \sigma_{xB}^2; \sigma_{yB}^2 = a^2 \sigma_{xB}^2.$$

Это позволяет записать $\hat{r}$ (6.12) в форме:

$$\hat{r} = \frac{K_{xyB}}{\sigma_{xB} \sigma_{yB}} = \frac{a}{\sqrt{a^2}}, \text{ т. е. } |\hat{r}| = 1. \quad (6.19)$$

Из (6.19) следует, что $\hat{r} > 1$ при $a > 1$ и $\hat{r} < 1$ при $a < 1$.

6.2.2. Альтернативные алгоритмы точечной оценки r_{xy}

Получение точечной оценки коэффициента корреляции может быть осуществлено, наряду с использованием формулы (6.12), другими путями. Так, например, в *разд. 6.1* указывалось, что вычисление матрицы S (6.3) обеспечивает получение всех коэффициентов корреляции n -мерного случайного вектора одновременно. Этот подход, использующий вычисление выборочной ковариационной матрицы, будет подробно рассмотрен ниже, при анализе парных связей (*см. разд. 6.6.1*).

Здесь остановимся на подходах, которые опираются на предварительное решение задачи простой линейной регрессии, а также на выражения (6.4) и (6.11). Рассмотрим эти пути с необходимыми комментариями и примерами.

1. Точечная оценка r_{xy} может быть найдена по результатам вычисления оценок параметров a и b простой линейной регрессии $Y = aX + b$. Оценки параметров a и b находятся по формулам (7.102), ч. I:

$$\hat{a} = r_{xy} \sigma_y / \sigma_x; \hat{b} = m_y - \hat{a} m_x.$$

Из этих соотношений следует, что выражение для оценки параметра a содержит в качестве множителя коэффициент корреляции, который можно выразить через другие составляющие формулы для $\hat{a}$. Используя тот же принцип замены теоретических числовых характеристик их выборочными значениями, который применен для формирования соотношения (6.12), получим оценку r_{xy} на основе $\hat{a} = r_{xy} \sigma_y / \sigma_x$ (7.102), ч. I, в форме:

$$\hat{r} = \hat{a} \sigma_{xB} / \sigma_{yB}. \quad (6.20)$$

2. По результатам решения задачи простой линейной регрессии может быть рассмотрен еще один способ вычисления оценки r_{xy} . Он основан на использовании соотношения (6.11), где коэффициент корреляции r_{xy} выражается через условную дисперсию $\sigma_{y/x}^2$. В разд. 7.7, ч. I показано, что дисперсия $\sigma_{y/x}^2$ является результатом подстановки найденных параметров простой линейной регрессии в критерий (7.101). Это означает, как отмечалось выше, что условная дисперсия $\sigma_{y/x}^2$ имеет смысл математического ожидания остаточной суммы квадратов. Поэтому в качестве оценки условной дисперсии $\sigma_{y/x}^2$ можно использовать остаточную дисперсию (5.36)

$$d = S / n = \left[\sum_{i=1}^n (e_y)_i^2 \right] / n = \left[\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{a} x_i - \hat{b})^2 \right] / n = (\mathbf{e}_y)^T \mathbf{e}_y / n. \quad (6.21)$$

Здесь S — остаточная сумма квадратов (5.23); $\hat{a}$, $\hat{b}$ — оценки параметров регрессии; $\mathbf{e}_y = \hat{\mathbf{Y}} - \mathbf{Y}$ — $(n \times 1)$ -вектор ошибок оценки откликов (5.18), $\hat{\mathbf{Y}}$ — $(n \times 1)$ -вектор оценок откликов, равный $\mathbf{A}\hat{\beta}$ в соответствии с (5.17).

Из теоремы 5.1 следует также, что d — смещенная оценка дисперсии невязок (условной дисперсии $\sigma_{y/x}^2$), причем $M(d) = (n - 2)\sigma^2/n$. Несмещенная оценка этой остаточной дисперсии соответствует выражению (5.37).

Учитывая (6.8), (6.21), (6.11) и сделанные замечания, выборочный коэффициент корреляции может быть вычислен по формуле

$$\hat{r} = \text{sign}(\hat{y}_n - \hat{y}_1) \sqrt{1 - d / \sigma_{yB}^2} = \text{sign}(\hat{y}_n - \hat{y}_1) \sigma_{\hat{y}} / \sigma_{yB}. \quad (6.22)$$

Здесь $\sigma_{\hat{y}}$ — корень квадратный из дисперсии вектора $\hat{\mathbf{Y}}$ (5.17) оценок откликов $\sigma_{\hat{y}}^2$, в силу (6.7) равной $\sigma_{\hat{y}}^2 = D(\hat{y} - m_y) = \sigma_{yB}^2 - d$.

Полученные выражения позволяют по данным наблюдений проанализировать линейную корреляцию между величинами X и Y .

Следует отметить, что при использовании Mathcad в качестве среды для решения задач точечной оценки r_{xy} процедура вычисления выборочного коэффициента корреляции $\hat{r}$ предельно упрощается. Формулы (6.12) и (6.13) в Mathcad реализуют встроенные функции **corr** и **cvar**, аргументами которых

выступают массивы данных наблюдений (например, вектор **X** значений x_i и вектор **Y** значений $y_i, i = \overline{1, n}$). Вычисление выборочных средних, выборочных дисперсий и СКО осуществляют встроенные функции **mean**, **var** и **stdev**. Поэтому для получения $\hat{r}$ по формуле (6.12) достаточно ввести ранжированные значения данных наблюдений и обратиться к функции **corr**. Использование формул (6.20), (6.22) требует предварительного решения задачи регрессии, что дополнительно обеспечивает наглядность получаемых результатов.

Рассмотрим пример (рис. 6.3, 6.4), в котором применим формулы (6.12)—(6.22) для получения точечной оценки $\hat{r}$ в среде Mathcad.

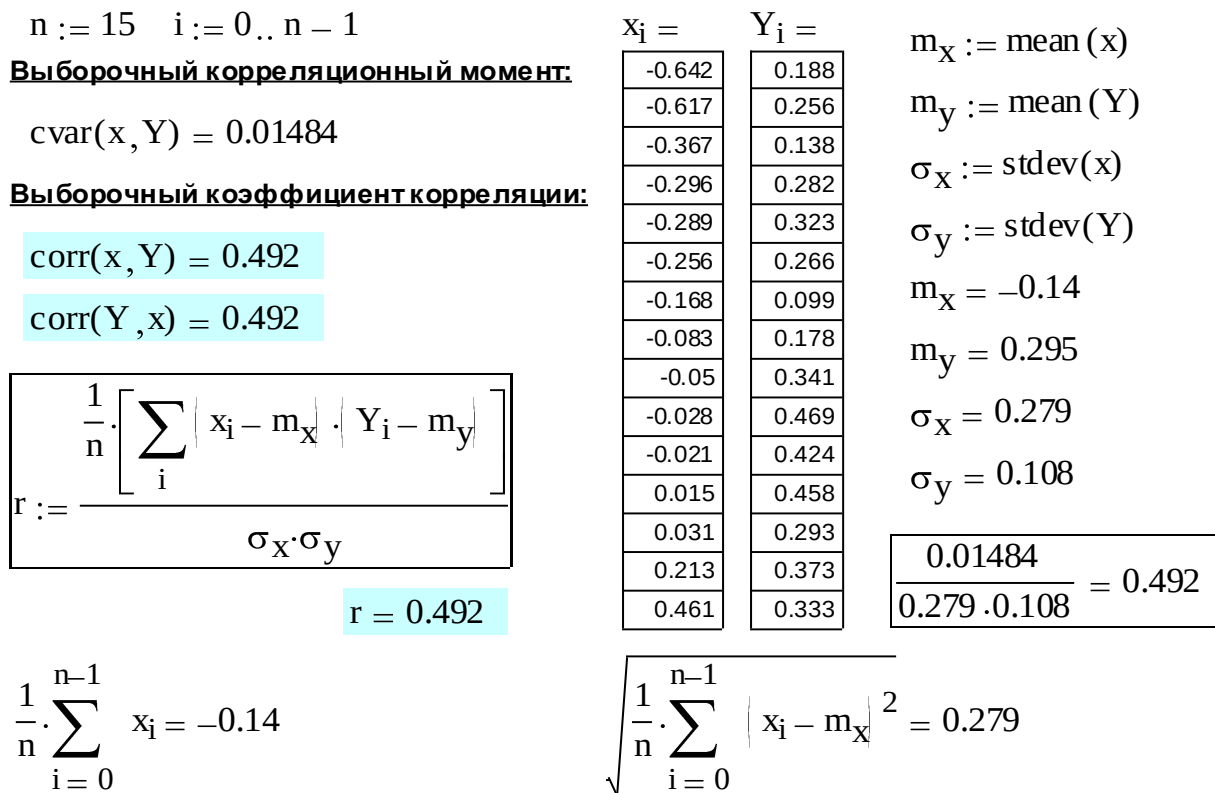


Рис. 6.3. Оценка коэффициента корреляции по формуле (6.12)

Пример 6.1. В течение 15 месяцев наблюдалось отклонение солнечной активности X от средней многолетней и получались данные об относительном числе Y сердечно-сосудистых заболеваний в контрольной группе населения района. Результаты наблюдений сведены в двухстолбцовую матрицу, строки которой были отсортированы по возрастанию солнечной активности с применением встроенной функции **csort** Mathcad. Элементы векторов x и Y результирующей матрицы приведены на рис. 6.3. В предположении нормального распределения двумерного случайного вектора с элементами X и Y получить точечную оценку коэффициента корреляции Y и X .

□ **Решение.** Оценка $\hat{r} = 0.492$ получена в среде Mathcad (см. рис. 6.3) непосредственным обращением к встроенной функции **corr**. Остальные элементы файла, представленного на рис. 6.3, носят вспомогательный характер и служат

для проверки полученного результата применением формулы (6.12). Как и ранее, для вычисления выборочных средних и выборочных СКО применены встроенные функции **mean** и **stdev** соответственно.

На рис. 6.4 для тех же исходных данных приведены результаты оценки r_{xy} с применением формул (6.20) и (6.22).

$n := 15 \quad i := 0..n-1 \quad a_i := 1 \quad b_i := x_i \quad A := \text{augment}(a, b)$			
$\beta := \begin{bmatrix} A^T \cdot A \end{bmatrix}^{-1} \cdot A^T \cdot Y \quad \beta = \begin{pmatrix} 0.321 \\ 0.19 \end{pmatrix} \quad Y_0 := A \cdot \beta \quad \Delta := Y_0 - Y$			
$\delta := \Delta^T \cdot \Delta \quad \delta = 0.13276$	Остаточная сумма квадратов	$\beta_0 = 0.321$	
$d := \frac{1}{n} \cdot \delta \quad d = 0.00885$	Остаточная дисперсия	$\beta_1 = 0.19$	

Рис. 6.4, а. Решение задачи простой линейной регрессии

Исходный mcd-файл разбит на части, отдельно показанные на рис. 6.4, а (решение задачи простой линейной регрессии для исходного вектора Y), рис. 6.4, б (оценка r_{xy} для исходного вектора Y), рис. 6.4, в (оценка r_{xy} для вектора $(-Y)$). Предварительно (см. рис. 6.4, а) решена задача простой линейной регрессии, комментарии к которой были даны в разд. 5.2.3 (см. рис. 5.2, а). Оценки параметров регрессии $y = ax + b$ составили $\hat{a} = 0.19$, $\hat{b} = 0.321$. Значение остаточной дисперсии (6.21) $d = 0.00885$. Результаты решения задачи регрессии представлены на графиках (см. рис. 6.4, б и 6.4, в).

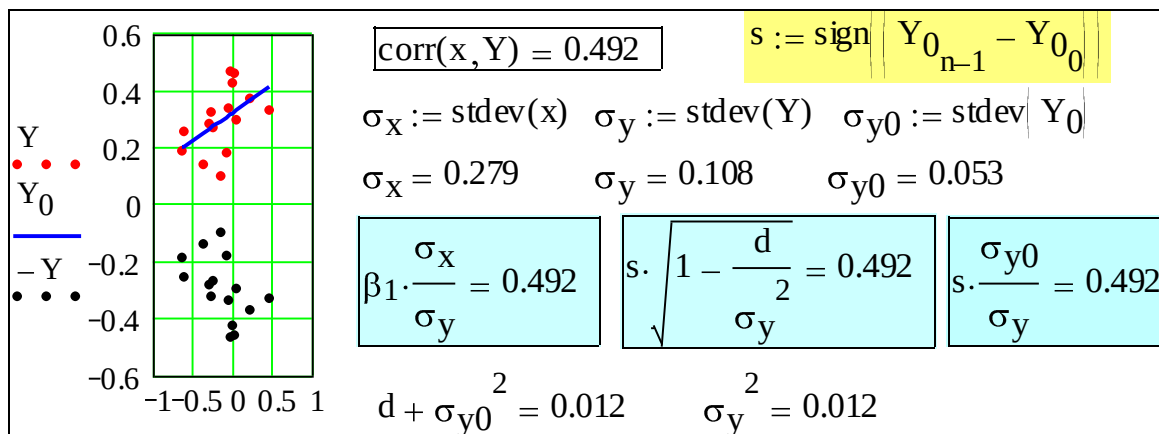


Рис. 6.4, б. Оценка r_{xy} по формулам (6.20), (6.22) для исходных данных

На рис. 6.4, б оценка r_{xy} вычислена с применением формул (6.20), (6.22) для исходных данных, при которых коэффициент корреляции положителен.

Результаты $r_{xy} = 0.492$ (выделены заливкой), совпадают со значением $\hat{r}$, полученным по формуле (6.12) на рис. 6.3. Для контроля правильности вычисления $\hat{r}$ на основе (6.20), (6.22) приводится оценка r_{xy} с применением встроенной функции **corr** Mathcad.

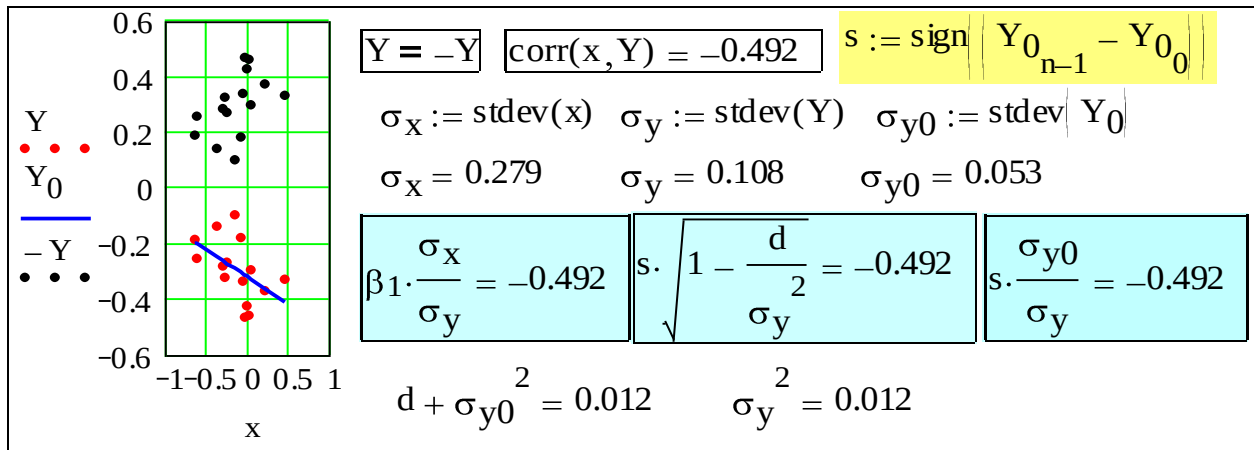


Рис. 6.4, в. Оценка r_{xy} по формулам (6.20), (6.22) для $(-Y)$

На рис. 6.4, в приведены результаты оценки r_{xy} с применением тех же формул для искусственно измененных исходных данных. В них, в целях иллюстрации справедливости формул (6.20), (6.22) при отрицательной корреляции, знак откликов заменен на обратный. В этом случае r_{xy} — отрицательный, что отражает полученное значение $\hat{r} = -0.492$.■

Касаясь сущности рассмотренной взаимосвязи солнечной активности и возникновения сердечно-сосудистых заболеваний, то выявленная связь просматривается достаточно четко, причем коэффициент корреляции — положительный, что отражает известный факт роста числа заболеваний в среднем при увеличении солнечной активности. Однако, как будет показано в разд. 6.3, объем данных в примере 6.1 недостаточно велик для надежной оценки коэффициента корреляции. Этот факт, отчасти, отражают и графики.

Программные структуры, приведенные на рис. 6.3 и 6.4, могут выступать в качестве типовых, позволяющих с применением СКМ получать решения других задач рассматриваемого класса, для другого числа выборочных данных n и других значений элементов векторов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$. Эти структуры можно с успехом использовать и в исследовательских целях, а также для формирования множества индивидуальных заданий на практических занятиях по обсуждаемой теме.

Многообразие ситуаций, определяющих связь случайных величин X и Y , требует достижения надежности точечных оценок коэффициента корреляции и гарантий наличия самой корреляционной связи. С этой целью необходимо построить интервальную оценку r_{xy} и проверить гипотезу об отсутствии корреляции X и Y . Основные подходы к решению этих задач рассматриваются в следующем разделе.

6.3. Интервальная оценка и проверка значимости r_{xy}

В работах [4, 8, 9] проведен анализ свойств выборочного коэффициента корреляции (6.12), дополняющий рассмотренную совокупность его свойств.

В предположении, что случайный вектор с элементами X и Y имеет двумерный нормальный закон распределения, показано [4], что оценка $\hat{r}$ (6.12) имеет асимптотически нормальный закон распределения с математическим ожиданием $M(\hat{r})$ и дисперсией $D(\hat{r})$. При больших объемах выборки и малых значениях r_{xy} эти параметры равны:

$$M(\hat{r}) \approx r_{xy}; \quad D(\hat{r}) \approx 1/n; \quad n > 500; \quad r_{xy} \ll 1. \quad (6.23)$$

Если условия конкретной задачи оценки r_{xy} соответствуют указанным ограничениям, интервальная оценка r_{xy} может быть найдена с использованием стандартного подхода, рассмотренного в *разд. 3.2.4, ч. II*. Границы такой оценки, в согласии с указанным материалом, для уровня значимости α составляют:

$$\left[\hat{r} - \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}, \quad \hat{r} + \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \right] = [q_{\alpha/2}, q_{1-\alpha/2}]. \quad (6.24)$$

В (6.24) обозначены: $z_{1-\alpha/2}$ — квантиль нормированного нормального распределения $N(0, 1)$ порядка $(1 - \alpha/2)$; $q_{\alpha/2}, q_{1-\alpha/2}$ — квантили нормального распределения $N(\hat{r}, 1/\sqrt{n})$ порядков $\alpha/2$ и $(1 - \alpha/2)$ соответственно.

Интервальные оценки (6.24) получены для условий (6.23), поэтому относятся к классу практических задач корреляционного анализа, которые характеризуются большим числом данных наблюдений при слабой корреляции исследуемой пары случайных величин. Этот класс является лишь частью спектра практических задач.

В целях расширения возможностей статистического анализа Р. Фишер предложил [4, 8] функциональное преобразование выборочного коэффициента корреляции $\hat{r}$ (6.12) вида

$$\hat{Z} = \text{arcth}(\hat{r}) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \hat{r}}{1 - \hat{r}}. \quad (6.25)$$

В работах [4, 9] показано, что случайная величина $\hat{Z}$ уже при достаточно коротких выборках ($n \geq 10$) имеет распределение, близкое к нормальному, с математическим ожиданием и дисперсией

$$M(\hat{Z}) \approx \frac{1}{2} \ln \frac{1 + r_{xy}}{1 - r_{xy}} + \frac{r_{xy}}{2(n-1)}; \quad D(\hat{Z}) \approx \frac{1}{n-3}. \quad (6.26)$$

Непосредственное использование (6.26) для формирования интервальных оценок коэффициента корреляции затруднено практической невозможностью аналитического выражения r_{xy} через $M(\hat{Z})$ и n . Анализ показывает, что, в широком диапазоне значений n и r_{xy} для математического ожидания $M(\hat{Z})$ может использоваться более простое выражение вида

$$M(\hat{Z}) \approx \frac{1}{2} \ln \frac{1 + r_{xy}}{1 - r_{xy}} = \text{arcth}(r_{xy}). \quad (6.27)$$

На рис. 6.5 приведены результаты сопоставительного анализа вычислений $\tanh[M(\hat{Z})]$ с использованием формул (6.26) и (6.27) для $M(\hat{Z})$.

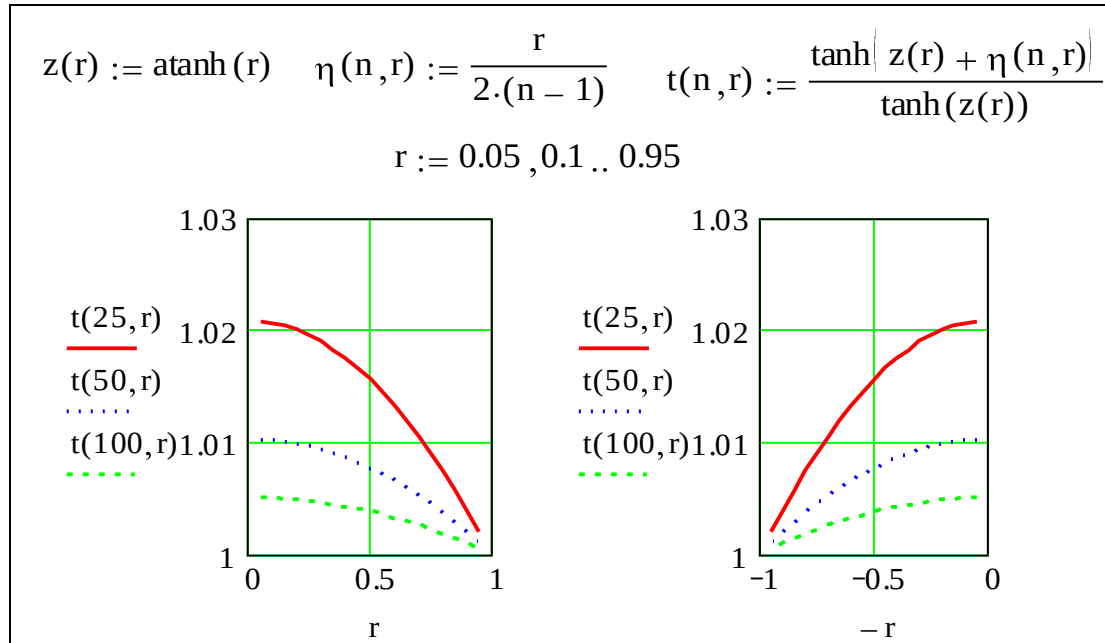


Рис. 6.5, а. Оценка точности вычисления $\tanh[M(Z)]$

В расчетах (см. рис. 6.5, а) значение r менялось в диапазоне (0.05, 0.95) с шагом 0.05, объем выборки принимался равным 25, 50, 100. Полученные результаты свидетельствуют о практической приемлемости формулы (6.27) при объемах выборки $n \geq 25$. Наибольшие погрешности (см. графики на рис. 6.5, а), сопровождающие вычисление r_{xy} с применением (6.27), характерны для весьма малых коэффициентов корреляции ($|r_{xy}| = 0.05, 0.10, 0.15$) и достаточно быстро снижаются с ростом $|r_{xy}|$. Обращает внимание также факт снижения погрешности вычислений при увеличении объема выборки. Так, при $n = 25$ максимальная погрешность составляет $\sim 2\%$, при $n = 50$ она не превышает $\sim 1\%$, а при $n = 100$ — ограничена величиной $\sim 0.5\%$.

На рис. 6.5, б приведено продолжение файла (см. рис. 6.5, а). В этом фрагменте для $n = 25$ вычисления проводятся для малых значений $r_{xy} = 0.01, 0.02, \dots, 0.05$. Эти результаты подтверждают выводы о практической приемлемости формулы (6.27), сделанные ранее.

$i := 0 \dots 5$	$r_i := i \cdot 0.01$	$T_i := \tanh z r_i + \eta 25, r_i $
$T^T = (0 \quad 0.0102 \quad 0.0204 \quad 0.0306 \quad 0.0408 \quad 0.051)$		
$t_i := \tanh z r_i$	$t^T = (0 \quad 0.01 \quad 0.02 \quad 0.03 \quad 0.04 \quad 0.05)$	

Рис. 6.5, б. Вычисления $\tanh[M(Z)]$ в области малых значений r_{xy}

Возможность обратного преобразования (6.27) в коэффициент корреляции позволяет достаточно просто сформировать его интервальную оценку.

В соответствии с общим подходом к построению доверительных интервалов (см. разд. 3.2, ч. II), зададим уровень значимости α и определим квантиль $z_{1-\alpha/2}$ нормированного нормального распределения $N(0, 1)$ порядка $(1 - \alpha/2)$.

$$\text{Тогда } P(-z_{1-\alpha/2} \leq \frac{\hat{Z} - M(\hat{Z})}{\sqrt{D(\hat{Z})}} \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha = \gamma.$$

Преобразуем неравенство в круглых скобках с учетом выражения для дисперсии $D(\hat{Z}) = 1/(n - 3)$ из (6.26):

$$L \leq M(\hat{Z}) \leq U; \quad L = \hat{Z} - \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}; \quad U = \hat{Z} + \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}.$$

Здесь L и U — нижняя и верхняя границы доверительного интервала для $M(\hat{Z})$. Согласно (6.27), $M(\hat{Z}) = \text{arcth}(r_{xy})$.

Учитывая, что $\text{arcth}(r_{xy})$ — строго возрастающая функция при изменении r_{xy} от (-1) до 1 , а обратная функция $\text{th}(M(\hat{Z})) = r_{xy}$ — также строго возрастает и однозначна, обратным преобразованием $M(\hat{Z})$ (6.27) получаем границы доверительного интервала для коэффициента корреляции:

$$[\text{th}(L); \text{th}(U)] = [\text{th}(\frac{1}{2} \ln \frac{1+\hat{r}}{1-\hat{r}} - \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}); \text{th}(\frac{1}{2} \ln \frac{1+\hat{r}}{1-\hat{r}} + \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n-3}})]. \quad (6.28)$$

Границы доверительного интервала для r_{xy} могут быть определены другим способом, который назван в разд. 3.2.2, ч. II альтернативным. Он основан на прямом вычислении квантилей нормального распределения $N[\hat{Z}, \sqrt{D(\hat{Z})}]$ порядков $\alpha/2$ и $(1 - \alpha/2)$ для случайной величины $\hat{Z}$ (6.25). Обозначая эти квантили $Q_{\alpha/2}$, $Q_{1-\alpha/2}$ соответственно, заметим, что они численно равны левой (L) и правой (U) границам доверительного интервала для $M(\hat{Z})$ (6.27). Переходя от $Q_{\alpha/2}$, $Q_{1-\alpha/2}$ к обратным функциям, получаем границы интервала для r_{xy} в форме:

$$[\text{th}(Q_{\alpha/2}); \text{th}(Q_{1-\alpha/2})]. \quad (6.29)$$

Рассмотрим примеры построения интервальных оценок r_{xy} .

Пример 6.2. Для $n = 625$, $\hat{r} = 0.4$, $\alpha = 0.05$ построить интервальную оценку r_{xy} с применением формул (6.24), (6.28) и (6.29).

□ Решение. Результаты вычислений в Mathcad приведены на рис. 6.6.

Результаты, полученные двумя различными способами, отмечены заливкой. Рамками выделены значения границ доверительного интервала, полученных прямым вычислением квантилей соответствующего нормального распре-

деления, без введения нормировки случайных величин. Они, естественно, совпадают с результатами, полученными анализом нормированных статистик.

$r := 0.4$	$n := 625$	$a := 0.05$	$Z := \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$
$z := \text{qnorm}\left(1 - \frac{a}{2}, 0, 1\right)$		$z = 1.96$	
$r - \frac{z}{\sqrt{n}} = 0.322$	$r + \frac{z}{\sqrt{n}} = 0.478$	<u>Формула (6.24)</u>	
$\text{qnorm}\left(\frac{a}{2}, r, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0.322$	$\text{qnorm}\left(1 - \frac{a}{2}, r, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0.478$		
<u>Формула (6.28)</u>			
$\tanh\left(Z - \frac{z}{\sqrt{n-3}}\right) = 0.332$	$\tanh\left(Z + \frac{z}{\sqrt{n-3}}\right) = 0.464$		
$\text{qnorm}\left(\frac{a}{2}, Z, \frac{1}{\sqrt{n-3}}\right) = 0.345$		$\text{qnorm}\left(1 - \frac{a}{2}, Z, \frac{1}{\sqrt{n-3}}\right) = 0.502$	
$\tanh(0.345) = 0.332$	$\tanh(0.502) = 0.464$	<u>Формула (6.29)</u>	

Рис. 6.6. Определение границ доверительных интервалов для r_{xy}

Значения границ $[0.322, 0.478]$, полученных первым способом, с применением формул (6.24), для условий (6.23), несколько отличаются от значений $[0.332, 0.464]$, полученных путем функционального преобразования (6.25) с применением формул (6.28), (6.29). Объем выборки, при котором решается данная задача, большой, поэтому результаты вычислений по указанным формулам обладают приблизительно одинаковой надежностью. Однако большую степень доверия имеет результат $[0.332, 0.464]$, полученный вторым способом, который не ограничивает значения коэффициентов корреляции лишь малыми величинами. ■

Пример 6.3. В примере 6.1 для данных наблюдений объемом $n = 15$ был получен выборочный коэффициент корреляции $\hat{r} = 0.492$. Построить интервальную оценку коэффициента корреляции для примера 6.1 с применением формул (6.24), (6.28), принимая уровень значимости $\alpha = 0.05$.

□ Решение. Результаты вычислений приведены на рис. 6.7.

В данном случае объем выборки мал, поэтому результат $[-0.014, 0.998]$, полученный с применением формул (6.24), не обладает достаточной надежностью. Применение формулы (6.28), как следует из проведенного анализа точности второго подхода, может иметь погрешность не более 3%. Поэтому значения границ $[-0.027, 0.802]$, полученных вторым способом, с применением преобразования (6.25), можно считать значительно более надежными. ■

$r := 0.492$	$n := 15$	$a := 0.05$
$z := \text{qnorm}\left(1 - \frac{a}{2}, 0, 1\right)$		$z = 1.96$
<u>Формула (6.23)</u>		
$r - \frac{z}{\sqrt{n}} = -0.014$	$r + \frac{z}{\sqrt{n}} = 0.998$	$Z := \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$
<u>Формула (6.27)</u>		
$\tanh\left(Z - \frac{z}{\sqrt{n-3}}\right) = -0.027$	$\tanh\left(Z + \frac{z}{\sqrt{n-3}}\right) = 0.802$	

Рис. 6.7. Интервальные оценки r_{xy} для примера 6.1

Получение оценок коэффициента корреляции по данным наблюдений не служит абсолютной гарантией наличия корреляционных связей между случайными величинами X и Y . Особенно это касается случаев, когда полученные оценки имеют малые значения по абсолютной величине. Результирующие оценки r_{xy} , каким бы способом они не были получены, содержат ошибки. Они вызваны сложной комбинацией методических, трансформированных, вычислительных и других ошибок. Поэтому одной из важнейших задач корреляционного анализа служит задача выявления факта существования или отсутствия связи между случайными величинами. Решение обычно принимается по результатам проверки статистической гипотезы об отсутствии связи ($r_{xy} = 0$) против альтернативы $r_{xy} \neq 0$.

При проверке нулевой гипотезы о некоррелированности нормально распределенных случайных величин, т. е. $H_0 : r_{xy} = 0$, против альтернативы $H_1 : r_{xy} \neq 0$, применяют статистику

$$T = \hat{r} \sqrt{n-2} / \sqrt{1-\hat{r}^2}, \quad (6.30)$$

где $\hat{r}$ — выборочный коэффициент корреляции (6.12), n — объем выборки.

В работах [4, 8] показано, что при условии $r_{xy} = 0$ случайная величина (6.30) имеет распределение Стьюдента с $(n-2)$ степенями свободы.

Зададим уровень значимости α и определим квантиль $t_{1-\alpha/2}(n-2)$ распределения Стьюдента порядка $(1-\alpha/2)$ с $(n-2)$ степенями свободы. Тогда, учитывая, что распределение Стьюдента симметрично и имеет нулевое математическое ожидание, допустимая область (принятия нулевой гипотезы) будет соответствовать неравенству $|T| \leq t_{1-\alpha/2}(n-2)$. Выход за пределы этой области будет означать, что корреляционная связь между X и Y существует на уровне значимости α .

После несложных преобразований, неравенство $|T| \leq t_{1-\alpha/2}(n-2)$ можно трансформировать в условие для выборочного коэффициента корреляции

$$|\hat{r}| \leq \frac{t_{1-\alpha/2}(n-2)}{\sqrt{n-2 + [t_{1-\alpha/2}(n-2)]^2}}, \quad (6.31)$$

при котором нулевая гипотеза не отклоняется.

Пример 6.4. Для условий примеров 6.1 и 6.2 проверить нулевую гипотезу $H_0: r_{xy} = 0$ об отсутствии корреляционной связи между X и Y .

□ Решение.

1. По условиям примера 6.1: $\hat{r} = 0.492$, $n = 15$. Примем уровень значимости $\alpha = 0.1$. Квантиль $t_{1-\alpha/2}(n-2)$ распределения Стьюдента порядка $(1 - \alpha/2)$ с $(n - 2)$ степенями свободы определим в Mathcad с применением встроенной функции **qt**($1 - \alpha/2$, $n - 2$) = 1.771. Вычисляя критическую точку — правую часть неравенства (6.31), получаем: $1.771 / \sqrt{13 + 3.136} = 1.771 / 4.017 = 0.441$.

Полученный результат ($0.492 > 0.441$) говорит о том, что корреляционная связь X и Y существует при уровне значимости 0.1. Однако близость выборочного коэффициента корреляции 0.492 к критической точке 0.441 свидетельствует о необходимости продолжения наблюдений за солнечной активностью с целью увеличения объема выборки. Даже при увеличении объема выборки на пять единиц ($n = 20$) получаем значительно более убедительное свидетельство ($0.492 > 0.378$) наличия корреляционной связи между исследуемыми случайными величинами. Копия фрагмента Mathcad, приведенная ниже, иллюстрирует эти несложные вычисления.

$a := 0.1 \quad n := 15 \quad t := qt(1 - a \div 2, n - 2)$
$t = 1.771 \quad t^2 = 3.136 \quad t \div \sqrt{n - 2 + t^2} = 0.441$
$a := 0.1 \quad n := 20 \quad t := qt(1 - a \div 2, n - 2)$
$t = 1.734 \quad t^2 = 3.007 \quad t \div \sqrt{n - 2 + t^2} = 0.378$

2. Условиям примера 6.2 соответствуют: $n = 625$, $\hat{r} = 0.4$. Принимая уровень значимости $\alpha = 0.05$, получаем квантиль $t_{1-\alpha/2}(n-2)$ распределения Стьюдента порядка $(1 - \alpha/2)$ с $(n - 2)$ степенями свободы, равный 1.964. Значение критической точки — правой части неравенства (6.31) при этих данных составит: $1.964 / \sqrt{623 + 3.856} = 1.964 / 25.037 = 0.078$. Копия фрагмента Mathcad приведена ниже:

$r := 0.4 \quad n := 625 \quad a := 0.05 \quad t := qt(1 - a \div 2, n - 2)$
$t = 1.964 \quad t^2 = 3.856 \quad t \div \sqrt{n - 2 + t^2} = 0.078$

Полученный результат ($0.4 \gg 0.078$) убедительно свидетельствует о наличии корреляционной связи в данном случае, при достаточно малом уровне значимости $\alpha = 0.05$. ■

6.4. Точечная оценка корреляционного отношения R_{yx}

Выражения (6.5)—(6.8) для корреляционного отношения R_{yx} определяют подходы к его точечной оценке по данным наблюдения. Известные подходы [4, 5, 8] к решению задач оценки R_{yx} по выборочным данным предполагают использование группированных статистических рядов (см. разд. 1.2), которыми замещают исходные данные наблюдений в целях сокращения объемов выборки и упрощения вычислений. Выше отмечалось, что при использовании группированных статистических рядов неизбежно вносятся методические ошибки, связанные с заменой выборочных данных, попавших в конкретный разряд, средним значением. В современных условиях, при широком проникновении компьютеров во все сферы науки и образования, роль методов, основанных на группировке исходных данных, несколько снижается. В частности, применение СКМ позволяет получать точечную оценку R_{yx} с использованием всех выборочных данных, без их искажения.

Пусть, как и ранее, исследуется связь случайных величин X и Y , данные наблюдений за которыми объединены в вектор $\mathbf{X}$ с элементами x_i и вектор $\mathbf{Y}$ с элементами y_i , $i = \overline{1, n}$. Корреляционное отношение, в согласии с (6.8), можно найти по одной из следующих формул:

$$R_{yx} = \sqrt{1 - \sigma_{y/x}^2 / \sigma_y^2} = \sigma_{\hat{y}} / \sigma_y, \quad (6.32)$$

где $\sigma_{y/x}^2$ — условная дисперсия Y при условии, что реализовались значения случайной величины X ; σ_y^2 — безусловная дисперсия Y ; $\sigma_{\hat{y}}$ — корень квадратный из дисперсии вектора $\hat{\mathbf{Y}}$ (5.17) оценок откликов $\sigma_{\hat{y}}^2$,

$$\sigma_{\hat{y}}^2 = D(\hat{y} - m_y) = D(\hat{y} - m_{\hat{y}}). \quad (6.33)$$

Эти дисперсии, в соответствии с (6.7), связаны соотношением

$$\sigma_y^2 = \sigma_{\hat{y}}^2 + \sigma_{y/x}^2. \quad (6.34)$$

Из главы 2 и разд. 6.1, 6.2 следует, что точечные оценки дисперсий σ_y^2 , $\sigma_{y/x}^2$, $\sigma_{\hat{y}}^2$ (их выборочные значения) можно вычислить по формулам вида:

$$\text{для } \sigma_y^2: \sigma_{yB}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_B)^2; \quad \bar{y}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i; \quad (6.35)$$

$$\text{для } \sigma_{y/x}^2: d = S/n = \left[\sum_{i=1}^n (e_y)_i^2 \right] / n = (\mathbf{e}_y)^T \mathbf{e}_y / n; \quad \mathbf{e}_y = \hat{\mathbf{Y}} - \mathbf{Y}; \quad (6.36)$$

$$\text{для } \sigma_{\hat{y}}^2: \sigma_{\hat{y}B}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y}_B)^2 = \sigma_{yB}^2 - d. \quad (6.37)$$

В выражениях (6.33)—(6.37) использованы ранее введенные обозначения.

На основании (6.32) и рассмотренных соотношений точечную оценку $\hat{R}$ корреляционного отношения получим в следующей форме:

$$\hat{R} = \sqrt{1 - d / \sigma_{yB}^2} = \sigma_{\hat{y}B} / \sigma_{yB}, \quad (6.38)$$

где $\sigma_{\hat{y}B}$, σ_{yB} — корни квадратные из выборочных дисперсий $\sigma_{\hat{y}B}^2$ и σ_{yB}^2 .

Оценку (6.38) назовем **выборочным корреляционным отношением**.

Из выражения (6.38) следует, что $\hat{R}$ имеет свойства, аналогичные свойствам теоретического корреляционного отношения, рассмотренным в разд. 6.1.

Так, выборочное корреляционное отношение удовлетворяет неравенству: $0 \leq \hat{R} \leq 1$. Действительно, остаточная дисперсия d (6.36) будет равна нулю только при функциональной связи X и Y , когда все значения откликов будут располагаться на кривой $Y = f(X)$; при этом $\hat{R} = 1$. При некоррелированности X и Y условная дисперсия будет равна безусловной и оценка $\hat{R} = 0$. На рис. 6.8 приведено решение типовой задачи оценки R_{yx} .

В примере (см. рис. 6.8) рассматривается учебная задача, в которой данные наблюдений предварительно генерируются в среде Mathcad. Объем выборок для случайных величин Y и X задан равным 50. Элементами вектора x служат $x_i = 0.1(i + 0.1\varepsilon_i)$; вектор y формируется выражением, показанным в первой строке mcd-файла. Вектор помех ε образован независимыми нормально распределенными числами с нулевым средним и дисперсией, которая может варьироваться (для варианта, изображенного на рис. 6.8, дисперсия равна 4).

Задача регрессии решается в форме, аналогичной рассмотренной на рис. 5.2, б. Оценка корреляционного отношения найдена с применением формул (6.38). Равенство значений $\hat{R}$ (результаты выделены заливкой на рис. 6.8), найденных по двум формулам (6.38), свидетельствует о том, что выполняется условие (6.34). Полученная оценка корреляционного отношения, равная 0.617, свидетельствует о достаточно большом разбросе откликов вокруг кривой регрессии. Этот факт подтверждается графиком.

Для сопоставления с $\hat{R}$ в примере вычислен и выборочный коэффициент корреляции, выделенный рамкой. Его значение $0.607 < 0.617$, с одной стороны, говорит об отсутствии функциональной зависимости Y от X , а с другой — что использование нелинейного регрессионного соотношения дает остаточную дисперсию d , меньшую, чем при использовании линейного регрессионного соотношения. Последнее легко проверить, решая для тех же исходных данных задачу простой линейной регрессии, для чего в структуре файла (см. рис. 6.8) необходимо исключить из матрицы A третий столбец с квадратами факторов. Это делается заданием $A := \text{augment}(a, b)$; остальные элементы остаются без изменений.

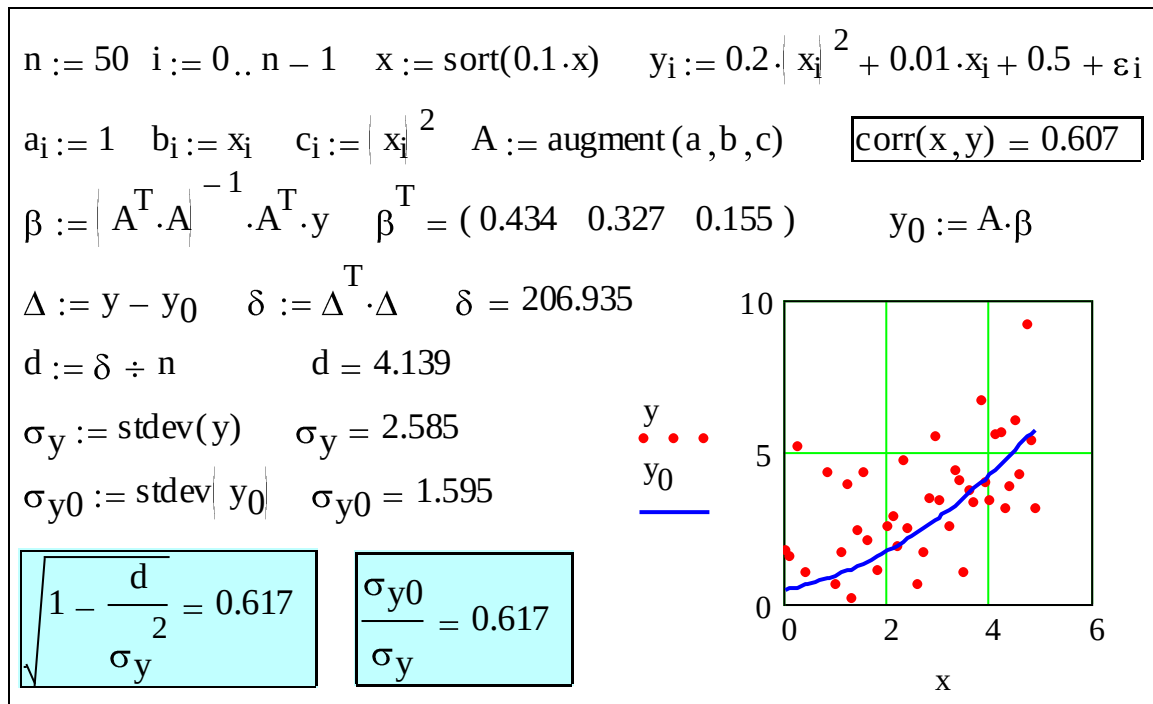


Рис. 6.8. Типовая задача точечной оценки R_{xy}

Программные структуры, подобные изображенной на рис. 6.8, позволяют путем изменения СКО помех ε , значений параметров регрессионного соотношения исследовать влияние этих изменений на точность решения задач регрессии и оценку корреляционного отношения.

Выше (см. разд. 6.1) отмечалось, что значения R_{yx} всегда положительны и характеризуют лишь степень близости связи Y и X к функциональной, тогда как r_{xy} определяет и тенденцию изменения откликов при изменении значений факторов. При использовании формул, аналогичных (6.32), для определения r_{xy} , были введены выражения (6.11). Их применение, ввиду монотонности (в среднем) линейной связи Y и X , всегда возможно при вычислении оценки r_{xy} .

Для корреляционного отношения монотонность связи Y и X гарантировать в общем случае нельзя (см., например, рис. 6.2). Однако в случае монотонной (в среднем) зависимости Y от X , формулы, подобные (6.11), могут применяться для более полной оценки R_{yx} и в общем случае, например, при нелинейной связи Y от X .

6.5. Интервальная оценка и проверка значимости R_{yx}

Методы интервальной оценки корреляционного отношения предполагают необходимость использования группированных статистических рядов и корреляционных таблиц. При условии, что значения факторов сгруппированы в b групп (разрядов), а значения откликов — в l групп, эти таблицы содержат значения частот n_{kj} появления каждого y_j при значениях x_k ; $k = \overline{1, b}$, $j = \overline{1, l}$.

Пусть, как и ранее, случайный вектор с элементами X и Y имеет двумерный нормальный закон распределения, причем дисперсия Y — постоянная величина. При построении интервальной оценки корреляционного отношения R_{yx} используют статистику вида [4, 8]:

$$W = \frac{(n-b)\hat{R}^2}{(b-1)(1-\hat{R}^2)} \cdot \frac{(b-1)}{(b-1+nR_{yx}^2)}. \quad (6.39)$$

Показано, что при указанных условиях случайная величина W имеет распределение, близкое к распределению Фишера (F -распределению) с числом степеней свободы n_1 и n_2 , причем

$$n_1 = \frac{(b-1+n\hat{R}^2)^2}{b-1+2n\hat{R}^2}; \quad n_2 = n-b. \quad (6.40)$$

В (6.39), (6.40) обозначены: n — число элементов векторов Y и X , содержащих данные наблюдений отклика и фактора; b — число групп (разрядов), на которые разбит диапазон выборочных значений фактора X .

Зададим уровень значимости α и определим квантили F -распределения порядка $\alpha/2$ и $(1-\alpha/2)$ с n_1 и n_2 степенями свободы: $F_{\alpha/2}(n_1, n_2) = F_{\alpha/2}$; $F_{1-\alpha/2}(n_1, n_2) = F_{1-\alpha/2}$ из условий $P(W < F_{\alpha/2}) = P(W > F_{1-\alpha/2}) = \alpha/2$.

Тогда, вероятность того, что случайная величина W (6.39) находится в интервале $(F_{\alpha/2}, F_{1-\alpha/2})$, равна доверительной вероятности:

$$P(F_{\alpha/2} < W < F_{1-\alpha/2}) = \gamma = 1 - \alpha.$$

Из неравенства в круглых скобках последнего выражения, разрешая его относительно R_{yx} , определим границы доверительного интервала для корреляционного отношения:

$$F_{\alpha/2} < \frac{(n-b)\hat{R}^2}{(b-1)(1-\hat{R}^2)} \cdot \frac{(b-1)}{(b-1+nR_{yx}^2)} < F_{1-\alpha/2}; \quad U = \frac{(n-b)\hat{R}^2}{(1-\hat{R}^2)};$$

$$\frac{U}{F_{\alpha/2}} > (b-1+nR_{yx}^2) > \frac{U}{F_{1-\alpha/2}}; \quad \frac{U}{nF_{\alpha/2}} - \frac{b-1}{n} > R_{yx}^2 > \frac{U}{nF_{1-\alpha/2}} - \frac{b-1}{n}.$$

Таким образом, границы доверительного интервала для R_{yx} имеют вид:

$$\left[\sqrt{\frac{(n-b)\hat{R}^2}{nF_{1-\alpha/2}(1-\hat{R}^2)} - \frac{b-1}{n}}, \sqrt{\frac{(n-b)\hat{R}^2}{nF_{\alpha/2}(1-\hat{R}^2)} - \frac{b-1}{n}} \right]. \quad (6.41)$$

Формулы вида (6.41) при малых выборках дают заметную погрешность. В ряде случаев правая граница R_U доверительного интервала $[R_L; R_U]$ (6.41) может выйти за пределы единицы. В этих случаях границами доверительного интервала для R_{yx} следует считать $[R_L; 1]$.

Проверка значимости корреляционного отношения основана на проверке нулевой гипотезы $H_0: R_{yx} = 0$, против альтернативы $H_1: R_{yx} \neq 0$. При нулевой гипотезе статистика (6.39) принимает вид:

$$W_0 = \frac{(n-b)\hat{R}^2}{(b-1)(1-\hat{R}^2)}. \quad (6.42)$$

Критической точкой при заданном уровне значимости α служит квантиль порядка $(1 - \alpha)$ F -распределения с n_0 и n_2 степенями свободы: $F_{1-\alpha}(n_0, n_2) = F_{1-\alpha}^0$, где $n_0 = n_1(\hat{R} = 0) = b - 1$, $n_2 = n - b$.

Если $W_0 \leq F_{1-\alpha}^0$, делается вывод об отсутствии корреляционной связи ме-

жду откликом Y и фактором X . В противном случае величину R_{yx} считают значимо отличающейся от нуля и фиксируют, тем самым, корреляционную связь Y и X . Понятно, что проверка значимости в первую очередь нужна в сомнительных случаях, большинство из которых характеризуется малыми значениями корреляционного отношения.

Пример 6.5. Для условий задачи, рассмотренной на рис. 6.8 построить интервальную оценку и проверить значимость R_{yx} при $\alpha = 0.1$.

□ **Решение.** Результаты вычислений в среде Mathcad (продолжение mcd-файла, изображенного на рис. 6.8) приведены на рис. 6.9.

$m := 8$ $n_1 := \text{round}\left[\frac{m-1+n\cdot R^2}{m-1+2\cdot n\cdot R^2}\right]$ $n_2 := n - m$ $n_1 = 15$ $n_2 = 42$
 $\alpha := 0.1$
 $F_2 := qF\left(1 - \frac{\alpha}{2}, n_1, n_2\right)$ $F_1 := qF\left(\frac{\alpha}{2}, n_1, n_2\right)$ $F_1 = 0.455$ $F_2 = 1.912$
 $k_1 := \sqrt{\frac{(n-m)\cdot R^2}{n\cdot |1-R^2|} \cdot F_2} - \frac{m-1}{n}$ $k_2 := \sqrt{\frac{(n-m)\cdot R^2}{n\cdot |1-R^2|} \cdot F_1} - \frac{m-1}{n}$
 $k_1 = 0.36$
 $k_2 = 0.997$
 $n_0 := m - 1$ $W_0 := \frac{(n-m)\cdot R^2}{(m-1)\cdot |1-R^2|}$ $F_0 := qF\left(\alpha, n_0, n_2\right)$
 $n_0 = 7$ $W_0 = 3.686$ $F_0 = 0.395$
 $n = 50$ $R = 0.617$

Рис. 6.9. Интервальная оценка и проверка значимости R_{xy}

В задаче, решение которой показано на рис. 6.8, для $n = 50$ найдена оценка $\hat{R} = 0.617$. Эти параметры, в подтверждение связи файлов рис. 6.8 и рис. 6.9, выведены в качестве результатов в последней строке рис. 6.9.

Число разрядов (обозначено на рис. 6.9 символом m) в расчетах принято равным 8. Квантили $F_{\alpha/2}, F_{1-\alpha/2}$ и $F_{1-\alpha/2}^0$, обозначенные в файле (см. рис.

6.9) F_1 , F_2 и F_0 соответственно и найдены с применением функции $\mathbf{qF}$. В результате вычисления границ доверительного интервала получены значения левой (0.36) и правой (0.97) границы. Последние строки файла на рис. 6.9 содержат результаты проверки нулевой гипотезы.

Значение критической точки составляет $F_{1-\alpha/2}^0 = 0.395$; значение статистики (6.42) получено равным $W_0 = 3.686$. Поскольку полученное значение W_0 много больше значения критической точки $F_{1-\alpha/2}^0$, можно уверенно отклонить нулевую гипотезу и считать нелинейную связь между X и Y имеющей место. ■

6.6. Специальный корреляционный анализ

Элементы корреляционного анализа, рассмотренные в предыдущих разделах, относились к анализу связей элементов двумерного случайного вектора. Совокупность прикладных задач математической статистики, конечно, не ограничивается этими вариантами. На практике часто приходится иметь дело со случайными векторами больших размерностей, анализ связей между элементами и группами элементов которых производится с применением специальных методов.

Рассмотрим основные положения некоторых из них, начиная с простого распространения понятия коэффициента корреляции на случайные векторы, имеющие 3 и более элементов. В этой части будет рассмотрена важная задача точечной оценки матрицы $\mathbf{S}$ коэффициентов корреляции путем замены элементов выражения (6.3) на соответствующие выборочные значения.

Переход от коэффициента корреляции к матрице $\mathbf{S}$ при анализе векторных случайных величин так же естествен, как и переходы от случайной величины X к случайному вектору $\mathbf{X}$, а дисперсии X — к ковариационной матрице.

6.6.1. Анализ парных связей

Пусть $\mathbf{X}$ — случайный вектор с элементами X_j , $j = \overline{1, m}$, имеющий нормальное распределение с параметрами $(\mathbf{m}_X, \mathbf{P}_X)$, где $\mathbf{m}_X$ — вектор математических ожиданий $M(\mathbf{X})$; $\mathbf{P}_X = M[(\mathbf{X} - \mathbf{m}_X)(\mathbf{X} - \mathbf{m}_X)^T]$ — ковариационная матрица.

Согласно свойствам ковариационных матриц (см. разд. 7.6, ч. I), диагональные элементы матрицы $\mathbf{P}_X$ — дисперсии σ_j^2 случайных величин X_j , а недиагональные элементы — корреляционные моменты (7.73) $K_{jl} = K_{lj} = r_{jl} \cdot \sigma_j \cdot \sigma_l$, где r_{jl} — коэффициенты корреляции X_j и X_l , $j, l = \overline{1, m}$, $l \neq j$.

Коэффициенты корреляции r_{jl} служат, в данном случае, исчерпывающей характеристикой связи $n(n-1)/2$ пар случайных величин X_j и X_l . Их оценка по данным наблюдений может быть произведена применительно к каждой паре элементов вектора $\mathbf{X}$ с использованием подходов, подробно рассмотренных в

предыдущих разделах. Однако для точечной оценки r_{jl} можно применить более общий подход, основанный на специальной нормировке вектора $\mathbf{X}$ и вычислении матрицы коэффициентов корреляции $\mathbf{S}$ (6.3). В результате все коэффициенты корреляции могут быть вычислены одновременно.

Такая специальная нормировка случайного вектора $\mathbf{X}$ в данном случае производится его центрированием и обеспечением единичных дисперсий элементов нормированного вектора с использованием следующего выражения:

$$\mathbf{X}^* = \Sigma^{-1}(\mathbf{X} - \mathbf{m}_X) = \Sigma^{-1}\mathbf{X}^0, \quad \mathbf{X}^0 = (\mathbf{X} - \mathbf{m}_X), \quad (6.43)$$

где Σ — диагональная матрица, j -ый диагональный элемент которой равен σ_j ; $\mathbf{X}^0$ — центрированный случайный вектор. Вариант нормировки (6.43) может быть назван **локальным**, в отличие от нормировки (см. прил. 16), при которой ковариационная матрица нормированного случайного вектора — единичная.

Вектор (6.43) имеет нулевое математическое ожидание, поэтому его ковариационная матрица, в силу определения (см. (7.64), ч. I), равна

$$\mathbf{S} = M[\mathbf{X}^* (\mathbf{X}^*)^T]; \quad \mathbf{S} = \Sigma^{-1} \mathbf{P}_X \Sigma^{-1}; \quad \mathbf{P}_X = M[\mathbf{X}^0 (\mathbf{X}^0)^T]. \quad (6.44)$$

После преобразований (6.43), (6.44) получаем матрицу $\mathbf{S}$, диагональные элементы которой равны единице, а недиагональные — коэффициентам корреляции r_{jl} , $l \neq j$. Пример подобных преобразований для трехмерного вектора приводился ранее на рис. 6.1.

Для случая $m = 3$ матрицы $\mathbf{S}$ и Σ имеют вид:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ r_{12} & 1 & r_{23} \\ r_{13} & r_{23} & 1 \end{bmatrix}; \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}. \quad (6.45)$$

В данной постановке задача получения оценок коэффициентов корреляции предполагает получение оценок матриц $\mathbf{P}_X$, Σ и $\mathbf{S}$. С этой целью перейдем в выражениях (6.43), (6.44) от теоретических числовых характеристик к их выборочным аналогам.

Пусть, для простоты последующих преобразований, число выборочных данных по каждому из элементов вектора $\mathbf{X}$ одинаково и равно n . Это означает, что данные наблюдений объединены в $(m \times n)$ -матрицу $\mathbf{X}_B$, строками которой служат наблюденные значения элементов вектора $\mathbf{X}$. Тогда вектор математических ожиданий $\mathbf{m}_X$ и вектор дисперсий элементов $\mathbf{X}$ (диагональных элементов матрицы Σ) будут представлены вектором выборочных средних $\bar{\mathbf{X}}_B$ и вектором выборочных СКО $\mathbf{s}$:

$$\bar{\mathbf{X}}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_{Bi}; \quad s_j = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{ji} - \bar{x}_{jB})^2}; \quad j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}. \quad (6.46)$$

Здесь: s_j — j -ый элемент $(m \times 1)$ -вектора $\mathbf{s}$; $\mathbf{X}_{Bi}$ — i -ый столбец матрицы $\mathbf{X}_B$; x_{ji} — ji -ый элемент $(m \times n)$ -матрицы $\mathbf{X}_B$ (i -ое значение j -ого элемента вектора $\mathbf{X}$); $\bar{x}_{jB}$ — j -ый элемент $(m \times 1)$ -вектора $\bar{\mathbf{X}}_B$.

Сформируем диагональную матрицу Σ_B , расположив полученный в (6.46) вектор $\mathbf{s}$ на ее диагонали:

$$\Sigma_B = \text{diag}(\mathbf{s}). \quad (6.47)$$

Тогда $(m \times n)$ -матрица $\mathbf{X}_B^*$ нормированных данных наблюдений будет образована совокупностью столбцов $\mathbf{X}_{Bi}^*$ ($i = \overline{1, n}$):

$$\mathbf{X}_B^* = [\mathbf{X}_{B1}^* \mathbf{X}_{B2}^* \dots \mathbf{X}_{Bn}^*]; \quad \mathbf{X}_{Bi}^* = \Sigma_B^{-1} (\mathbf{X}_{Bi} - \overline{\mathbf{X}}_B) = \Sigma_B^{-1} \mathbf{X}_{Bi}^0. \quad (6.48)$$

Здесь $\mathbf{X}_{Bi}^0 = (\mathbf{X}_{Bi} - \overline{\mathbf{X}}_B)$ — центрированный i -ый столбец матрицы $\mathbf{X}_B$; совокупность столбцов $\mathbf{X}_{Bi}^0$ образует $(m \times n)$ -матрицу $\mathbf{X}_B^0$ центрированных данных наблюдений: $\mathbf{X}_B^0 = [\mathbf{X}_{B1}^0 \mathbf{X}_{B2}^0 \dots \mathbf{X}_{Bn}^0]$.

После преобразования (6.48) матрица $\mathbf{X}_B^*$ будет иметь строки с нулевым средним и единичной выборочной дисперсией. В свою очередь, матрица $\mathbf{X}_B^0$ имеет строки с нулевым средним.

Выборочные аналоги матриц $\mathbf{P}_X$ и $\mathbf{S}$ (6.44) могут быть найдены с использованием следующих выражений:

$$\mathbf{P}_B = \frac{1}{n} \mathbf{X}_B^0 (\mathbf{X}_B^0)^T; \quad \mathbf{S}_B = \frac{1}{n} \mathbf{X}_B^* (\mathbf{X}_B^*)^T, \quad (6.49)$$

причем, в соответствии с (6.44), (6.47)—(6.49),

$$\mathbf{S}_B = \Sigma_B^{-1} \mathbf{P}_B \Sigma_B^{-1}. \quad (6.50)$$

Матрица $\mathbf{S}_B$ — оценка матрицы $\mathbf{S}$ (6.44) по данным наблюдений — содержит вне диагонали выборочные коэффициенты корреляции. Матрица $\mathbf{P}_B$ — **выборочная ковариационная матрица** — содержит выборочные дисперсии (диагональ) и выборочные корреляционные моменты (вне диагонали).

Приведенные соотношения позволяют находить матрицу $\mathbf{S}_B$ двумя путями:

- ° посредством локальной нормировки исходных данных, получения в результате матрицы $\mathbf{X}_B^*$ (6.48) и вычисления $\mathbf{S}_B$ по формуле (6.49);

- ° путем формирования матрицы $\mathbf{X}_B^0$ центрированных данных, вычисления выборочной ковариационной матрицы $\mathbf{P}_B$ и использования формулы (6.50) для $\mathbf{S}_B$.

Пример 6.6. Вычислить матрицу выборочных коэффициентов корреляции для трехмерного нормально распределенного случайного вектора $\mathbf{R}$, выборочные данные элементов X, Y, Z которого соответствуют строкам матрицы $\mathbf{A}$, приведенной на рис. 6.10, *a*.

□ Решение. Решение примера представлено на рис. 6.10, *a, б* в виде отдельных фрагментов единого mcd-файла.

Выборочные данные по каждому из элементов случайного вектора $\mathbf{R}$ сведены в (16×1) -векторы $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ и $\mathbf{Z}$, составляющих (3×16) -матрицу $\mathbf{A}$.

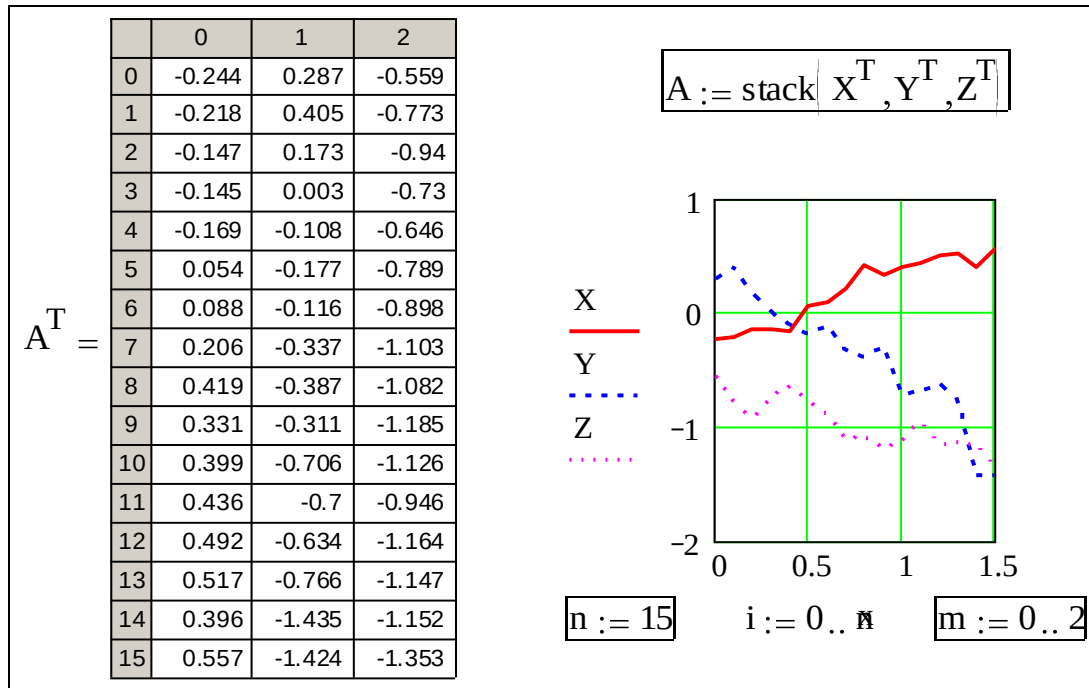


Рис. 6.10, а. Исходные данные примера 6.6

1

$m_{cp} := \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^n A^{(k)}$

$m_{cp} = \begin{pmatrix} 0.186 \\ -0.39 \\ -0.975 \end{pmatrix}$

$\text{mean}(X) = 0.186$
 $\text{mean}(Y) = -0.39$
 $\text{mean}(Z) = -0.975$

2

$A_0^{(i)} := A^{(i)} - m_{cp}$

$\text{mean} \left[A_0^T \right]^{(0)} = 0$

3

$P := \frac{1}{n+1} \cdot A_0 \cdot A_0^T$

$P = \begin{pmatrix} 0.081 & -0.126 & -0.055 \\ -0.126 & 0.27 & 0.088 \\ -0.055 & 0.088 & 0.047 \end{pmatrix}$

$\text{var}(X) = 0.081$
 $\text{var}(Y) = 0.27$
 $\text{var}(Z) = 0.047$

$\text{cvar}(X, Y) = -0.126$
 $\text{cvar}(X, Z) = -0.055$
 $\text{cvar}(Y, Z) = 0.088$

4

$s_m := \sqrt{P_{m,m}}$

$\Sigma := \text{diag}(s)$

$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.284 & 0 & 0 \\ 0 & 0.52 & 0 \\ 0 & 0 & 0.218 \end{pmatrix}$

5

$S := \Sigma^{-1} \cdot P \cdot \Sigma^{-1}$

$S = \begin{pmatrix} 1 & -0.854 & -0.886 \\ -0.854 & 1 & 0.78 \\ -0.886 & 0.78 & 1 \end{pmatrix}$

$\text{corr}(X, Y) = -0.854$
 $\text{corr}(X, Z) = -0.886$
 $\text{corr}(Z, Y) = 0.78$

Рис. 6.10, б. Последовательность вычисления матрицы S_B

Эти данные, в виде ломаных линий, соединяющих выборочные значения, изображены на графике (см. рис. 6.10, *a*).

На рис. 6.10, *б* приведены этапы вычисления матрицы выборочных коэффициентов корреляции S_B с промежуточными проверками правильности вычисленных значений. Проверка проводится в данном примере лишь в целях иллюстрации корректности соотношений (6.46)—(6.50). При проверках использованы встроенные функции **mean**, **var**, **cvar**, **corr** Mathcad для вычисления выборочных средних, дисперсий, корреляционных моментов и коэффициентов корреляции соответственно.

Последовательность этапов отмечена номерами:

1. Вычисление вектора $\bar{X}_B$ (6.46) выборочных средних R .
2. Центрирование выборочных данных, формирование матрицы X_B^0 совокупностью ее столбцов X_{Bi}^0 (6.48). Проверкой одной из строк (первой строки) устанавливается корректность процедуры центрирования: выборочное среднее первой строки X_B^0 равно нулю.
3. Вычисление выборочной ковариационной матрицы P_B (6.49), проверка значений ее элементов альтернативными вычислениями.
4. Вычисление диагональной матрицы Σ_B (6.47).
5. Вычисление матрицы S_B (6.50) и проверка значений ее элементов.

Проверки этапов вычисления S_B подтверждают достоверность результатов, полученных с использованием соотношений (6.46)—(6.50). ■

Модификация рассмотренной задачи, в которой производится полная нормировка случайного вектора, позволяет формировать выборочные данные с заданными числовыми характеристиками (см. прил. 16). Рассмотренные подходы послужили базой для создания соответствующих интерактивных ресурсов (см. <http://mas.exponenta.ru/>, раздел <<Математическая статистика>>).

Следует отметить, что вычисление парных коэффициентов корреляции для элементов случайных векторов посредством преобразований ковариационных матриц весьма полезно и в других задачах анализа, связанных, например, с исследованием реакций динамических систем на случайные воздействия.

Задачи этого класса составляют множество специальных задач, заслуживающих отдельного детального рассмотрения. Здесь эта тема будет лишь слегка затронута.

В *разд. 8.6, ч. I* были даны элементы ковариационного анализа стохастических систем на основе ковариационного уравнения (8.88). Подобный анализ проводится с использованием математических моделей стохастических систем, которые служат основой вычислительного эксперимента, в результате проведения которого накапливаются выборочные данные или (как в *разд. 8.6*) решаются соответствующие уравнения для вторых центральных моментов. В указанном разделе был решен пример (см. рис. 8.8, 8.9), в котором для динамической системы с входным белым шумом проведен анализ динамики изменения дисперсии выходной переменной. Дополним этот пример кратким ана-

лизом характера изменения коэффициентов корреляции элементов вектора состояний (8.76) рассматриваемой в примере системы (см. рис. 6.11)..

На рис. 6.11, а приведен анализ установившегося режима динамической системы, рассмотренной в разд. 8.6.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &:= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.25 & -0.85 & -1.6 \end{pmatrix} & \mathbf{B} &:= \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.01 \\ -0.044 \end{pmatrix} & \mathbf{H} &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 & & & & \mathbf{i} &:= 0..2 \\
 \mathbf{P} &:= \text{identity}(3) & \text{Given} & \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T = 0 & \mathbf{p} &:= \text{Find}(\mathbf{P}) \\
 \mathbf{s}_i &:= \sqrt{\mathbf{p}_i}, i & \mathbf{s}^T &= \begin{pmatrix} 0.1162 & 0.0569 & 0.0313 \end{pmatrix} & \Sigma &:= \text{diag}(\mathbf{s}) \\
 \boxed{\mathbf{S}_B(\infty)} &:= \Sigma^{-1} \cdot \mathbf{p} \cdot \Sigma^{-1} & & & & \\
 \mathbf{S}_B(\infty) &= \begin{pmatrix} 1 & -0.756 & -0.6142 \\ -0.756 & 1 & -0.0281 \\ -0.6142 & -0.0281 & 1 \end{pmatrix} & & & & \begin{aligned} k_{12_{40}} &= -0.7561 \\ k_{13_{40}} &= -0.6141 \\ k_{23_{40}} &= -0.0281 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

Рис. 6.11, а. Анализ установившихся значений коэффициентов корреляции

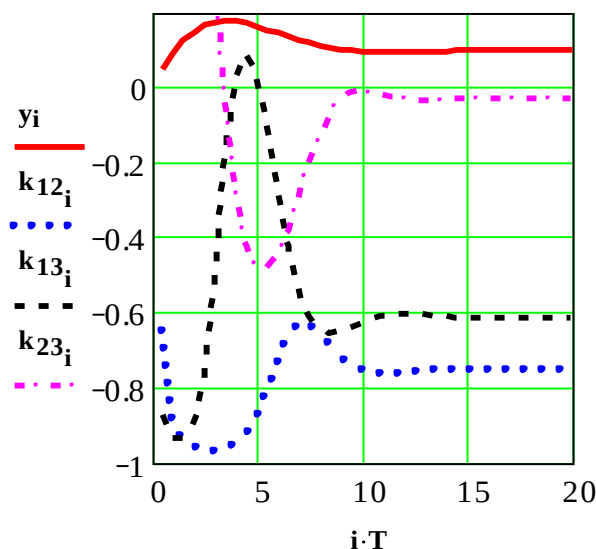


Рис. 6.11, б. Динамика изменения коэффициентов корреляции

Так же, как и на рис. 8.9, для получения установившегося значения ковариационной матрицы из уравнения (8.91), в файле рис. 6.11, а применяется вычислительный блок Mathcad. Диагональные элементы полученной ковариационной матрицы используются для формирования диагональной матрицы Σ_B (6.47), после чего вычисляется матрица коэффициентов корреляции $\mathbf{S}_B$ (6.50). Для сопоставления в правом нижнем углу рис. 6.11, а приведены значения коэффициентов корреляции, полученные посредством численного интегрирова-

ния эквивалентной системы (см. разд. 8.6) дифференциальных уравнений (8.93). Видно, что результаты этих двух способов вычисления установившихся коэффициентов корреляции совпадают с высокой точностью.

Графики процессов изменения коэффициентов корреляции во времени для рассматриваемого примера приведены на рис. 6.11, б (пунктир). Сплошной кривой отмечена дисперсия выходной переменной системы, изображенная ранее (см. рис. 8.8, разд. 8.6, ч. I).

Из приведенных иллюстраций видно, что динамика изменения коэффициентов корреляции соответствует динамике изменения дисперсии. После непродолжительного переходного процесса коэффициенты корреляции достигают значений, которые равны полученным (см. рис. 6.11, а) при анализе установившегося режима значениям. ■

6.6.2. Анализ множественных связей

Рассмотрим задачу множественной линейной регрессии (см. разд. 5.2.4), в которой требуется найти наилучшие в смысле критерия (5.10) оценки параметров регрессионного соотношения, например, следующего вида:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_{m-1} x_{m-1} + \varepsilon = \mathbf{v} \beta + \varepsilon. \quad (6.51)$$

Здесь $\mathbf{v} = [1 \ \mathbf{h}]$ — $(1 \times m)$ -строка; $\mathbf{h} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{m-1}]$ — $[1 \times (m-1)]$ -строка факторов; β — $(m \times 1)$ -вектор параметров.

Пусть факторы имеют нулевое математическое ожидание, а случайная величина ε независима от остальных слагаемых правой части (6.51) и имеет математическое ожидание $M(\varepsilon) = 0$ и дисперсию $M(\varepsilon^2) = \sigma^2$.

В результате решения такой задачи регрессии с использованием подходов, описанных выше (см. разд. 5.2.4), получаем оценку параметров $\hat{\beta}$ и оценку отклика $\hat{y} = \mathbf{v} \hat{\beta}$. Ошибка оценки откликов

$$e_y = y - \hat{y} = y - \mathbf{v} \hat{\beta} \quad (6.52)$$

характеризует качество полученных оценок параметров.

Величину (6.52) рассматривают как остаточную невязку, полученную в результате вычитания из отклика y его наилучшей линейной оценки $\hat{y}$ совокупностью факторов $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$. Дисперсия ошибки оценки e_y , полученная по результатам обработки выборочных данных (решения задачи регрессии) определена выше (см. разд. 5.2.2) как остаточная дисперсии.

В работе [8] остаточная невязка детально исследована на основе введения ковариационной матрицы для m -мерного случайного вектора $\mathbf{z}$, объединяющего отклик y и факторы $\mathbf{h}$. Обозначим эту матрицу через $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{T} = \text{cov}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} t_{11} & \dots & t_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ t_{1m} & \dots & t_{mm} \end{bmatrix}; \mathbf{z} = [y, \mathbf{h}]^T; \mathbf{h} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{m-1}]. \quad (6.53)$$

Пусть этой матрице соответствует матрица коэффициентов корреляции

$$\mathbf{S} = \Sigma^{-1} \mathbf{T} \Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & r_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{1m} & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.54)$$

где Σ — диагональная матрица с элементами $\Sigma_{ii} = \sqrt{t_{ii}}$, $i = \overline{1, m}$; $t_{11} = \sigma_y^2$. Матрица (6.54) включает, таким образом, как коэффициенты корреляции факторов, так и взаимные коэффициенты корреляции отклика и факторов.

В общем случае элементы вектора $\mathbf{z}$ коррелированы, т. е. матрица $\mathbf{S}$ не-диагональная; матрицы $\mathbf{T}$ и $\mathbf{S}$ — положительно определенные, т. е. имеют обратные. Показано [8], что остаточная невязка (6.52) обладает следующими свойствами:

$$e_y = \frac{1}{\mathbf{T}_{11}} \sum_{k=1}^m \mathbf{T}_{1k} x_k; \quad M(e_y) = 0; \quad (6.55)$$

$$M(z_i \cdot e_y) = \frac{1}{\mathbf{T}_{11}} \sum_{k=1}^m t_{ik} \mathbf{T}_{1k} = \begin{cases} |\mathbf{T}| / \mathbf{T}_{11}; & i=1, \\ 0; & i=2, 3, \dots, m. \end{cases} \quad (6.56)$$

Из (6.56), в частности, следует, что остаточная дисперсия

$$M(y \cdot e_y) = M[(e_y)^2] = D(e_y) = |\mathbf{T}| / \mathbf{T}_{11} = \sigma_y^2 |\mathbf{S}| / \mathbf{S}_{11}. \quad (6.57)$$

В формулах (6.55)—(6.57): $|\mathbf{T}|$, $|\mathbf{S}|$ — определители матриц $\mathbf{T}$ (6.53) и $\mathbf{S}$ (6.54); подстрочными индексами символов $\mathbf{T}$ и $\mathbf{S}$ обозначены алгебраические дополнения соответствующих элементов матриц, например, $\mathbf{T}_{11}$ — алгебраическое дополнение элемента t_{11} в матрице $\mathbf{T}$ (6.53); $\sigma_y^2 = t_{11} = D(y)$ — дисперсия отклика y . Свойство (6.56) отражает факт некоррелированности ошибок оценки и самих оценок (а также их линейных форм); в нашем случае это означает, что $M(\hat{y} \cdot e_y) = 0$ или

$$M(y \cdot e_y) = M[(\hat{y} + e_y) \cdot e_y] = M[(e_y)^2] = D(e_y); \quad M(\hat{y} \cdot e_y) = 0. \quad (6.58)$$

6.6.3. Сводный коэффициент корреляции

При анализе задач множественной регрессии возникает вопрос о влиянии всей совокупности факторов на отклик. В силу (6.51), (6.52) оценка $\hat{y}$ будет коррелирована с откликом y . Мерой корреляции при этом служит обычный (парный) коэффициент корреляции y и $\hat{y}$. Этот коэффициент носит название **сводного коэффициента корреляции**. Учитывая (6.52), он будет характеризовать связь отклика y со всеми факторами, входящими в строку $\mathbf{h}$. В этом смысле можно говорить о расширении понятия коэффициента корреляции, характеризующего связь двух случайных величин, случай анализа взаимного влияния скалярного отклика и вектора факторов.

Учитывая равенство нулю математических ожиданий откликов и его оценок, сводный коэффициент корреляции, согласно (6.1), выражается как

$$R_S = \frac{M(y \cdot \hat{y})}{\sqrt{D(y)D(\hat{y})}}, \quad (6.59)$$

где $D(y)$, $D(\hat{y})$ — дисперсии отклика y и его оценки.

Используя выражения (6.55)—(6.57), запишем соотношения для числителя и знаменателя (6.58) в терминах элементов матриц $\mathbf{T}$ и $\mathbf{S}$:

$$\begin{aligned} M(y \hat{y}) &= D(y) - M(y e_y) = t_{11} - (|\mathbf{T}| / \mathbf{T}_{11}); \\ D(\hat{y}) &= M[(y - e_y)^2] = D(y) - 2 M(y e_y) + D(e_y) = t_{11} - (|\mathbf{T}| / \mathbf{T}_{11}). \end{aligned} \quad (6.60)$$

Отсюда, сводный коэффициент корреляции примет вид:

$$R_S = \sqrt{1 - \frac{|\mathbf{T}|}{t_{11} \mathbf{T}_{11}}} = \sqrt{1 - \frac{|\mathbf{S}|}{\mathbf{S}_{11}}}. \quad (6.61)$$

Квадрат R_S называют **коэффициентом детерминации**.

Поскольку для произвольной положительно определенной $(m \times m)$ -матрицы $\mathbf{A}$ справедливо неравенство вида $0 < |\mathbf{A}| \leq a_{ii} \mathbf{A}_{ii}$, где $\mathbf{A}_{ii}$ — алгебраическое дополнение элемента a_{ii} матрицы $\mathbf{A}$, сводный коэффициент корреляции $0 \leq R_S \leq 1$. Случай $R_S = 1$ означает, что отклик y имеет функциональную связь с совокупностью факторов $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$. При $R_S = 0$ имеет место вариант, когда отклик некоррелирован ни с одним из факторов, т. е. когда парные коэффициенты корреляции элементов y и x_j ($j = \overline{1, m-1}$) равны нулю, а матрица $\mathbf{S}$ (6.54) — диагональная.

Анализируя соотношение (6.61) для сводного коэффициента корреляции, нельзя не заметить сходство его структуры со структурой соотношений для парных коэффициентов корреляции (6.8), (6.7) и корреляционного отношения (6.32). Это сходство имеет и сущностную основу.

Действительно, в разд. 6.1 был проведен анализ дисперсии отклика для случая однофакторной линейной регрессии; в результате получено соотношение (6.7), связывающее дисперсию отклика, дисперсию оценки отклика и условную дисперсию: $\sigma_y^2 = D(\hat{y}) + \sigma_{y/h}^2$. Это выражение опиралось на доказанную некоррелированность оценки отклика и ошибки оценки отклика; аналогичный вывод (6.58) сделан для рассматриваемого случая на основе свойств (6.55)—(6.57). Этот вывод служит обобщением формулы (6.7) на случай множественной регрессии.

Таким образом, для (6.51), с учетом (6.52), (2.58) получаем:

$$y = \hat{y} + e_y; \quad \sigma_y^2 = D(y) = D(\hat{y}) + \sigma_{y/h}^2 = D(\hat{y}) + D(e_y), \quad (6.62)$$

где $\sigma_{y/h}^2$ — условная дисперсия отклика y при условии, что реализована совокупность факторов $\mathbf{h} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{m-1}]$.

Условная дисперсия $\sigma_{y/h}^2 = D(e_y)$, выражение для оценки которой соответствует (6.57). Это позволяет на основе (6.62) представить сводный коэффициент корреляции (6.61) в форме, аналогичной (6.32):

$$R_S = \sqrt{1 - \sigma_{y/h}^2 / \sigma_y^2} = \sqrt{D(\hat{y}) / \sigma_y^2} = \sigma_{\hat{y}} / \sigma_y. \quad (6.63)$$

Формулы (6.59), (6.63) служат основой для оценки сводного коэффициента корреляции по данным наблюдений.

6.6.4. Выборочный сводный коэффициент корреляции

Точечная оценка сводного коэффициента корреляции носит название **выборочного сводного коэффициента корреляции**, который далее будет обозначаться, как $\hat{R}_S$.

Значение $\hat{R}_S$ может быть получено путем непосредственного использования выражения (6.61). При этом используются все данные наблюдений — значения факторов и откликов, связанных соотношением (6.51), или парные коэффициенты корреляции элементов вектора $\mathbf{z}$ (6.53). Этот способ вычисления $\hat{R}_S$ не требует решения задачи множественной регрессии, однако не обладает важным свойством наглядности получаемых решений.

Значительно более простым подходом, лишенным отмеченного недостатка, служит подход к оценке сводного коэффициента корреляции, основанный на непосредственном использовании соотношений (6.59), (6.63). Этот подход предполагает, что процесс статистического исследования влияния совокупности факторов на отклик обычно сопровождается решением задачи множественной регрессии (см. разд. 5.2.4), в процессе которого в распоряжении исследователя имеется статистический материал для получения $\hat{R}_S$ по формулам (6.59), (6.63).

Значение $\hat{R}_S$ получают путем замены в выражениях для R_S (6.59), (6.63) теоретических числовых характеристик на соответствующие выборочные значения аналогично тому, как это делалось в разд. 6.2. В качестве исходных данных и результатов этой задачи выступают векторы $\mathbf{Y}$ (значения откликов), $\hat{\mathbf{Y}}$ (значения оценок откликов), вектор $\mathbf{e}_y = \hat{\mathbf{Y}} - \mathbf{Y}$ ошибок оценок откликов, остаточную сумму квадратов S (5.36). Преобразованиями этих данных можно получить выборочную дисперсию отклика σ_{yB}^2 , выборочную дисперсию оценок отклика $D_B(\hat{y})$, остаточную дисперсию $d_h = S / n$ (6.21) как оценку условной дисперсии $\sigma_{y/x}^2$. Тогда точечная оценка $\hat{R}_S$, на основе (6.59) и (6.63), может быть получена по следующим выражениям

$$\hat{R}_S = \frac{\sum_i \hat{y}_i^0 y_i^0}{\left[\sqrt{\sum_i (\hat{y}_i^0)^2} \sqrt{\sum_i (y_i^0)^2} \right]} = \frac{K_{y\hat{y}B}}{\sqrt{\sigma_{yB}^2} \sqrt{D_B(\hat{y})}}, \quad (6.64)$$

где $K_{y\hat{y}B}$ — выборочный корреляционный момент отклика и его оценки (точечная оценка K_{xy}); $\hat{y}_i^0, y_i^0$ — элементы центрированных векторов $\hat{\mathbf{Y}}$ и $\mathbf{Y}$;

$$\hat{R}_S = \sqrt{1 - d_{\mathbf{h}} / \sigma_{yB}^2}. \quad (6.65)$$

Структуры выражений (6.64) и (6.65) аналогичны структурам соотношений для выборочного коэффициента корреляции (6.12) и выборочного корреляционного отношения (6.38).

Пример 6.7. В условиях примера 5.2 (см. рис. 5.3) получить точечную оценку выборочного сводного коэффициента корреляции с применением формул (6.64), (6.65).

□ Решение. Результаты решения приведены на рис. 6.12.

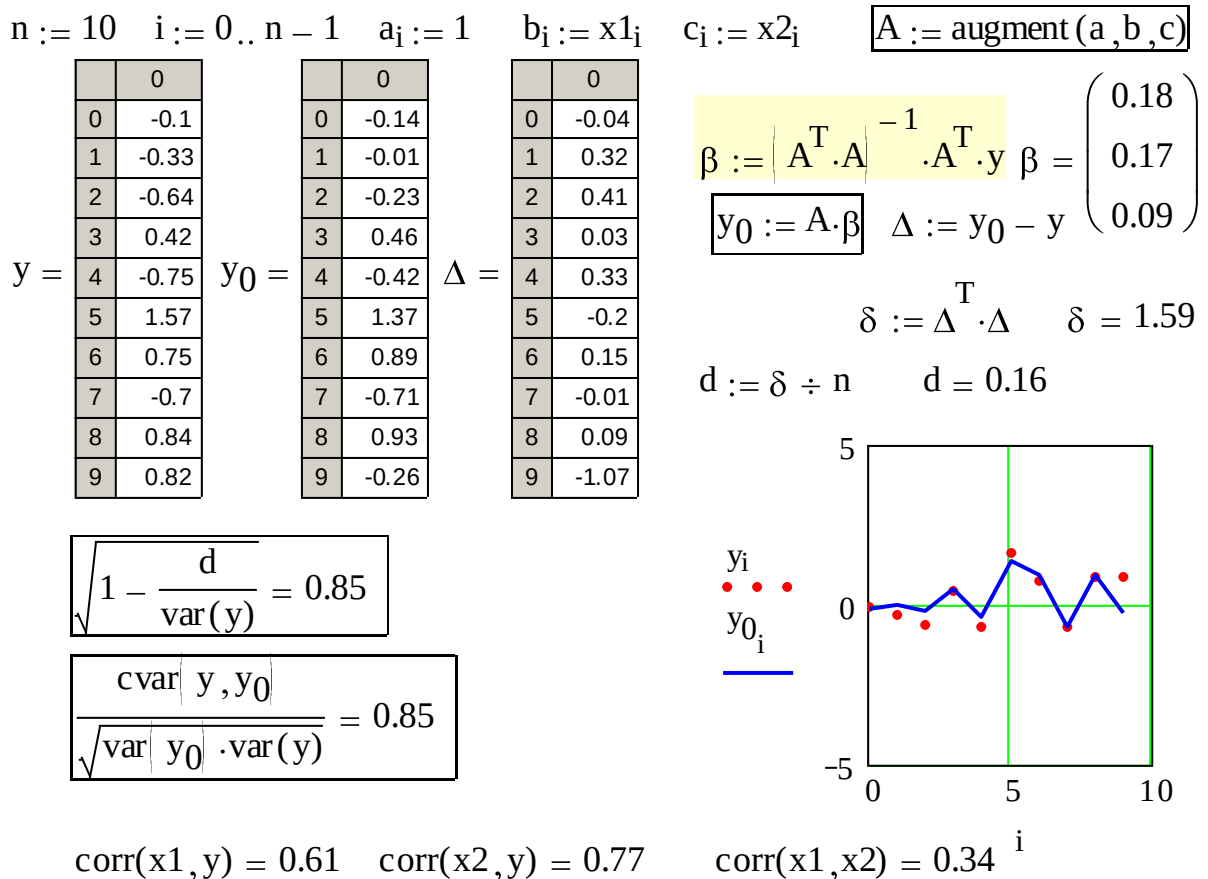


Рис. 6.12. Вычисление оценки сводного коэффициента корреляции

Необходимые пояснения по поводу особенностей решения рассматриваемой в примере 5.2 задачи множественной регрессии и использованных обозначений в файле были даны ранее при обсуждении рис. 5.3, поэтому процедура вычислений, представленных на рис. 6.12, оставлена без комментариев.

Использование встроенных функций Mathcad **cvar** и **var** для вычисления выборочных корреляционных моментов и выборочных дисперсий предельно упрощает решение подобных задач. Вычисленные значения $\hat{R}_S$ с использова-

нием выражений (6.64) и (6.65), которые отмечены рамками, конечно, совпадают. В нижней части рис. 6.12 вычислены и парные коэффициенты корреляции, значения которых свидетельствуют о весьма слабой связи между факторами ($r_{x_1x_2} = 0.34$) и заметной взаимосвязи между откликом и каждым фактором ($r_{yx_1} = 0.61$, $r_{yx_2} = 0.77$). Полученное в данном примере значение оценки сводного коэффициента корреляции $\hat{R}_S = 0.85$ свидетельствует о явной линейной связи между результатами стрельбы и двумя факторами — силой ветра и степенью усталости спортсмена. Преобладающее влияние на точность попадания в данном случае имеет физическое состояние спортсмена. ■

Оценкой сводного коэффициента корреляции не ограничивается анализ множественных связей в ситуациях, когда отклик зависит от нескольких факторов. Интерес представляет также исследование влияния группы случайных величин на другие представители многомерного распределения, что составляет сущность задач анализа частных корреляционных связей.

6.6.5. Частная корреляция

Концепция анализа остаточных невязок (6.52) множественной регрессии, примененная в предыдущем разделе, позволяет рассмотреть корреляцию случайных величин, каждая из которых связана с одной и той же группой других случайных величин. Применительно к соотношению (6.51) это означает, например, анализ корреляционной связи между случайными величинами y и x_1 при условии, что на каждую из них оказывает влияние совокупность остальных случайных величин, т. е. $(x_2, x_3, \dots, x_{m-1})$.

Это влияние можно определить, решая две задачи множественной регрессии: получение линейной оценки $\hat{y}_{2,..m-1}$ отклика y при наличии факторов $(x_2, x_3, \dots, x_{m-1})$ и получение линейной оценки $\hat{x}_{1\circ 2,..m-1}$ случайной величины x_1 при той же совокупности факторов.

По результатам решения этих двух задач получаем две остаточных невязки

$$y - \hat{y}_{2,..m-1} = e_{0\circ 2}; \quad x_1 - \hat{x}_{1\circ 2,..m-1} = e_{1\circ 2}. \quad (6.66)$$

Невязки $e_{0\circ 2}$ и $e_{1\circ 2}$ имеют подстрочные индексы, соответствующие номерам элементов в m -мерном случайном векторе $\mathbf{z}$ (6.53), объединяющем отклик и факторы (6.51):

$$\mathbf{z} = [y \ x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{m-1}]^T = [z_0 \ z_1 \ z_2 \ \dots \ z_{m-1}]^T. \quad (6.67)$$

Вектор $\mathbf{z}$ (6.67) имеет ковариационную матрицу $\mathbf{T}$ (6.53) и матрицу коэффициентов корреляции $\mathbf{S}$ (6.54).

Для рассматриваемого варианта анализа связи y и x_1 **частным коэффициентом корреляции** называется парный коэффициент корреляции случайных величин $e_{0\circ 2}$ и $e_{1\circ 2}$:

$$R_{01 \circ 2 \dots m-1} = R_{01 \circ 2} = \frac{M(e_{0 \circ 2} \cdot e_{1 \circ 2})}{\sqrt{D(e_{0 \circ 2})D(e_{1 \circ 2})}}. \quad (6.68)$$

В силу того, что выражение (6.68) соответствует обычному коэффициенту корреляции между двумя случайными величинами, величина $|R_{01 \circ 2}| \leq 1$.

Используя выражение (6.55) остаточной невязки (ошибки оценки отклика) для рассматриваемого случая задач регрессии с $(m - 1)$ параметрами, выразим знаменатель (6.68) в терминах элементов матриц $\mathbf{T}$ аналогично (6.57) [8]:

$$\begin{aligned} D(e_{0 \circ 2}) &= M[(e_{1 \circ 2})^2] = M(y \cdot e_{0 \circ 2}) = \mathbf{T}_{22} / \mathbf{T}_{11 \circ 22}; \\ D(e_{1 \circ 2}) &= M[(e_{1 \circ 2})^2] = M(x_1 \cdot e_{1 \circ 2}) = \mathbf{T}_{11} / \mathbf{T}_{11 \circ 22}. \end{aligned} \quad (6.69)$$

Здесь $\mathbf{T}_{11 \circ 22}$ — алгебраическое дополнение элемента t_{22} в матрице, полученной вычеркиванием из $\mathbf{T}$ (6.53) первой строки и первого столбца.

Согласно свойству (6.56) остаточных невязок, ошибки оценки некоррелированы с переменными, участвующими в выражениях для этих оценок. Поэтому для числителя (6.68) можно записать:

$$M(e_{0 \circ 2} \cdot e_{1 \circ 2}) = M(y \cdot e_{1 \circ 2}) = - \mathbf{T}_{12} / \mathbf{T}_{11 \circ 22}. \quad (6.70)$$

Подставляя (6.69) и (6.70) в выражение для частного коэффициента корреляции, окончательно получаем:

$$R_{01 \circ 2} = - \mathbf{T}_{12} / \sqrt{\mathbf{T}_{11} \mathbf{T}_{22}} = - \mathbf{S}_{12} / \sqrt{\mathbf{S}_{11} \mathbf{S}_{22}}, \quad (6.71)$$

где $\mathbf{S}_{11}$, $\mathbf{S}_{12}$, $\mathbf{S}_{22}$ — соответствующие алгебраические дополнения матрицы $\mathbf{S}$.

Так, в случае $m = 3$, вектор $\mathbf{z}$ (6.53)

$$\mathbf{z} = [y, \mathbf{h}]^T = [y \ x_1 \ x_2]^T \quad (6.72)$$

имеет матрицу коэффициентов корреляции (6.54) вида:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ r_{12} & 1 & r_{23} \\ r_{13} & r_{23} & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{S}_{12} = - (r_{12} - r_{13} r_{23}); \quad \mathbf{S}_{11} = (1 - r_{23}^2); \quad \mathbf{S}_{22} = (1 - r_{13}^2),$$

откуда частный коэффициент корреляции (6.71) будет равен:

$$R_{01 \circ 2} = (r_{12} - r_{13} r_{23}) / \sqrt{(1 - r_{23}^2)(1 - r_{13}^2)}. \quad (6.73)$$

Приводя индексацию элементов $\mathbf{z}$ (6.72) в соответствие с индексацией факторов, т. е. вводя $\mathbf{z} = [z_0 \ z_1 \ z_2]^T = [y \ x_1 \ x_2]^T$, получим

$$R_{01 \circ 2} = R_{y x_1 \circ x_2} = (r_{01} - r_{02} r_{12}) / \sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{02}^2)}. \quad (6.74)$$

В правой части (6.74) участвуют парные коэффициенты корреляции между элементами вектора $\mathbf{z}$; например, r_{01} — коэффициент корреляции отклика y и фактора x_1 .

Перестановкой индексов в выражениях (6.68)—(6.74) можно получить выражения для частных коэффициентов корреляции любых двух случайных величин в составе вектора $\mathbf{z}$ (6.53) относительно остающихся $(m - 2)$ его составляющих. Продолжим анализ частной связи y и x_1 .

Представляет интерес проанализировать соотношения между парными коэффициентами корреляции и $R_{01\circ 2}$ на примере (6.74). Из этого выражения можно видеть, что значение r_{01} в общем случае отличается от значения $R_{01\circ 2}$. Коэффициенты $R_{01\circ 2}$ и r_{01} могут иметь разные знаки; при $r_{01} = 0$ коэффициент $R_{01\circ 2}$ может отличаться от нуля. Если же все элементы вектора $\mathbf{z}$ — некоррелированные, матрица $\mathbf{S}$ — диагональная, и $R_{01\circ 2} = 0$.

Более того, при $|R_{01\circ 2}| < |r_{01}|$ можно предполагать, что взаимосвязь y и x_1 в большей мере объясняется влиянием x_2 . Если же $r_{01} = 0$, а $R_{01\circ 2} \neq 0$, то связь между y и x_1 всецело определяется влиянием x_2 . Это влияние может как усиливать ($|R_{01\circ 2}| > |r_{01}|$), так и ослаблять ($|R_{01\circ 2}| < |r_{01}|$) связь между y и x_1 . При отсутствии взаимосвязи первого и второго элемента вектора с третьим элементом ($r_{02} = r_{12} = 0$), частный коэффициент корреляции совпадает с парным: $R_{01\circ 2} = r_{01}$. Если $r_{12} = 0$ или $r_{02} = 0$, то $|R_{01\circ 2}| > |r_{01}|$; при этом превышение $|R_{01\circ 2}|$ над $|r_{01}|$ тем больше, чем больше значения принимают $|r_{02}|$ или $|r_{12}|$ соответственно.

Можно показать, что частные коэффициенты корреляции — числовые характеристики условных распределений двумерного вектора $[y \ x_1]^T$ при фиксированных остальных составляющих вектора $\mathbf{z}$. Это позволяет называть $R_{01\circ 2}$ (6.71) **условными коэффициентами корреляции**.

Действительно, исходная постановка задачи анализа частной корреляции y и x_1 опиралась на условие фиксации совокупностей влияющих величин ($x_2, x_3, \dots, x_{m-1}$) и, следовательно, фактически предполагала определение одной из числовых характеристик условного двумерного распределения y и x_1 . Подобная интерпретация задач частного корреляционного анализа позволяет несколько иначе подойти к получению выражений для частных коэффициентов корреляции и пониманию их сущности. Основная идея такого подхода состоит в формировании двумерной условной ковариационной матрицы для части (y, x_1) случайного вектора $\mathbf{z}$ (6.53).

Проиллюстрируем подход анализом трехмерного вектора (6.72)

$$\mathbf{z} = [z_0 \ z_1 \ z_2]^T = [y \ x_1 \ x_2]^T. \quad (6.75)$$

Пусть вектор $\mathbf{z}$ (6.75) имеет нормальное распределение и предварительно нормирован с применением (6.43), (6.44), т. е. $\mathbf{z} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{S})$, где $\mathbf{S}$ — неособенная матрица коэффициентов корреляции

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & r_{01} & r_{02} \\ r_{01} & 1 & r_{12} \\ r_{02} & r_{12} & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.76)$$

Трехмерная плотность распределения вектора $\mathbf{z}$, в силу (7.107), равна:

$$f(z_0 \ z_1 \ z_2) = (2 \pi)^{-3/2} |\mathbf{S}|^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{z}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{z})\right] = C \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{z}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{z})\right]. \quad (6.77)$$

Запишем одномерную плотность $f(z_2)$ составляющей z_2 вектора 6.75) и условную плотность распределения первых двух составляющих вектора $\mathbf{z}$ при фиксированной третьей его составляющей $f(z_0 \ z_1 \mid z_2) = f(z_0 \ z_1 \ z_2) / f(z_2)$:

$$f(z_2) = (2 \pi)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2} z_2^2\right] = C_3 \exp\left[-\frac{1}{2} z_2^2\right];$$

$$f(z_0 \ z_1 \mid z_2) = C_2 \exp\left[-\frac{1}{2} (\mathbf{z}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{z} - z_2^2)\right] = C_2 \exp\left[-\frac{1}{2} (\mathbf{z}^T \mathbf{Q} \mathbf{z})\right]. \quad (6.78)$$

Известно [8], что условные распределения элементов (и групп элементов) нормально распределенного случайного вектора также принадлежат нормальному распределению. В разд. 7.8, ч. I это утверждение было иллюстрировано анализом совместного двумерного нормального распределения (см. выражения (7.113), (7.114)). Поэтому (6.78) — плотность нормального распределения. Однако распределение вектора $\mathbf{z}$ в форме (6.78) относится к несобственным распределениям [8], поскольку (3×3) -матрица $\mathbf{Q} = (\mathbf{z}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{z} - z_2^2)$ квадратичной формы — вырожденная (имеет ранг, равный 2). В данном случае трехмерное несобственное нормальное распределение с совместной плотностью (6.78) соответствует двумерному собственному нормальному распределению вектора $(z_0 \ z_1)^T$ при фиксированной составляющей z_2 . Матрица $\mathbf{Q}_2$, равная обратной ковариационной матрице этого двумерного распределения, размещена в верхнем диагональном (2×2) -блоке матрицы $\mathbf{Q} = (\mathbf{z}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{z} - z_2^2)$.

Полученное двумерное распределение является условным, поэтому

$$\mathbf{P}_2 = (\mathbf{Q}_2)^{-1} \quad (6.79)$$

— **условная ковариационная матрица** вектора $(z_0 \ z_1)^T$ при фиксированной составляющей z_2 ; из элементов матрицы $\mathbf{P}_2$ можно получить частный коэффициент корреляции $R_{01 \circ 2}$ (6.71).

Проиллюстрируем справедливость сделанных выводов, выполняя преобразования (6.77)—(6.79) для трехмерного случайного вектора (6.75) в среде Mathcad, применение которой здесь существенно упростило громоздкие промежуточные выкладки и облегчило получение конечного результата (рис. 6.13).

□ Ввиду сложности аналитических выражений этапы преобразований иллюстрируются на рис. 6.13 последовательностью mcd-фрагментов, которые служат частями единого файла. Некоторые промежуточные результаты выходят за пределы формата листа и приводятся отдельно.

На первом этапе (см. рис. 6.13, а), после введения исходных данных (вектора $\mathbf{z}$, матрицы $\mathbf{S}$ и ее обратной матрицы $\mathbf{Q}_3$), формируется выражение для показателя степени экспоненты несобственного распределения (6.78) $\mathbf{z}^T \mathbf{Q} \mathbf{z} = (\mathbf{z}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{z} - z_2^2)$. Это выражение, обозначенное на рис. 6.13, а как V_3 , получено символьным оператором $V_3 \text{ simplify} \rightarrow$ и выведено отдельно (см. первую рамку на рис. 6.13, а). Ниже получены $|\mathbf{S}| \mathbf{S}^{-1}$ — присоединенная матрица к матрице $\mathbf{S}$ и определитель $|\mathbf{S}|$ (см. вторую рамку на рис. 6.13, а).

$$\begin{aligned}
\mathbf{z} &:= \begin{bmatrix} z_0 & z_1 & z_2 \end{bmatrix}^T & \mathbf{S} &:= \begin{pmatrix} 1 & r_{01} & r_{02} \\ r_{01} & 1 & r_{12} \\ r_{02} & r_{12} & 1 \end{pmatrix} & \mathbf{Q}_3 &:= \begin{pmatrix} g_0 & g_{01} & g_{02} \\ g_{01} & g_1 & g_{12} \\ g_{02} & g_{12} & g_2 \end{pmatrix} \\
\mathbf{f} &:= \mathbf{C} \cdot \exp \left[\frac{-1}{2} \cdot (\mathbf{z}^T \cdot \mathbf{Q}_3 \mathbf{z}) \right] & \mathbf{f}_2 &:= \mathbf{C}_2 \cdot \exp \left(\frac{-z_2^2}{2} \right) & \mathbf{V}_3 &:= \mathbf{z}^T \cdot \mathbf{Q}_3 \mathbf{z} - z_2^2 \\
\boxed{z_0^2 \cdot g_0 + 2 \cdot z_0 \cdot z_1 \cdot g_{01} + 2 \cdot z_0 \cdot z_2 \cdot g_{02} + z_1^2 \cdot g_1 + 2 \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot g_{12} + z_2^2 \cdot g_2 - z_2^2} & & & & \boxed{\mathbf{V}_3} \\
|\mathbf{S}| \cdot \mathbf{S}^{-1} \text{ simplify} & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 - r_{12}^2 & -r_{01} + r_{02} \cdot r_{12} & r_{01} \cdot r_{12} - r_{02} \\ -r_{01} + r_{02} \cdot r_{12} & 1 - r_{02}^2 & -r_{12} + r_{01} \cdot r_{02} \\ r_{01} \cdot r_{12} - r_{02} & -r_{12} + r_{01} \cdot r_{02} & 1 - r_{01}^2 \end{pmatrix} \\
\boxed{|\mathbf{S}| \rightarrow 1 - r_{12}^2 - r_{01}^2 + 2 \cdot r_{01} \cdot r_{02} \cdot r_{12} - r_{02}^2} & & & &
\end{aligned}$$

Рис. 6.13, а. Первый этап преобразований

Из соотношения для V_3 следует, что матрица $\mathbf{Q}$ отличается от $\mathbf{S}^{-1}$ лишь последним диагональным элементом. Этот элемент может быть найден из суммы двух слагаемых $z_2^2(q_2 - 1)$, где q_2 — последний диагональный элемент матрицы $\mathbf{S}^{-1}$, равный, как следует из рис. 6.13, а, $q_2 = (1 - r_{01}^2) / |\mathbf{S}|$.

$$\begin{aligned}
|\mathbf{S}| \cdot \left[\left[\mathbf{S}^{-1} \right]_{2,2} - 1 \right] \text{ simplify} & \rightarrow r_{12}^2 - 2 \cdot r_{01} \cdot r_{02} \cdot r_{12} + r_{02}^2 \\
\mathbf{Q} &:= \frac{1}{|\mathbf{S}|} \cdot \begin{pmatrix} 1 - r_{12}^2 & -r_{01} + r_{02} \cdot r_{12} & r_{01} \cdot r_{12} - r_{02} \\ -r_{01} + r_{02} \cdot r_{12} & 1 - r_{02}^2 & -r_{12} + r_{01} \cdot r_{02} \\ r_{01} \cdot r_{12} - r_{02} & -r_{12} + r_{01} \cdot r_{02} & r_{12}^2 - 2 \cdot r_{01} \cdot r_{02} \cdot r_{12} + r_{02}^2 \end{pmatrix} \quad |\mathbf{Q}| \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Рис. 6.13, б. Получение матрицы $\mathbf{Q}$ выражения (6.78)

Во фрагменте, представленном на рис. 6.13, б, определяется числитель последнего диагонального элемента матрицы $\mathbf{Q}$ и производится формирование матрицы $\mathbf{Q}$. С этой целью последний диагональный элемент матрицы $\mathbf{S}^{-1}$ замещается элементом $(r_{12}^2 - 2r_{01} r_{02} r_{12} + r_{02}^2) / |\mathbf{S}|$, полученным ранее. Вычисляя определитель матрицы $\mathbf{Q}$, убеждаемся в вырожденности этой матрицы. Этим подтверждается сделанный ранее вывод, что трехмерное распределение с обратной ковариационной матрицей $\mathbf{Q}$ — несобственное.

На рис. 6.13, в представлен завершающий этап преобразований: выделение верхнего диагонального блока матрицы $\mathbf{Q}_2$ и вычисление условной ковариационной матрицы $\mathbf{P}_2$ (6.79).

Из структуры полученной матрицы $\mathbf{P}_2$ (см. рис. 6.13, в) следует, что коэффициент корреляции равен $(r_{01} - r_{02} r_{12}) / \sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{02}^2)}$, что полностью совпадает с выражением (6.74) для частного коэффициента корреляции. Приведенный пример подтверждает справедливость утверждения, что частный коэффициент корреляции $R_{01 \cdot 2}$ можно получить из условной ковариационной матрицы вида (6.79).

$$\mathbf{Q}_2 := \text{submatrix}(\mathbf{Q}, 0, 1, 0, 1)$$

$$\mathbf{P}_2 := \mathbf{Q}_2^{-1}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{S}| \cdot \mathbf{Q}_2 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 - r_{12}^2 & -r_{01} + r_{02} \cdot r_{12} \\ -r_{01} + r_{02} \cdot r_{12} & 1 - r_{02}^2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{P}_2 \text{ simplify} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 - r_{02}^2 & r_{01} - r_{02} \cdot r_{12} \\ r_{01} - r_{02} \cdot r_{12} & 1 - r_{12}^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Рис. 6.13, в. Получение условной ковариационной матрицы $\mathbf{P}_2$ (6.79)

Отметим, что общее соотношение (6.71) для $R_{01 \cdot 2}$ получено без наложения условий на вид распределения вектора $\mathbf{z}$, т. е. определение $R_{01 \cdot 2}$ (6.68) в форме (6.71) справедливо для произвольного распределения исходного вектора. ■

Выражения (6.68) и (6.71) служат основой процедур определения частных коэффициентов корреляции по данным наблюдений.

6.6.6. Выборочный частный коэффициент корреляции

Продолжая анализ частной связи y и x_1 , остановимся на подходах, которые можно использовать для вычисления соответствующих оценок.

Выборочным частным коэффициентом корреляции $\hat{R}_{01 \cdot 2}$ называют точечную оценку частного коэффициента корреляции $R_{01 \cdot 2}$ (6.68), полученную с использованием данных наблюдений. Значение $\hat{R}_{01 \cdot 2}$ может быть определено на основе замены теоретических параметров в (6.68) и (6.71) соответствующими выборочными значениями. Применение формул вида (6.68) требует предварительного решения задач множественной регрессии. При использовании выражения (6.71) для получения $\hat{R}_{01 \cdot 2}$ потребуется вычисление выборочных ковариационных матриц или выборочных матриц коэффициентов корреляции

(6.49) с последующим вычислением их миноров. Распространение получил способ определения $\hat{R}_{01\cdot 2}$ на основе (6.71), использующий в качестве исходных данных выборочные парные коэффициенты корреляции и не требующий предварительного решения задач регрессии. Этим путем, как следует из выражений (6.73), весьма просто найти значение $\hat{R}_{01\cdot 2}$ для трехмерного случайного вектора $\mathbf{z}$ (6.72)

$$\hat{R}_{01\cdot 2} = (\hat{r}_{01} - \hat{r}_{02} \hat{r}_{12}) / \sqrt{(1 - \hat{r}_{12}^2)(1 - \hat{r}_{02}^2)}, \quad (6.80)$$

который соответствует задаче регрессии с одним откликом и двумя факторами. Однако, при увеличении числа факторов, выражение для частного коэффициента корреляции значительно усложняется. Для этих случаев получены рекуррентные формулы [8], последовательно использующие частные коэффициенты корреляции, которые определены на предыдущих шагах. Этот довольно громоздкий способ вычислений предлагает исследователям возможность получения оценок $\hat{R}_{01\cdot 2}$ без решения задач регрессии. Следует признать, что получение выборочных матриц коэффициентов корреляции, вычисление отдельных парных коэффициентов корреляции и последовательности выборочных частных коэффициентов корреляции связано с выполнением больших объемов вычислений, которые сопоставимы с объемами вычислений (а чаще и превышают их), потребными для решения задачи регрессии. Кроме того, путь вычисления $\hat{R}_{01\cdot 2}$ на основе (6.71) имеет оттенок формализма, не требующий от исследователя в процессе определения $\hat{R}_{01\cdot 2}$ размышлений о математической сущности решаемой практической задачи.

Другой подход, применение которого для получения $\hat{R}_{01\cdot 2}$ в современных условиях развитых систем компьютерной математики не вызывает затруднений, основан на непосредственном применении формулы (6.68). Он предполагает необходимость предварительного решения двух задач множественной регрессии. Эти задачи решаются для одной и той же совокупности факторов $(x_2, x_3, \dots, x_{m-1})$. В первой задаче в качестве отклика выступает первая составляющая (y) вектора $\mathbf{z}$ (6.67), во второй откликом служит вторая составляющая (x_1) вектора $\mathbf{z}$. По результатам решения этих двух задач получаем выборочные значения остаточных невязок $e_{0\cdot 2}$ и $e_{1\cdot 2}$ (6.66), в качестве которых выступают соответствующие векторы ошибок оценки откликов (5.18) (остаточных невязок $\mathbf{e}_y = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}$ и $\mathbf{e}_{x1} = \mathbf{X}_1 - \hat{\mathbf{X}}_1$). Определяя выборочный корреляционный момент K_{Byx1} для векторов $\mathbf{e}_y$ и $\mathbf{e}_{x1}$ по формуле, аналогичной (6.13), и выборочные дисперсии $D_B(\mathbf{e}_y)$ и $D_B(\mathbf{e}_{x1})$, получим оценку $R_{01\cdot 2}$ (6.68) в виде

$$\hat{R}_{01\cdot 2} = \frac{K_{Byx1}}{\sqrt{D_B(\mathbf{e}_y) D_B(\mathbf{e}_{x1})}}. \quad (6.81)$$

Применение формул вида (6.81) в среде Mathcad предельно упрощается наличием встроенной функции **cvar** для вычисления выборочного корреляционного момента и функции **var** для вычисления выборочных дисперсий.

Вычисление оценок частных коэффициентов корреляции путем решения соответствующих задач регрессии имеет еще одно преимущество, связанное с возможностью анализа качества частных задач регрессии при исключении отдельных факторов. Этот анализ основан на сопоставлении остаточных дисперсий, получаемых по результатам решения вариантов задач.

Оценка частных коэффициентов корреляции любых двух случайных величин в составе вектора **z** (6.53) относительно остающихся $(m - 2)$ его составляющих может быть получена аналогично перестановкой индексов в выражениях типа (6.80), (6.81).

Пример 6.8. В условиях примера 5.2 (разд. 5.2.4, рис. 5.3) получить точечные оценки выборочных частных коэффициентов корреляции, используя в качестве основы выражения (6.68) и (6.71).

□ Решение. В примерах 5.2 (см. рис. 5.3) и 6.7 (см. рис. 6.12) достаточно подробно описаны элементы решения задачи и использованные обозначения. Поэтому при решении данного примера ограничимся лишь краткими пояснениями.

В данном примере имеют место два частных коэффициента корреляции:

- $R_{01\cdot 2}$, характеризующий связь между откликом (y) и первым фактором (x_1) в условиях, когда исключаются изменения, вызванные влиянием второго фактора (x_2);

- $R_{02\cdot 1}$, характеризующий связь между откликом (y) и вторым фактором (x_2) в условиях, когда исключаются изменения, вызванные влиянием первого фактора (x_1).

На рис. 6.14, а представлены результаты решения двух задач регрессии и вычислений $R_{01\cdot 2}$ по формуле (6.81), полученной на основе (6.68). Значения факторов, как и ранее, составляют векторы **b** и **c**, значения откликов — вектор **y**. Исходная задача множественной регрессии решалась для регрессионного соотношения вида (5.51)

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Для определения значения выборочного частного коэффициента корреляции $\hat{R}_{01\cdot 2}$ на основе (6.68) требуется решить две задачи регрессии, в каждой из которых в качестве фактора (единственного в данном случае) выступает x_2 . В первой задаче откликом служит y , во второй — x_1 . Регрессионные соотношения для этих двух задач имеют вид:

$$1. y_i = \beta_{10} + \beta_{12} x_{2i} + \varepsilon_i;$$

$$2. x_{1i} = \beta_{20} + \beta_{22} x_{2i} + \varepsilon_i.$$

$$n := 10 \quad i := 0..n-1 \quad a_i := 1 \quad b_i := x1_i \quad c_i := x2_i \quad \boxed{A := \text{augment}(a, c)}$$

$$y^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	-0.1	-0.33	-0.64	0.42	-0.75	1.57	0.75	-0.7	0.84	0.82

$$A^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	-0.65	-1.12	0.77	6.98	-1.19	8.61	3.86	-8.27	9.08	-0.47

$$\boxed{\beta := (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot y} \quad y_0 := A \cdot \beta \quad \Delta := y_0 - y \quad \delta := \Delta^T \cdot \Delta \quad d := \delta \div n$$

$$\beta^T = (-0.01 \quad 0.11) \quad \delta = 2.36 \quad d = 0.24 \quad \boxed{\text{var}(\Delta) = 0.24}$$

$$\boxed{\beta_1 := (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot b} \quad y_1 := A \cdot \beta_1 \quad \Delta_1 := y_1 - b \quad \delta_1 := \Delta_1^T \cdot \Delta_1 \quad \delta_1 = 25.85$$

$$d_1 := \delta_1 \div n \quad d_1 = 2.58$$

$$\beta_1^T = (-1.09 \quad 0.12) \quad \boxed{\frac{\text{cvar}(\Delta, \Delta_1)}{\sqrt{d \cdot d_1}} = 0.57} \quad \text{формула (6.81)} \quad \boxed{\text{var}(\Delta_1) = 2.58}$$

Рис. 6.14, а. Вычисление оценки частного коэффициента корреляции $R_{01 \circ 2}$

Учитывая это, заметим, что матрица A коэффициентов линейных алгебраических уравнений для первой и второй задач одинакова. По результатам решений этих задач получаем оценки параметров (см. рис. 6.14, а):

$$\hat{\beta}_{10} = -0.01, \hat{\beta}_{12} = 0.11, \hat{\beta}_{20} = -1.09, \hat{\beta}_{22} = 0.12.$$

Остаточные невязки (векторы ошибок e_y и e_{x1} оценки откликов) в первой и второй задачах обозначены Δ и Δ_1 соответственно (см. рис. 6.14, а). Вычисляя с помощью функции **cvar** выборочный корреляционный момент между этими векторами, а также выборочные дисперсии векторов (функция **var**), по формуле (6.81) получаем оценку частного коэффициента корреляции $\hat{R}_{01 \circ 2} = 0.57$. На рис. 6.14, б вычисление той же оценки $\hat{R}_{01 \circ 2}$ выполняется с использованием формулы (6.80), которая получена на основе (6.71).

$$r_{01} := \text{corr}(y, b) \quad r_{02} := \text{corr}(y, c) \quad r_{12} := \text{corr}(b, c) \quad \text{формула (6.80)}$$

$$r_{01} = 0.61 \quad r_{02} = 0.77 \quad r_{12} = 0.34$$

$$\boxed{\frac{r_{01} - r_{02} \cdot r_{12}}{\sqrt{(1 - r_{02}^2) \cdot (1 - r_{12}^2)}} = 0.57}$$

Рис. 6.14, б. Использование формулы (6.80) для вычисления $R_{01 \circ 2}$

Выборочные коэффициенты корреляции вычислены с применением встроенной функции **corr**. Полученный здесь результат $\hat{R}_{01 \circ 2} = 0.57$, конечно, совпадает с результатом оценки первым способом (см. рис. 6.14, а).

Аналогичными способами вычисляется оценка второго выборочного частного коэффициента корреляции ($R_{02\circ 1}$) в данном примере (рис. 6.14, в), который получается при исключении влияния данных о силе ветра. Полученное значение $\hat{R}_{02\circ 1} = 0.75$. ■

$$n := 10 \quad i := 0..n-1 \quad a_i := 1 \quad b_i := x1_i \quad c_i := x2_i \quad \boxed{A := \text{augment}(a, b)}$$

$$y^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	-0.1	-0.33	-0.64	0.42	-0.75	1.57	0.75	-0.7	0.84	0.82

$$A^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1.49	-0.45	-2.77	-2.2	-2.78	2.18	2.03	-0.6	-0.6	-2.23

$$\boxed{\beta := (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot y} \quad y_0 := A \cdot \beta \quad \Delta := y_0 - y \quad \delta := \Delta^T \cdot \Delta \quad d := \delta \div n$$

$$\beta^T = (0.43 \quad 0.27) \quad \delta = 3.65 \quad d = 0.37 \quad \boxed{\text{var}(\Delta) = 0.37}$$

$$\boxed{\beta_1 := (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot c} \quad y_1 := A \cdot \beta_1 \quad \Delta^1 := y_1 - c \quad \delta^1 := \Delta^1{}^T \cdot \Delta^1 \quad \delta^1 = 230.48$$

$$d^1 := \delta^1 \div n \quad d^1 = 23.05$$

$$\beta_1^T = (2.68 \quad 1.03) \quad \boxed{\frac{\text{cvar}(\Delta, \Delta^1)}{\sqrt{d \cdot d^1}} = 0.75} \quad \text{формула (6.68)} \quad \boxed{\text{var}(\Delta^1) = 23.05}$$

$$r_{01} := \text{corr}(y, b) \quad r_{02} := \text{corr}(y, c) \quad r_{12} := \text{corr}(b, c) \quad \text{формула (6.74)}$$

$$r_{01} = 0.61 \quad r_{02} = 0.77 \quad r_{12} = 0.34$$

$$\boxed{\frac{r_{02} - r_{01} \cdot r_{12}}{\sqrt{(1 - r_{01}^2) \cdot (1 - r_{12}^2)}} = 0.75}$$

Рис. 6.14, в. Вычисление оценки частного коэффициента корреляции $R_{02\circ 1}$

Таким образом, анализ рассмотренной задачи множественной регрессии показал, что по данным наблюдений получены следующие значения оценок коэффициентов корреляции (см. рис. 6.12, 6.14):

$$\hat{r}_{01} = 0.61; \hat{R}_{01\circ 2} = 0.57; \hat{r}_{02} = 0.77; \hat{R}_{02\circ 1} = 0.75; \hat{r}_{12} = 0.34; \hat{R}_S = 0.85.$$

Анализ этих значений показывает, что оба фактора в данной задаче достаточно существенно влияют на отклик. Сопоставление оценки парного коэффициента корреляции $\hat{r}_{01} = 0.61$ между откликом и первым фактором с соответствующим частным коэффициентом $\hat{R}_{01\circ 2} = 0.57$ показывает, что исключение влияния второго фактора несколько снижает корреляцию между разбросом попаданий и силой ветра. Аналогичный вывод можно сделать и для корреляции между разбросом попаданий и степенью усталости спортсменов: $\hat{r}_{02} = 0.77$, $\hat{R}_{02\circ 1} = 0.75$; в данном случае пренебрежение влиянием силы ветра снижает корреляцию лишь на две сотые. При слабой корреляции между фак-

торами ($\hat{r}_{12} = 0.34$) отсюда следует вывод о достаточно сильном влиянии каждого из факторов на отклик. При этом достаточных оснований для исключения одного из факторов все же не имеется, поскольку их совместное использование в регрессионном соотношении обеспечивает минимальное значение остаточной дисперсии $d = 0.16$ (см. рис. 6.12). В остальных вариантах имеем: $d = 0.24$ (см. рис. 6.14, а) и $d = 0.37$ (см. рис. 6.14, в). Этот вывод подтверждается и полученным значением оценки сводного коэффициента корреляции $\hat{R}_S = 0.85$ (см. рис. 6.12), свидетельствующего о том, что совместный учет двух факторов позволяет выявить более тесную их связь с откликом.

6.6.7. Интервальная оценка и проверка значимости выборочных сводного и частного коэффициентов корреляции

Сводный коэффициент корреляции

Как отмечалось выше, выражения для сводного коэффициента корреляции R_S (6.63) и его оценки $\hat{R}_S$ (6.65), рассмотренные в разд. 6.6.3 и 6.6.4, структурно аналогичны соответствующим выражениям для корреляционного отношения R_{yx} . Эта формальная аналогия распространяется и на процедуры формирования интервальных оценок и проверку значимости. Поэтому, при статистическом анализе R_S могут быть использованы подходы, формально аналогичные тем, которые служили основой построения интервальных оценок и проверке значимости корреляционного отношения R_{yx} (см. разд. 6.5).

Пусть, как и ранее, случайный вектор $\mathbf{z} = [y \ x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{m-1}]^T$ (6.53) имеет m -мерное нормальное распределение, причем дисперсия отклика — постоянная величина. При построении интервальной оценки сводного коэффициента корреляции R_S используют статистику, аналогичную (6.39) [4]:

$$W_S = \frac{(n-m)\hat{R}_S^2}{(m-1)(1-\hat{R}_S^2)} \cdot \frac{(m-1)}{(m-1+n\hat{R}_S^2)}. \quad (6.82)$$

Показано, что при указанных условиях случайная величина W_S имеет распределение, близкое к распределению Фишера (F -распределению) с числом степеней свободы n_1 и n_2 , причем

$$n_1 = \frac{(m-1+n\hat{R}_S^2)^2}{m-1+2n\hat{R}_S^2}; \quad n_2 = n-m. \quad (6.83)$$

В (6.82), (6.83) обозначены: n — объем выборки для каждого из элементов вектора $\mathbf{z}$; m — число элементов вектора $\mathbf{z} = [y \ x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{m-1}]^T$.

Задаваясь уровнем значимости α и определяя квантили F -распределения порядка $\alpha/2$ и $(1 - \alpha/2)$ с n_1 и n_2 степенями свободы: $F_{\alpha/2}(n_1, n_2) = F_{\alpha/2}$; $F_{1-\alpha/2}(n_1, n_2) = F_{1-\alpha/2}$ из условий $P(W_S < F_{\alpha/2}) = P(W_S > F_{1-\alpha/2}) = \alpha/2$, по-

сле преобразований (6.82), аналогичных проведенным над (6.39) в разд. 6.5, получаем границы $[L_S; U_S]$ доверительного интервала для R_S в виде:

$$\left[\sqrt{\frac{(n-m)\hat{R}_S^2}{nF_{1-\alpha/2}(1-\hat{R}_S^2)} - \frac{m-1}{n}}; \sqrt{\frac{(n-m)\hat{R}_S^2}{nF_{\alpha/2}(1-\hat{R}_S^2)} - \frac{m-1}{n}} \right]. \quad (6.84)$$

Формулы вида (6.84) при малых выборках и малом числе откликов дают заметную погрешность. Например, правая граница U_S доверительного интервала $[L_S; U_S]$ (6.84) в ряде случаев может выйти за пределы единицы. В этом случае границами доверительного интервала R_S следует считать $[L_S; 1]$.

Исследование наличия связи между откликом y и группой факторов $(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})$, составляющих строку $\mathbf{h}$ в выражении (6.51) основано на проверке нулевой гипотезы $H_0: R_S = 0$, против альтернативы $H_1: R_S \neq 0$. В предположении, что вектор $\mathbf{z} = [y \ x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{m-1}]^T$ (6.53) имеет m -мерное нормальное распределение, показано [4, 5], что статистика

$$W_S(R_S = 0) = W_0 = \frac{(n-m)\hat{R}_S^2}{(m-1)(1-\hat{R}_S^2)}, \quad (6.85)$$

аналогичная (6.42), имеет распределение Фишера с $n_1 = (m-1)$ и $n_2 = (n-m)$ степенями свободы.

Критической точкой при заданном уровне значимости α в этом случае служит квантиль порядка $(1-\alpha)$ F -распределения с n_1 и n_2 степенями свободы: $F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = F_{1-\alpha}^0$. Если $W_0 \leq F_{1-\alpha}^0$, делается вывод об отсутствии корреляционной связи между откликом y и совокупностью факторов $\mathbf{h} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{m-1}]$. В противном случае величину R_S считают значимо отличающейся от нуля и фиксируют, тем самым, корреляционную связь y и $(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})$. Проверку значимости проводят в сомнительных случаях, большинство которых характеризуется малыми значениями корреляционного отношения.

Несколько иной подход к проверке значимости сводного коэффициента корреляции, основанный на свойстве квадрата R_S (коэффициента детерминации), предложен в работе [8]. В предположении, что сводный коэффициент корреляции равен нулю, а вектор $\mathbf{z} = [y \ x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{m-1}]^T$ (6.53) имеет m -мерное нормальное распределение, показано [8], что квадрат выборочного сводного коэффициента корреляции имеет бета-распределение $\beta(x; a, b)$ с параметрами $a = (m-1)/2$; $b = (n-m)/2$.

Плотность вероятности $\beta(x; a, b)$ при $x \in [0, 1]$ имеет вид

$$f_\beta(x) = \Gamma[(n-1)/2] [\Gamma(a) \Gamma(b)]^{-1} x^{a-1} (1-x)^{b-1}; \quad (6.86)$$

при $x \notin [0, 1]$ плотность вероятности $f_\beta(x) = 0$. Здесь $\Gamma(a)$ — гамма-функция

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} \exp(-t) dt.$$

Проверка нулевой гипотезы $H_0 : R_S = 0$ при этом проводится обычным способом — путем назначения уровня значимости α и определения квантили $\beta_{1-\alpha}(a, b)$ порядка $(1 - \alpha)$ бета-распределения $\beta(x; a, b)$.

При $\hat{R}_S^2 > \beta_{1-\alpha}(a, b)$ корреляционная связь отклика и совокупности факторов, входящих в $\mathbf{h} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{m-1}]$, считается установленной.

Пример 6.9. На основе данных, полученных в результате решения примера 5.2 (разд. 5.2.4, рис. 5.3), построить интервальную оценку сводного коэффициента корреляции и произвести проверку его значимости.

□ Решение. Точечная оценка сводного коэффициента корреляции в заданных условиях была получена на рис. 6.12 ($\hat{R}_S = 0.85$). Результаты построения в Mathcad доверительного интервала с использованием соотношений (6.84) при уровне значимости $\alpha = 0.2$ приведены на рис. 6.15, который содержит копию продолжения файла, приведенного на рис. 6.12.

$$\begin{array}{l}
 n := 10 \quad m := 2 \quad R_S := \sqrt{1 - \frac{d}{\text{var}(y)}} \quad \boxed{R_S = 0.85} \quad \alpha := 0.2 \\
 n1 := \frac{m - 1 + n \cdot R_S^2}{m - 1 + 2 \cdot n \cdot R_S^2} \quad n2 := n - m \quad n1 = 4.39 \quad n2 = 8 \\
 F_1 := qF\left(\frac{\alpha}{2}, n1, n2\right) \quad F_2 := qF\left(1 - \frac{\alpha}{2}, n1, n2\right) \quad F_1 = 0.27 \quad F_2 = 2.77 \\
 \boxed{\frac{(n - m) \cdot R_S^2}{n \cdot |1 - R_S^2| \cdot F_2} - \frac{m - 1}{n} = 0.66} \quad \boxed{\frac{(n - m) \cdot R_S^2}{n \cdot |1 - R_S^2| \cdot F_1} - \frac{m - 1}{n} = 7.63} \\
 \boxed{\text{границы доверительного интервала составляют [0.66; 1]}} \\
 W_0 := \frac{(n - m) \cdot R_S^2}{(m - 1) \cdot |1 - R_S^2|} \quad n1 := m - 1 \quad n2 := n - m \\
 W_{kp} := qF(|1 - \alpha|, n1, n2) \\
 W_0 = 21.07 \quad W_{kp} = 1.95 \quad \boxed{\text{Нулевая гипотеза не принимается, т. к. } 21.07 > 1.95}
 \end{array}$$

Рис. 6.15, а. Интервальная оценка и проверка значимости R_S по (6.84), (6.85)

Числа степеней свободы n_1 и n_2 (6.83) распределения Фишера в данном случае составляют $n_1 = 4.39$ и $n_2 = 8$. Соответствующие этим значениям и выбранному уровню значимости квантили распределения Фишера получены с применением встроенной функции **qF** и равны: $F_{\alpha/2} = 0.27$; $F_{1-\alpha/2} = 2.77$.

Применяя формулы (6.84) с учетом сделанного ранее замечания о возможности выхода правой границы за пределы возможных значений коэффициента корреляции, получаем, что сводный коэффициент корреляции в условиях данного примера находится в диапазоне $0.66 < R_S < 1$.

Для проверки значимости сводного коэффициента корреляции на основе (6.85) в данном примере определяются (см. рис. 6.15, а) значения критической точки $F_{1-\alpha}^0 = 1.95$ и статистики (6.85) $W_0 = 21.07$. Поскольку значение W_0 существенно превышает значение критической точки, уверенно принимаем решение о том, что нулевая гипотеза противоречит выборочным данным. Более того, в данном случае $W_0 \gg F_{1-\alpha}^0$, что позволяет сделать вывод о достаточно тесной связи отклика с двумя факторами примера 5.2.

$n := 10$	$m := 2$	$R_S := 0.85$	$\alpha := 0.2$
$a := \frac{m-1}{2}$	$b := \frac{n-m}{2}$	параметры бета-распределения	
$W_{кр} := \text{qbeta}(1 - \alpha, a, b)$		$a = 0.5$	$b = 4$
$R_S^2 = 0.722$	$W_{кр} = 0.196$	нулевая гипотеза не принимается, т. к. 0.722 > 0.196	

Рис. 6.15, б. Проверка значимости R_S путем анализа коэффициента детерминации

Результаты проверки значимости сводного коэффициента корреляции на основе анализа коэффициента детерминации R_S^2 приведены на рис. 6.15, б.

Обозначенный как $W_{кр}$ квантиль $\beta_{1-\alpha}(a, b)$ бета-распределения $\beta(x; a, b)$ порядка $(1 - \alpha)$ с плотностью распределения (6.86) и параметрами $a = 0.5$ и $b = 4$ определен с применением встроенной функции **qbeta** (см. рис. 6.15, б). Его значение $W_{кр} = \beta_{1-\alpha}(a, b) = 0.196$ значительно меньше значения выборочного коэффициента детерминации, равного 0.722. Это подтверждает вывод, сделанный на основе данных рис. 6.15, а, о наличии тесной связи между откликом и совокупностью факторов в данной задаче. ■

Учитывая, что использование СКМ при решении прикладных задач рассматриваемого класса резко упрощает определение квантилей соответствующих распределений (Фишера, бета-распределения), применение этих двух подходов в практике статистического анализа R_S одинаково удобно, что подтверждают результаты, приведенные на рис. 6.15.

Частный коэффициент корреляции

Процедуру построения интервальной оценки рассмотрим, как и ранее (см. разд. 6.6.5), ограничиваясь анализом частной связи y и x_1 , т. е. на примере

$\hat{R}_{01 \circ 2}$ (6.81). Полученные далее выводы и рекомендации позволяют их использовать в качестве основы интервального оценивания и проверки значимости других частных коэффициентов корреляции.

Распределение выборочных частных коэффициентов корреляции изучено достаточно хорошо. В работах [4, 8] показано, что распределение $\hat{R}_{01 \circ 2}$ близко к распределению выборочного парного коэффициента корреляции $\hat{r}_{01}$ для тех же случайных величин с небольшим отличием: для распределения $\hat{R}_{01 \circ 2}$ значение объема выборки n , используемое в распределении $\hat{r}_{01}$, заменяется величиной $[n - (m - 2)]$. Поэтому построение интервальных оценок и проверка значимости $R_{01 \circ 2}$ могут быть проведены по схемам и формулам (6.23)—(6.30), которые были рассмотрены в разд. 6.3 применительно к r_{01} с учетом отмеченного отличия.

В частности, для больших объемов выборки и независимости (слабой корреляции) элементов нормально распределенного m -мерного вектора $\mathbf{z} = [y \ x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{m-1}]^T$ (6.53), показано [4], что статистика, аналогичная (6.30),

$$T = \hat{R}_{01 \circ 2} \sqrt{n-m} / \sqrt{1 - \hat{R}_{01 \circ 2}^2} \quad (6.87)$$

имеет распределение Стьюдента с $(n - m)$ степенями свободы.

Зададим уровень значимости α и определим квантиль $t_{1-\alpha/2}(n - m)$ распределения Стьюдента порядка $(1 - \alpha/2)$ с $(n - m)$ степенями свободы. Тогда, учитывая симметричность распределения Стьюдента, допустимая область (принятия нулевой гипотезы $H_0 : R_{01 \circ 2} = 0$) будет соответствовать неравенству $|T| \leq t_{1-\alpha/2}(n - m)$. Выход за пределы этой области будет означать, что корреляционная связь между y и совокупностью факторов $\mathbf{h} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{m-1}]$ существует на уровне значимости α .

После несложных преобразований неравенство $|T| \leq t_{1-\alpha/2}(n - m)$, аналогично (6.31), можно трансформировать в условие для выборочного частного коэффициента корреляции

$$|\hat{R}_{01 \circ 2}| \leq \frac{t_{1-\alpha/2}(n-m)}{\sqrt{n-m + [t_{1-\alpha/2}(n-m)]^2}}, \quad (6.88)$$

при котором нулевая гипотеза принимается.

Условие (6.88) относится к наиболее важной области значений частного коэффициента корреляции, соответствующей слабой корреляционной связи между откликом и факторами, в которой, вследствие неопределенности, в первую очередь требуется проверка значимости выборочных значений $\hat{R}_{01 \circ 2}$.

Если условия конкретной задачи оценки $R_{01\circ 2}$ соответствуют указанным ограничениям, доверительный интервал для частного коэффициента корреляции, в соответствии с (6.24), составляет:

$$[\hat{R}_{01\circ 2} - \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n^*}}, \hat{R}_{01\circ 2} + \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n^*}}] = [q^*(\alpha/2), q^*(1 - \alpha/2)]. \quad (6.89)$$

В (6.89) обозначены: $z_{1-\alpha/2}$ — квантиль нормированного нормального распределения $N(0, 1)$ порядка $(1 - \alpha/2)$; $q^*(\alpha/2)$, $q^*(1 - \alpha/2)$ — квантили нормального распределения $N(\hat{R}_{01\circ 2}, 1/\sqrt{n^*})$ порядков $\alpha/2$ и $(1 - \alpha/2)$ соответственно; $n^* = n - (m - 2)$.

Формулы вида (6.89) при малых выборках и малом числе откликов могут давать заметную погрешность. В ряде случаев правая граница доверительного интервала (6.89) может выйти за пределы единицы. В таких случаях правой границей доверительного интервала (6.89), как отмечалось в предыдущих разделах, следует считать единицу.

В общем случае (для объемов выборок $n \geq 10$) построение интервальной оценки частного коэффициента корреляции можно осуществить на основе z-преобразования Фишера аналогично (6.25)—(6.29). Вводя, аналогично (6.25),

$$\hat{Z}^* = \text{arch}(\hat{R}_{01\circ 2}) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \hat{R}_{01\circ 2}}{1 - \hat{R}_{01\circ 2}},$$

с использованием этого подхода доверительный интервал для $R_{01\circ 2}$, согласно (6.28) и (6.29), можно вычислить по одной из следующих формул:

$$[\text{th}(\hat{Z}^* - \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n^*-3}}); \text{th}(\hat{Z}^* + \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n^*-3}})]; [\text{th}(Q_{\alpha/2}^*); \text{th}(Q_{1-\alpha/2}^*)], \quad (6.90)$$

где $z_{1-\alpha/2}$ — квантиль нормированного нормального распределения $N(0, 1)$ порядка $(1 - \alpha/2)$; $Q_{\alpha/2}^*$, $Q_{1-\alpha/2}^*$ — квантили нормального распределения $N[\hat{Z}^*, \sqrt{D(\hat{Z}^*)}]$ порядков $\alpha/2$ и $(1 - \alpha/2)$ для случайной величины $\hat{Z}^*$.

Пример 6.10. Продолжая пример 6.8, построить доверительный интервал и проверить значимость частных коэффициентов корреляции $R_{01\circ 2}$, $R_{02\circ 1}$ для исходных данных, приведенных в примере 5.2 (разд. 5.2.4, рис. 5.3).

□ Решение. В примере 6.8 (см. рис. 6.14) получены значения выборочных частных коэффициентов корреляции $\hat{R}_{01\circ 2} = 0.57$, $\hat{R}_{02\circ 1} = 0.75$ для заданных исходных данных. Построим доверительные интервалы для этих коэффициентов и проверим их значимость.

Результаты вычислений в Mathcad приведены на рис. 6.16.

На рис. 6.16, а, б приведены копии mcd-фрагментов, в которых строятся интервальные оценки для коэффициентов $R_{01\circ 2}$ и $R_{02\circ 1}$.

$R_{01} := 0.57 \quad \alpha := 0.1 \quad n := 10$	$Z_{01} := \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{1 + R_{01}}{1 - R_{01}} \right)$
$z := \text{qnorm} \left(1 - \frac{\alpha}{2}, 0, 1 \right) \quad z = 1.645$	$Z_{01} = 0.648$
$R_{01} - \frac{z}{\sqrt{n}} = 0.05$	$R_{01} + \frac{z}{\sqrt{n}} = 1.09$
Формула (6.89)	
$\text{qnorm} \left(\frac{\alpha}{2}, R_{01}, \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 0.05$	$\text{qnorm} \left(1 - \frac{\alpha}{2}, R_{01}, \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 1.09$
Формула (6.90)	
$\tanh \left(Z_{01} - \frac{z}{\sqrt{n-3}} \right) = 0.026$	$\tanh \left(Z_{01} + \frac{z}{\sqrt{n-3}} \right) = 0.854$
$Q_1 := \text{qnorm} \left(\frac{\alpha}{2}, Z_{01}, \frac{1}{\sqrt{n-3}} \right)$	$Q_2 := \text{qnorm} \left(1 - \frac{\alpha}{2}, Z_{01}, \frac{1}{\sqrt{n-3}} \right)$
$Q_1 = 0.026 \quad Q_2 = 1.269$	$\tanh Q_1 = 0.026$ $\tanh Q_2 = 0.854$

Рис. 6.16, а. Интервальная оценка $R_{01 \circ 2}$ по (6.89), (6.90)

Для каждого из коэффициентов границы доверительных интервалов получаются на уровне значимости $\alpha = 0.1$ двумя способами — по формулам (6.89) и (6.90). Полученные результаты отмечены заливкой. Рамками выделены значения границ доверительных интервалов, полученных прямыми вычислениями квантилей соответствующего нормального распределения, без введения нормировки случайных величин. Они, естественно, совпадают с результатами, полученными анализом нормированных статистик.

Применяя формулы (6.89) с учетом сделанного ранее замечания о возможности выхода правой границы за пределы возможных значений коэффициента корреляции, получаем, что частный коэффициент корреляции $R_{01 \circ 2}$ имеет выборочное значение $\hat{R}_{01 \circ 2} = 0.57$ и в условиях данного примера находится в диапазоне $0.05 < R_{01 \circ 2} < 1$.

Для коэффициента $R_{02 \circ 1}$ по тем же формулам получаем: $0.23 < R_{02 \circ 1} < 1$. Эти границы доверительных интервалов получены первым способом, с применением формул (6.89), отличаются от границ $[0.026, 0.854]$ и $[0.337, 0.921]$, полученных для коэффициентов $R_{01 \circ 2}$ и $R_{02 \circ 1}$ (см. рис. 6.16, а, б) путем функционального преобразования (6.25) с применением формул (6.90). Объем выборки, при котором решается данная задача, мал, поэтому результаты вычислений по формулам (6.89) не обладают достаточной надежностью. Большую степень доверия имеет при этом результаты $[0.026, 0.854]$ и $[0.337, 0.921]$, по-

лученные на уровне значимости $\alpha = 0.1$ вторым способом, путем использования z-преобразования Фишера и формул (6.90). При вычислениях, связанных с получением интервальных оценок в среде Mathcad, как следует из рис. 6.16, а, б, потребовалось использовать только встроенные функции **qnorm** для вычислений квантилей нормального распределения и **tanh** для вычисления гиперболических тангенсов.

$R_{02} := 0.75 \quad \alpha := 0.1 \quad n := 10$		$Z_{02} := \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{1 + R_{02}}{1 - R_{02}} \right)$
$R_{02} - \frac{z}{\sqrt{n}} = 0.23$	$R_{02} + \frac{z}{\sqrt{n}} = 1.27$	$Z_{02} = 0.973$
Формула (6.89)		
$\text{qnorm} \left(\frac{\alpha}{2}, R_{02}, \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 0.23$	$\text{qnorm} \left(1 - \frac{\alpha}{2}, R_{02}, \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 1.27$	
Формула (6.90)		
$\tanh \left(Z_{02} - \frac{z}{\sqrt{n-3}} \right) = 0.337$	$\tanh \left(Z_{02} + \frac{z}{\sqrt{n-3}} \right) = 0.921$	
$Q_1 := \text{qnorm} \left(\frac{\alpha}{2}, Z_{02}, \frac{1}{\sqrt{n-3}} \right)$	$Q_2 := \text{qnorm} \left(1 - \frac{\alpha}{2}, Z_{02}, \frac{1}{\sqrt{n-3}} \right)$	
$Q_1 = 0.351 \quad Q_2 = 1.595$	$\tanh Q_1 = 0.337$	$\tanh Q_2 = 0.921$

Рис. 6.16, б. Интервальная оценка $R_{02 \circ 1}$ по (6.89), (6.90)

На рис. 6.16, в приведен фрагмент файла с результатами проверки значимости выборочных частных коэффициентов корреляции $\hat{R}_{01 \circ 2} = 0.57$, $\hat{R}_{02 \circ 1} = 0.75$ с использованием статистики (6.87) и пороговых значений для этих коэффициентов (6.88). Примем уровень значимости $\alpha = 0.1$.

Квантиль $t_{1-\alpha/2}(n-2)$ распределения Стьюдента порядка $(1 - \alpha/2)$ с $(n - 2)$ степенями свободы определим в Mathcad с применением встроенной функции **qt**($1 - \alpha/2, n - 2$) = 1.86. Вычисляя критическую точку — правую часть неравенства (6.88), получаем: $1.86 / \sqrt{8 + 3.458} = 1.861 / 3.385 = 0.549$. Для статистики (6.87) получаем для $\hat{R}_{01 \circ 2}$: $t = 0.57 \cdot 2.828 / 0.822 = 1.962$ и для $\hat{R}_{02 \circ 1}$: $t = 0.75 \cdot 2.828 / 0.661 = 3.207$.

Полученные результаты (выделены заливкой в рамках) свидетельствуют о том, что исследуемые

- корреляционная связь отклика (отклонения попаданий) с первым фактором (сила бокового ветра) в условиях, когда исключаются изменения, вызванные влиянием второго фактора (степень усталости спортсменов);

◦ корреляционная связь отклика (отклонения попаданий) со вторым фактором (степень усталости спортсменов) в условиях, когда исключаются изменения, вызванные влиянием первого фактора (сила бокового ветра) существуют на уровне значимости 0.1. ■

$n := 10$	$m := 2$	$q_{01} := qt\left(1 - \frac{\alpha}{2}, n - m\right)$	$q_{01} = 1.86$
$R_{01} := 0.57$	Формула (6.88)	Формула (6.87)	
$\frac{q_{01}}{\sqrt{n - m + q_{01}^2}} = 0.549$	$0.57 > 0.549$	$\frac{R_{01} \cdot \sqrt{n - m}}{\sqrt{1 - R_{01}^2}} = 1.962$	$1.962 > 1.86$
$R_{02} := 0.75$		Формула (6.87)	
$0.75 > 0.549$	Формула (6.88)	$\frac{R_{02} \cdot \sqrt{n - m}}{\sqrt{1 - R_{02}^2}} = 3.207$	$3.207 > 1.86$

Рис. 6.16, в. Проверка значимости $R_{01 \circ 2}$ и $R_{02 \circ 1}$ по (6.87), (6.88)

Рассмотренные в главе 6 примеры и их типовые решения наглядно иллюстрируют необходимость и удобство практического применения универсальных математических программных систем при решении задач корреляционного анализа — сложного и вычислительно емкого раздела математической статистики.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$

(плотности вероятностей нормированного нормального распределения)

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.39894	39892	39886	39876	39862	39844	39822	39797	39767	39733
0.1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0.2	39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38251
0.3	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0.4	36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
0.5	35207	35029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
0.6	33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
0.7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29659	29431	29200
0.8	28969	28737	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26848
0.9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
1.0	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025
1.1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20357	20121	19886	19652
1.2	19419	19186	18954	18724	18494	18265	18037	17810	17585	17360
1.3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
1.4	14973	14764	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147
1.5	12952	12758	12566	12376	12188	12001	11816	11632	11450	11270
1.6	11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	09893	09728	09566
1.7	09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08329	08183	08038
1.8	07895	07754	07614	07477	07341	07206	07074	06943	06814	06687
1.9	06562	06438	06316	06195	06077	05959	05844	05730	05618	05508
2.0	05399	05292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04491
2.1	04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2.2	03547	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02965	02898
2.3	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
2.4	02239	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01888	01842	01797
2.5	01753	01709	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
2.6	01358	01323	01289	01256	01223	01191	01160	01130	01100	01071
2.7	01042	01014	00987	00961	00935	00909	00885	00861	00837	00814
2.8	00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
2.9	00595	00578	00562	00545	00530	00514	00499	00485	00470	00457
x	Десятые доли x									
	0		2		4		6		8	
3.0	0.00443		00238		00123		00061		00029	
4.0	00013		00006		00002		00001		00000	

Значения функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp(-t^2/2) dt$
(значения функции Лапласа)

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0.1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0.2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0.3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0.4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0.5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0.6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0.7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0.8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0.9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1.0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1.1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1.2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1.3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41308	41466	41621	41774
1.4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1.5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1.6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1.7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1.8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1.9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2.0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2.1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2.2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2.3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2.4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2.5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2.6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2.7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2.8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2.9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
x	Десятые доли x									
	0		2		4		6		8	
3.0	0.49865		49931		49966		49984		49993	
4.0	49997		49999							

Простейшие потоки и анализ процессов «старения» устройств

Одним из распространенных видов случайных процессов и последовательностей, широко используемых в практике анализа динамики вероятностных свойств различных объектов, служит простейший поток. Основные свойства (стационарности, отсутствия последействия и ординарности), которым одновременно удовлетворяют процессы типа простейшего потока, были рассмотрены ранее, в *разд. 5.5, ч. I*, в связи с распределением Пуассона. Рассмотрим методику получения количественных вероятностных характеристик с использованием свойств простейшего потока в широко распространенной задаче анализа динамики изменения надежности некоторой сложной технической системы в процессе ее эксплуатации.

Качество технических систем в процессе эксплуатации не остается неизменным и постепенно ухудшается. При наличии в своем составе нескольких элементов подобная сложная система претерпевает так называемый процесс «старения», вызванный отказами отдельных элементов и их восстановлением. Этот процесс «старения», т. е. процесс постепенного перехода системы из одного состояния в другое, может быть отнесен к процессам типа простейшего потока (*см. разд. 5.5, ч. I*). Действительно, последовательность изменяющихся состояний системы характеризуется однородностью вероятностных свойств, независимостью (отсутствие последействия) и распределением во времени отдельных событий, приводящих к смене состояния (ординарность).

Введем также другие естественные предположения:

- ° процесс «старения» системы относится к классу марковских случайных процессов (*см. прил. 6*), т. е. процессов без последействия, для которых дальнейшее их развитие определяется только текущим состоянием в данный момент времени и не зависит от предыстории;
- ° возможные состояния системы $S_1, S_2, \dots, S_n$ можно перечислить (перенумеровать) одно за другим, а сам процесс «старения» состоит в том, что в случайные моменты времени система скачком (мгновенно) переходит из одного состояния в другое в результате последовательностей отказов и восстановлений элементов;
- ° отдельные состояния системы возникают в результате несовместных событий, т. е. в каждый момент возможно одно-единственное событие.

Полная картина последовательных переходов системы из одного состояния в другое отражается графом состояний. Число вершин такого графа равно числу различных состояний, возникающих в процессе «старения». Ребра графа

состояний отражают возможные переходы системы из состояния в состояние под действием потоков отказов и восстановлений с параметрами λ и μ соответственно. Анализ подобных процессов «старения» состоит в получении вероятностей отдельных состояний системы в функции времени, т. е. определении $P_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Решение подобных задач производится путем составления и интегрирования системы дифференциальных уравнений Колмогорова [5, 6]. Эта система уравнений связана с характеристиками графа состояний и составляется по следующим правилам:

- число уравнений равно числу вершин графа состояний;
- в левой части каждого i -го уравнения записывается производная вероятности $P_i(t)$ нахождения системы в i -ом состоянии;
- правая часть каждого i -го уравнения содержит столько слагаемых, сколько ребер графа связано с данной i -ой вершиной; если ребро исходит из данной вершины, то соответствующее слагаемое правой части имеет знак минус и наоборот;
- каждое слагаемое правой части равно произведению параметров λ или μ , связанных с данным ребром, на вероятность нахождения в той вершине графа, из которого исходит данное ребро.

Начальные условия $P_i(0)$ для уравнений Колмогорова назначаются, исходя из рассматриваемого периода функционирования системы.

Уравнения Колмогорова могут быть использованы как для анализа установившихся значений $P_i(\infty)$ вероятностей отдельных состояний после завершения процесса «старения», так и для получения вероятностей $P_i(t)$ состояний в переходном режиме. Решение уравнений Колмогорова имеет ряд особенностей, которые могут затруднить получение численных значений вероятностей состояний прямым использованием этих уравнений.

Проиллюстрируем отмеченный факт анализом простейшего примера, в котором рассмотрим одно устройство. Пусть это устройство выходит из строя с параметром потока отказов λ и восстанавливается ремонтной бригадой с параметром потока восстановлений μ . Граф состояний (см. рис. П.2.1) в этом случае имеет две вершины — первую (рабочее состояние с вероятностью $P_1(t)$) и вторую (состояние отказа с вероятностью $P_2(t)$).

В соответствии с приведенными правилами, запишем уравнения Колмогорова для этого случая:

$$\dot{P}_1(t) = -\lambda P_1(t) + \mu P_2(t);$$

$$\dot{P}_2(t) = -\mu P_2(t) + \lambda P_1(t).$$

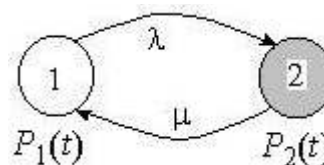


Рис. П.2.1. Граф состояний

Примем, что в начальный момент рассматриваемое устройство находится в рабочем состоянии, т. е. $P_1(0) = 1$, $P_2(0) = 0$. Полученная система однородных дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме имеет вид

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{X}(t); \mathbf{X}(t = 0) = \mathbf{X}(0), \quad (\text{П.2.1})$$

где для рассматриваемого случая $\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{bmatrix}; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\lambda & \mu \\ \lambda & -\mu \end{bmatrix}; \mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Нетрудно заметить, что в рассматриваемом примере матрица $\mathbf{A}$ системы (П.2.1) — вырожденная. Это означает, что применение любого численного метода интегрирования системы (П.2.1) приведет к получению расходящегося решения, при котором абсолютные значения $P_1(t)$ и $P_2(t)$ с течением времени будут неограниченно возрастать. Однако этот характер изменения не отражает поведения $P_1(t)$ и $P_2(t)$ в действительности.

Следует отметить, что и в задачах анализа процессов «старения» систем произвольной сложности уравнения Колмогорова могут быть представлены в форме (П.2.1), причем вырожденность матрицы $\mathbf{A}$ получаемой системы уравнений также носит общий характер, справедливый для произвольного числа состояний (размерности вектора $\mathbf{X}(t)$). Это определяет необходимость применения специальных методик для получения решений задач рассматриваемого класса.

Численные значения вероятностей отдельных состояний или, что то же, элементов вектора $\mathbf{X}(t)$ системы уравнений (П.2.1), можно получить несколькими путями. Приведем два из них — с применением преобразования Лапласа и путем предварительного преобразования системы уравнений Колмогорова.

Операторный метод

Изображение по Лапласу вектора $\mathbf{X}(t)$, который содержит вероятности состояний и удовлетворяет решению систем типа (П.2.1), имеет вид:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{X}(0). \quad (\text{П.2.2})$$

Здесь $\mathbf{E}$ — единичная матрица соответствующей размерности; s — оператор Лапласа. При написании выражения (П.2.2) была использована операторная форма уравнения (П.2.1):

$$s \mathbf{X}(s) - \mathbf{X}(0) = \mathbf{A} \mathbf{X}(s).$$

Применяя к (П.2.2) обратное преобразование Лапласа, получаем искомое выражение для вектора $\mathbf{X}(t)$. Это выражение позволит вычислить значения вероятностей состояний для любого момента времени. Так, устремляя $t \rightarrow \infty$, могут быть получены предельные значения вероятностей $P_i(\infty)$, $i = 1, 2, \dots, n$, соответствующие установившемуся режиму «старения» технической системы. В случае, когда необходимо получить только эти предельные значения вероятностей, они могут быть определены непосредственно из операторного выражения (П.2.2) с использованием предельной теоремы преобразования Лапласа: $\mathbf{X}(\infty) = \lim_{t \rightarrow 0} s \mathbf{X}(s)$.

Применим операторный метод к рассматриваемому простейшему примеру.

На рис. П.2.2—П.2.5 приведены фрагменты применения описанной методики с использованием символьных преобразований Mathcad.

Рисунок П.2.2 содержат результаты получения операторных выражений для вероятностей двух состояний устройства. На рис. П.2.3 приводится фрагмент получения оригиналов по найденным операторным выражениям. Рисунок П.2.4 иллюстрирует процедуру получения предельных вероятностей состояний.

$$\begin{array}{lcl}
 A := \begin{pmatrix} -\lambda & \mu \\ \lambda & -\mu \end{pmatrix} & E := \text{identity}(2) & X_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 X(s) := (s \cdot E - A)^{-1} \cdot X_0 & & X(s) \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{s + \mu}{s \cdot (s + \mu + \lambda)} \\ \frac{\lambda}{s \cdot (s + \mu + \lambda)} \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Рис. П.2.2. Получение операторных выражений для вероятностей состояний

$$\begin{array}{lcl}
 \frac{s + \mu}{s \cdot (s + \mu + \lambda)} & \begin{array}{l} \text{invlaplace, } s \\ \text{simplify} \end{array} & \rightarrow \frac{\mu + \lambda \cdot \exp[-(\mu + \lambda) \cdot t]}{\mu + \lambda} \\
 \frac{\lambda}{s \cdot (s + \mu + \lambda)} & \begin{array}{l} \text{invlaplace, } s \\ \text{simplify} \end{array} & \rightarrow -\lambda \cdot \frac{[-1 + \exp[-(\mu + \lambda) \cdot t]]}{\mu + \lambda}
 \end{array}$$

Рис. П.2.3. Получение оригиналов для вероятностей состояний

$$\begin{array}{lcl}
 P_1(s) := \frac{s + \mu}{s \cdot (s + \mu + \lambda)} & P_1|_{\infty} := \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot P_1(s) & P_1|_{\infty} \rightarrow \frac{\mu}{\mu + \lambda} \\
 P_2(s) := \frac{\lambda}{s \cdot (s + \mu + \lambda)} & P_2|_{\infty} := \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot P_2(s) & P_2|_{\infty} \rightarrow \frac{1}{\mu + \lambda} \cdot \lambda
 \end{array}$$

Рис. П.2.4. Получение предельных значений вероятностей состояний

На рис. П.2.5 приведены графики изменения вероятностей состояний, полученные при $\lambda = 0.01$ 1/час и $\mu = 0.5$ 1/час, что соответствует среднему времени наработки на отказ и среднему времени восстановления $T_0 = 100$ час и $T_v = 2$ час соответственно.

Для принятых значений параметров потока отказов и восстановлений предельные значения вероятности рабочего состояния и состояния отказа устройства составляют:

$$\begin{array}{lcl}
 P_1|_{\infty} \text{ float, } 6 & \rightarrow & .980392 \\
 P_2|_{\infty} \text{ float, } 6 & \rightarrow & 1.96078 \cdot 10^{-2}
 \end{array}$$

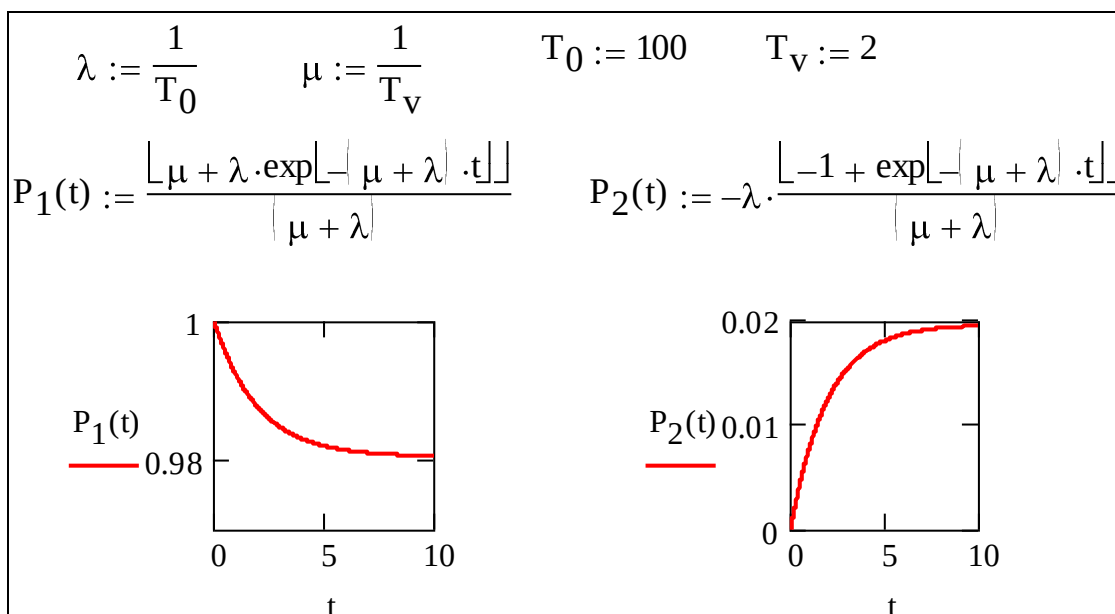


Рис. П.2.5. Процесс “старения” рассматриваемого устройства

Легко убедиться в том, что сумма элементов вектора $\mathbf{X}(t)$, т. е. сумма вероятностей возможных состояний рассматриваемой технической системы при произвольном значении t равна единице. Это следует из того, что ее состояния, как случайные события, в совокупности составляют полную группу.

Простота применения среды Mathcad в приведенных иллюстрациях исключает необходимость комментариев, касающихся технологии использования этого программного средства. В то же время необходимо отметить, что возможность практического применения операторного метода решения рассматриваемых задач даже при использовании программных систем компьютерной математики ограничивается сравнительно невысоким ($n \leq 10$) числом состояний. Это связано с трудностями прямого получения обратных преобразований Лапласа для систем высокой размерности и с вынужденным решением (в этих случаях) задачи по частям, что сводит «на-нет» преимущества программных систем компьютерной математики, без которых получение решений уже при $n \geq 2$ этим методом становится проблематичным, если не невозможным.

От отмеченных недостатков свободен второй метод, основанный на предварительном преобразовании систем уравнений Колмогорова и использовании одного из численных алгоритмов интегрирования систем дифференциальных уравнений.

Преобразование уравнений Колмогорова

Преобразование системы (П.2.1) уравнений Колмогорова имеет целью обеспечить невырожденность соответствующей матрицы ее коэффициентов и возможность получения правильного решения численным интегрированием. Это можно осуществить, воспользовавшись отмеченным ранее свойством ра-

венства единице суммы элементов вектора $\mathbf{X}(t)$. Указанное свойство целесообразно использовать для выделения невырожденной части матрицы $\mathbf{A}$ путем сокращения размерности системы уравнений (П.2.1) на единицу.

Согласно отмеченному свойству

$$\sum_{i=1}^n X_i(t) = \sum_{i=1}^n P_i(t) = 1. \quad (\text{П.2.3})$$

С помощью этой линейной связи вероятностей $P_i(t)$ состояний сократим размерность системы (П.2.1) путем исключения, например, последнего уравнения. С этой целью представим сумму (П.2.3) в виде суммы $(n - 1)$ первых значений элементов вектора $\mathbf{X}(t)$ и его последнего элемента:

$$\mathbf{C}_{n-1}\mathbf{X}_I(t) + P_n(t) = 1; \quad \mathbf{C}_{n-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{n-1}; \quad \mathbf{X}_I(t) = \begin{bmatrix} P_1(t) & P_2(t) & \dots & P_{n-1}(t) \end{bmatrix}^T. \quad (\text{П.2.4})$$

В выражении (П.2.4) через $\mathbf{C}_{n-1}$ обозначен вектор-строка, состоящий из $(n - 1)$ единиц; $\mathbf{X}_I(t)$ — $[(n - 1) \times 1]$ -вектор-столбец, содержащий $(n - 1)$ первых элементов вектора $\mathbf{X}(t)$ системы (П.2.1) уравнений Колмогорова.

Принятое разделение вектора $\mathbf{X}(t)$ позволяет записать систему уравнений (П.2.1) в следующей форме:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}}_I(t) \\ \dot{P}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X}_I(t) \\ P_n(t) \end{bmatrix}, \quad (\text{П.2.5})$$

где a_{22} — скаляр, а блочные матрицы в составе матрицы $\mathbf{A}$ имеют размерности:

$$\mathbf{A}_{11} - [(n - 1) \times (n - 1)]; \quad \mathbf{A}_{12} - [(n - 1) \times 1]; \quad \mathbf{A}_{21} - [1 \times (n - 1)].$$

Форма (П.2.5) и линейная связь (П.2.4) позволяют получить систему $(n - 1)$ уравнений Колмогорова для вектора $\mathbf{X}_I(t)$:

$$\dot{\mathbf{X}}_I(t) = \mathbf{A}_{11}\mathbf{X}_I(t) + \mathbf{A}_{12}P_n(t) = \mathbf{A}_{11}\mathbf{X}_I(t) + \mathbf{A}_{12}[1 - \mathbf{C}_{n-1}\mathbf{X}_I(t)].$$

В окончательном виде искомая система имеет вид:

$$\dot{\mathbf{X}}_I(t) = (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{C}_{n-1}) \mathbf{X}_I(t) + \mathbf{A}_{12} = \mathbf{A}^* \mathbf{X}_I(t) + \mathbf{A}_{12}. \quad (\text{П.2.6})$$

Матрица $\mathbf{A}^*$ в выражении (П.2.6) — квадратная, порядка $(n - 1)$, является невырожденной. Это утверждение приводится здесь без доказательства, имея в виду, что вырожденность матрицы $\mathbf{A}$ в системе (П.2.1) является следствием ее избыточной размерности, которая устранена в форме (П.2.6).

Преобразование уравнений Колмогорова к форме (П.2.6) позволяет применить любой метод численного интегрирования для получения вектора $\mathbf{X}_I(t)$ (вероятностей первых $(n - 1)$ состояний рассматриваемых систем). После нахождения $\mathbf{X}_I(t)$, вероятность $P_n(t)$ последнего состояния может быть получена с использованием (П.2.4):

$$P_n(t) = 1 - \mathbf{C}_{n-1}\mathbf{X}_I(t). \quad (\text{П.2.7})$$

Приведенная методика обеспечивает замену исходной системы n уравнений Колмогорова ((П.2.1) системой $(n - 1)$ уравнений (П.2.6) и выражением

(П.2.7), что позволяет осуществлять полноформатный анализ процессов «старения» технических систем как в аналитическом виде, так и в численной форме. При этом могут быть использованы и программные системы компьютерной математики, имеющие широкий набор встроенных функций для интегрирования систем дифференциальных уравнений.

В среде Mathcad одной из удобных встроенных функций для численного интегрирования дифференциальных уравнений рассматриваемого класса задач служит функция **rkfixed**[**X**(0), t_0 , t_k , m , **D**], которая реализует метод Рунге—Кутты с постоянным шагом. Аргументами этой функции служат вектор начальных состояний, начальный и конечный моменты времени, число точек решения на интервале $(t_k - t_0)$ и вектор правых частей исследуемой системы дифференциальных уравнений соответственно.

При необходимости получения только установившихся значений вероятностей состояний, можно воспользоваться уравнениями (П.2.6), (П.2.7) без интегрирования. Установившийся режим для (П.2.6) соответствует условию $\dot{\mathbf{X}}_I(\infty) = 0$, откуда

$$\mathbf{X}_I(\infty) = -(\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{C}_{n-1})^{-1} \mathbf{A}_{12}; P_n(\infty) = 1 - \mathbf{C}_{n-1}\mathbf{X}_I(\infty). \quad (\text{П.2.8})$$

Убедиться в эффективности рассмотренного преобразования при оценке надежностных свойств технических систем можно на любом практическом примере. Отсутствие значимых ограничений на размерности систем уравнений, возможность численного интегрирования уравнений в форме (П.2.6) делает описанный подход универсальным и удобным в практическом использовании.

Для рассмотренного простейшего примера (см. рис. П.2.1) применение преобразований (П.2.6) и (П.2.7) дает следующие результаты ($n = 2$):

$$\mathbf{X}_I(t) = P_1(t), P_n(t) = P_2(t), \mathbf{A}_{11} = -\lambda, \mathbf{A}_{12} = \mu, \mathbf{C}_{n-1} = 1.$$

При этом уравнение (П.2.6) для этого примера принимает вид:

$$\dot{P}_1(t) = -(\lambda + \mu) P_1(t) + \mu,$$

откуда, при введенных ранее начальных условиях ($P_1(0) = 1$), имеем

$$P_1(t) = \frac{\mu + \lambda \cdot \exp[-(\mu + \lambda) t]}{\mu + \lambda},$$

что, безусловно, совпадает с полученным ранее в среде Mathcad результатом (см. рис. П.2.3). Приравнявая нулю правую часть дифференциального уравнения для $P_1(t)$, получаем $P_1(\infty) = \mu/(\lambda + \mu)$. Вероятность отказов устройства в примере получаем, применяя уравнение связи (П.2.7), которое в этом случае имеет вид $P_2(t) = 1 - P_1(t)$.

Символьный анализ задачи регрессии

Проведем более детальный анализ необходимых и достаточных условий экстремума в рассмотренной (см. разд. 7.7, ч. I) задаче регрессии. При выполнении анализа воспользуемся возможностями символьных операторов Mathcad.

Получение параметров регрессии из необходимых условий минимума путем символьных преобразований в среде иллюстрирует рис. П.3.1.

Параметры регрессии получены в результате решения системы двух алгебраических уравнений, записанных в виде необходимых условий минимума. Для решения этой системы использован вычислительный блок Mathcad, между ключевыми словами **Given** и **Find** которого записаны необходимые условия. Результат получается в форме вектора-столбца x , который в примере выводится (для экономии места) в виде (1×2) -строки.

Минимизируемая функция

$$f(a_2, b_2) := \sigma_2^2 + a_2^2 \cdot \sigma_1^2 - 2 \cdot a_2 \cdot r \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + [m_2 - (a_2 \cdot m_1 + b_2)]^2$$

$$\frac{\partial}{\partial a_2} f(a_2, b_2) \rightarrow 2 \cdot a_2 \cdot \sigma_1^2 - 2 \cdot r \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 - 2 \cdot [m_2 - a_2 \cdot m_1 - b_2] \cdot m_1$$

$$\frac{\partial}{\partial b_2} f(a_2, b_2) \rightarrow -2 \cdot m_2 + 2 \cdot a_2 \cdot m_1 + 2 \cdot b_2$$

Получение параметров решением системы уравнений,
составленных на основе необходимых условий минимума :

Given

$$\frac{\partial}{\partial a_2} f(a_2, b_2) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial b_2} f(a_2, b_2) = 0 \quad x := \text{Find}(a_2, b_2)$$

$$x^T \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_2 & \frac{m_2 \cdot \sigma_1 - r \cdot \sigma_2 \cdot m_1}{\sigma_1} \\ r \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1} & \sigma_1 \end{pmatrix} \quad a_2 := x_0 \quad b_2 := x_1$$

$$a_2 \rightarrow r \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad b_2 \rightarrow \frac{m_2 \cdot \sigma_1 - r \cdot \sigma_2 \cdot m_1}{\sigma_1} \quad \boxed{\text{Параметры определены}}$$

Рис. П.3.1. Анализ необходимых условий минимума

Полученные (см. рис. П.3.1) параметры составляют вектор $\mathbf{x}^*$. Покажем теперь, что этот вектор соответствует минимуму исходной функции. Для этого проанализируем достаточные условия.

Существует несколько эквивалентных формулировок достаточных условий минимума. Воспользуемся теми из них, которые рассматривают симметричную матрицу $\mathbf{W}$ (Гессе) вторых и смешанных производных, образованную дифференцированием в точке $\mathbf{x}^*$ градиента минимизируемой функции по вектору $\mathbf{x}$ параметров, т. е. $\mathbf{W} = \partial [\text{grad}(f(a_2, b_2))] / \partial \mathbf{x}$.

Полученные в файле (рис. П.3.1) первые производные обозначаются как функции L и M , затем, с использованием символьных операторов, вычисляется матрица $\mathbf{W}$ (см. рис. П.3.2).

Обозначим первые производные:

$$L[a_2, b_2] := 2 \cdot a_2 \cdot \sigma_1^2 - 2 \cdot r \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 - 2 \cdot [m_2 - a_2 \cdot m_1 - b_2] \cdot m_1$$

$$M[a_2, b_2] := [-2 \cdot m_2 + 2 \cdot a_2 \cdot m_1 + 2 \cdot b_2]$$

Вычисление вторых (A, C) и смешанных (B) производных

$$A := \frac{\partial}{\partial a_2} L[a_2, b_2] \rightarrow 2 \cdot \sigma_1^2 + 2 \cdot m_1^2 \quad B := \frac{\partial}{\partial b_2} L[a_2, b_2] \rightarrow 2 \cdot m_1$$

$$C := \frac{\partial}{\partial b_2} M[a_2, b_2] \rightarrow 2 \quad B := \frac{\partial}{\partial a_2} M[a_2, b_2] \rightarrow 2 \cdot m_1$$

Введем обозначения: $\mathbf{W} := \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$

$$|\mathbf{W}| \rightarrow 4 \cdot \sigma_1^2 \quad \text{Определитель матрицы } \mathbf{W} \text{ вторых производных :}$$

$|\mathbf{W}| > 0$, т.е. экстремум есть.

Поскольку $A > 0$, то это - минимум.

Рис. П.3.2. Анализ достаточных условий минимума

Полученная матрица $\mathbf{W}$ — положительно определена, откуда следует, что найденные параметры регрессии обеспечивают минимум функции (7.101).

Решение задачи композиции в среде Mathcad

(исходные данные – из примера 7.11, ч. I)

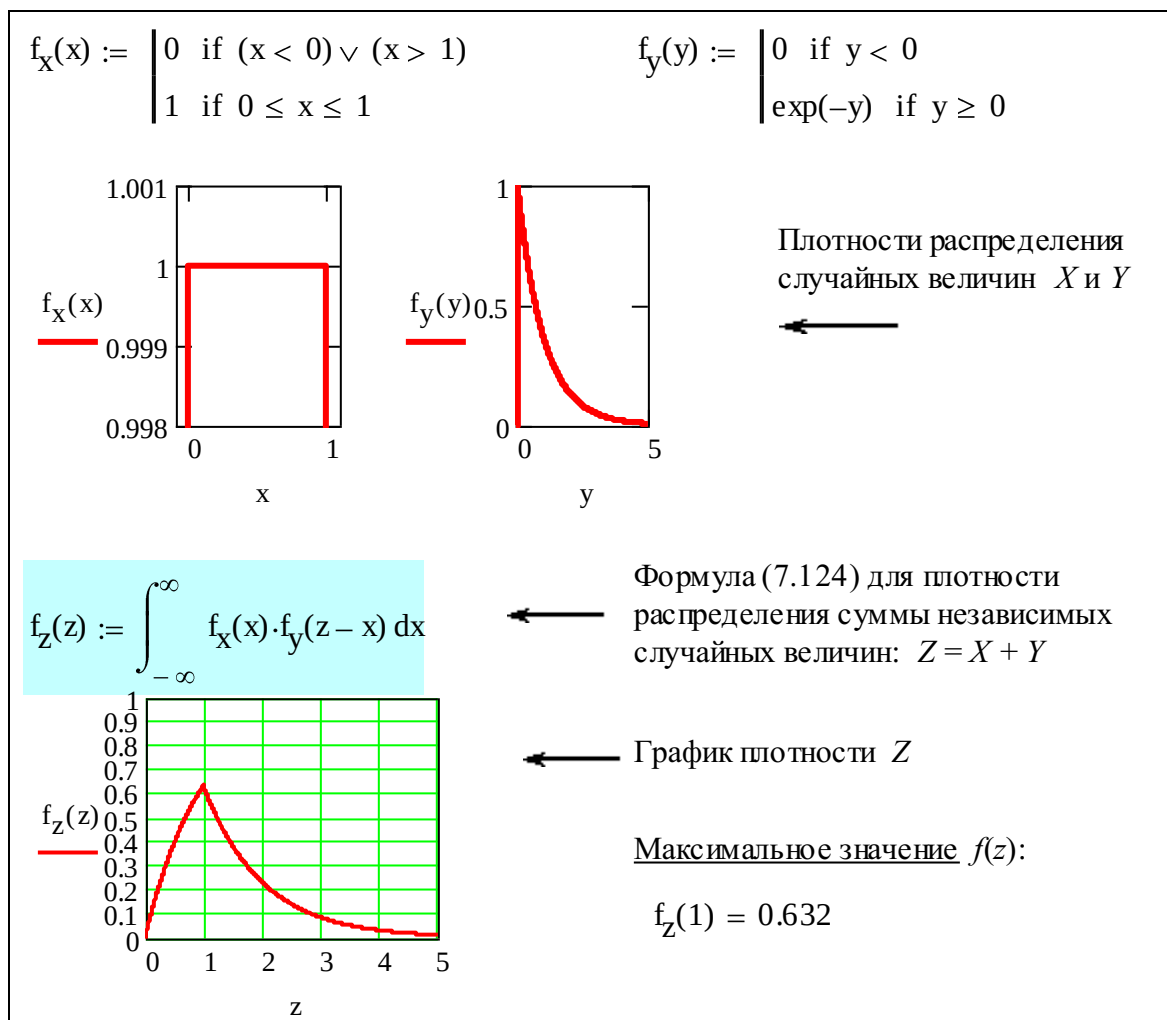


Рис. П.4.1. Решение примера 7.11

Исходные плотности задаются в терминах программных блоков Mathcad с условиями в виде булевых операторов. Результирующая плотность получается путем непосредственного использования свертки распределений (выражение выделено заливкой).

Производная и интеграл случайной функции

Производная случайной функции [7]

Обычное определение производной как предел приращения функции к приращению аргумента неприменимо к случайным функциям вследствие неприменимости обычного определения предела к случайным величинам. Действительно, для случайной функции $X(t)$ отношение

$$Y_{\Delta}(t) = [X(t + \Delta t) - X(t)] / \Delta t \quad (\text{П.5.1})$$

является случайной величиной. Задавая при фиксированном значении t последовательность Δt , сходящуюся к нулю, получим последовательность случайных величин. О пределе такой последовательности можно говорить только в вероятностном смысле или рассматривать ее сходимость в среднем квадратическом.

Сходимость в среднем квадратическом

Последовательность случайных величин $X_1, \dots, X_n, \dots$ называется сходящейся в среднем квадратическом к случайной величине X , если математическое ожидание квадрата модуля разности $X_n - X$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M[|X_n - X|^2] = 0. \quad (\text{П.5.2})$$

Случайная величина X называется **пределом в среднем квадратическом** последовательности случайных величин X_n :

$$X = \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} X_n, \quad (\text{П.5.3})$$

где символы, разделенные точками, обозначают начальные буквы фразы *limit in mean* (англ.) — «предел в среднем».

Последовательность случайных величин X_n , сходящаяся в среднем квадратическом к случайной величине X , всегда сходится к X и по вероятности (см. разд. 6.1, ч. I). На основании (6.3) из этого раздела имеем

$$P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq M[|X_n - X|^2] / \varepsilon^2,$$

откуда следует, что сходимость моментов второго порядка разностей $X_n - X$ к нулю влечет сходимость последовательности случайных величин X_n по вероятности к случайной величине X .

Производная случайной функции

Пусть имеется случайная функция $X(t)$ с заданными математическим ожиданием $m_X(t)$ и корреляционной функцией $K_X(t, t')$. Случайная функция $Y_1(t)$ называется производной случайной функции $X(t)$, если она является пределом

в среднеквадратическом последовательности случайных величин (П.5.1), т. е. справедливо соотношение

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} M[|Y_{\Delta}(t) - Y_1(t)|^2] = 0. \quad (\text{П.5.4})$$

Производная случайной функции обозначается $Y_1(t) = dX(t)/dt = \dot{X}(t)$. Из определения (П.5.4) следует, что производная случайной функции $X(t)$ есть предел в среднем квадратическом последовательности случайных величин $Y_{\Delta}(t)$, т. е.

$$\dot{X}(t) = \text{l.i.m.}_{\Delta t \rightarrow 0} Y_{\Delta}(t).$$

Доказаны (см. [7], гл. 8, § 53) следующие утверждения:

° необходимым и достаточным условиями существования производной $Y_1(t)$ случайной функции $X(t)$ являются дифференцируемость ее математического ожидания $m_x(t)$ и существование второй смешанной производной ее корреляционной функции $\partial^2 K_x(t, t') / \partial t \partial t'$;

° математическое ожидание производной $Y_1(t)$ случайной функции $X(t)$ равно производной ее математического ожидания $m_x(t)$:

$$M[Y_1(t)] = M[dX(t)/dt] = dm_x(t)/dt = \dot{m}_x(t); \quad (\text{П.5.5})$$

° корреляционная функция $K_{Y_1}(t, t')$ производной $Y_1(t)$ случайной функции $X(t)$ равна:

$$(t, t') = \partial^2 K_x(t, t') / \partial t \partial t'. \quad (\text{П.5.6})$$

Интеграл случайной функции [7]

Пусть, как и ранее, имеется случайная функция $X(t)$ с заданными математическим ожиданием $m_x(t)$ и корреляционной функцией $K_x(t, t')$.

Рассмотрим случайную функцию вида:

$$Z(s) = \int_T g(s, t) X(t) dt, \quad (\text{П.5.7})$$

где $g(s, t)$ — определенная функция, и найдем математическое ожидание и корреляционную функцию $Z(s)$.

Разобьем область интегрирования T на участки Δt_k и рассмотрим случайную последовательность $Z_{\Delta}(s) = \sum_k g(s, t_k) X(t_k) \Delta t_k$.

Функция (П.5.7) называется интегралом случайной функции $X(t)$ с функцией веса $g(s, t)$, распространенным на область T , если справедливо соотношение

$$\lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} M[|Z_{\Delta}(s) - Z(s)|^2] = 0. \quad (\text{П.5.8})$$

Отсюда следует, что $Z(s)$ — предел в среднем квадратическом последовательности случайных величин $Z_{\Delta}(s)$, т. е.

$$\int_T g(s, t) X(t) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_k g(s, t_k) X(t_k) \Delta t_k.$$

Доказано (см. [7], гл. 8, § 54), что необходимым и достаточным условиями существования интеграла $Z(s)$ случайной функции $X(t)$ являются существование двух интегралов:

$$m_z(s) = \int_T g(s, t) m_x(t) dt; \quad (\text{П.5.9})$$

$$K_z(s, s') = \int_T \int_T g(s, t) g(s', t') K_x(t, t') dt dt'. \quad (\text{П.5.10})$$

Функция $m_z(s)$ (П.5.9) называется математическим ожиданием интеграла $Z(s)$ (П.5.7) случайной функции $X(t)$. Из (П.5.9) следует, что

$$M \left[\int_T g(s, t) X(t) dt \right] = \int_T g(s, t) M[X(t)] dt. \quad (\text{П.5.11})$$

Функция $K_z(s, s')$ (П.5.10) называется корреляционной функцией интеграла $Z(s)$ (П.5.7) случайной функции $X(t)$.

Приведем примеры, которые относятся к главе 8, ч. I.

Пример 1. На вход динамического звена, которое описывается дифференциальным уравнением первого порядка, поступает белый шум w единичной интенсивности с нулевым математическим ожиданием:

$$a_1(t) \dot{X} + a_0(t) X = w; \quad X(t_0) = 0. \quad (\text{П.5.12})$$

Найти корреляционную функцию $K_x(t, t')$ случайной функции $X(t)$.

□ Решение. Для случайной функции $X(t)$ из (П.5.12) имеем:

$$X(t) = q_1(t) \int_{t_0}^t w(\tau) d\tau / [a_1(\tau) q_1(\tau)]; \quad q_1(t) = \exp \left\{ - \int_{t_0}^t [a_0(\tau) / a_1(\tau)] d\tau \right\}.$$

Учитывая, что на основании (П.5.9) математическое ожидание случайной функции $X(t)$ равно нулю, а корреляционная функция w (см. (8.64), ч. I) по условию равна $\delta(t - t')$, из формулы (П.5.10) имеем:

$$K_x(t, t') = q_1(t) q_1(t') \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} \frac{\delta(\tau - \tau') d\tau d\tau'}{a_1(\tau) q_1(\tau) a_1(\tau') q_1(\tau')}.$$

При $t < t'$ эта формула дает $K_x(t, t') = q_1(t) q_1(t') \int_{t_0}^t \frac{d\tau}{a_1^2(\tau) q_1^2(\tau)}.$

На основании полученных выражений и вследствие симметричности корреляционной функции, окончательно получаем:

$$K_x(t, t') = \begin{cases} q_1(t') q_2(t); & (t < t') \\ q_1(t) q_2(t'); & (t > t') \end{cases}; \quad q_2(t) = q_1(t) \int_{t_0}^t \frac{d\tau}{a_1^2(\tau) q_1^2(\tau)}.$$

В широко распространенном частном (см. первую строку табл. 8.1, ч. I), при $a_1 = 1/\sqrt{2\alpha\sigma^2}$; $a_0 = \sqrt{\alpha/2\sigma^2}$, $t_0 = -\infty$, получаем $q_1(t) = e^{-a_1 t}$, $q_2(t) = \sigma^2 e^{a_1 t}$ и корреляционную функцию

$$K_x(t, t') = \sigma^2 e^{-\alpha|t-t'|}, \quad (\text{П.5.13})$$

график которой изображен на рис. 8.6, ч. I.

Таким образом, случайную функцию (процесс) с экспоненциально коррелированной корреляционной функцией (П.5.13) можно получить в результате прохождения белого шума через линейное динамическое звено, поведение которого описывается дифференциальным уравнением (П.5.12). Передаточная функция такого звена равна $W(p) = k/(p + \alpha)$, $k = 1/a_1 = \sqrt{2\alpha\sigma^2}$; $\alpha = 1/T_\Pi$, где T_Π — постоянная времени экспоненты. ■

Пример 2. Найти дисперсию интеграла от экспоненциально коррелированного случайного процесса $X(t)$, корреляционная функция которого определяется формулой (П.5.13).

□ Решение. В данном случае выражение (П.5.7) имеет вид:

$$Z(s) = \int_0^s X(t) dt. \quad (\text{П.5.14})$$

Результат может быть получен несколькими способами.

1. Обозначая $D = \sigma^2$, на основании (10) получаем:

$$K_z(s, s') = D \int_0^{s'} \int_0^s e^{-\alpha|t-t'|} dt dt'; \quad D_z(s) = D \int_0^s \int_0^s e^{-\alpha|t-t'|} dt dt'.$$

После преобразований, для искомой дисперсии получаем:

$$D_z(s) = \frac{2D}{\alpha^2} (\alpha s + e^{-\alpha s} - 1). \quad (\text{П.5.15})$$

Решение этим способом в среде Mathcad приведено ниже.

$D \cdot \int_0^s \left[\int_0^t \exp[-\alpha \cdot (t - t_1)] dt_1 + \int_t^s \exp[-\alpha \cdot (t_1 - t)] dt_1 \right] dt \quad \left \begin{array}{l} \text{expand} \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow 2 \cdot D \cdot \frac{s \cdot \alpha + \exp[-s \cdot \alpha] - 1}{\alpha^2}$

2. Вторым способом решения данной задачи служит использование ковариационного уравнения (8.88). Принимая во внимание результат решения предыдущего примера, запишем исходную форму Коши (8.76) для нашего случая:

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2D\alpha} \end{bmatrix} w; \quad \mathbf{H} = [1 \ 0]; \quad \mathbf{P}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}. \quad (\text{П.5.16})$$

Здесь w — белый шум единичной интенсивности, $\mathbf{P}(0)$ — начальная ковариационная матрица (8.79).

Записывая с использованием (8.88) три дифференциальных уравнения для вторых центральных моментов и решая их с применением преобразования

Лапласа, нетрудно получить результирующее выражение (П. 5.15). Последовательность этапов этого решения приведена на рис. П. 5.1 с короткими комментариями. Дополнительно отметим, что элементы матрицы $\mathbf{P}$, обозначенные в первой строке рис. П. 5.1, учитывают, что интегрируется стационарный случайный процесс, дисперсия которого равна D . Во второй строке приведенного файла получают правые части дифференциальных уравнений для элементов ковариационной матрицы и задается единичная матрица $\mathbf{E}$. После формирования матриц $\mathbf{A}_p$, $\mathbf{B}_p$, $\mathbf{H}_p$ эквивалентной формы Коши и передаточной функции W решение получается путем обратного преобразования Лапласа.

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} := \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2 \cdot D \cdot \alpha} \end{pmatrix} \quad \mathbf{P} := \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & D \end{pmatrix}$$

Матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ исходной формы Коши и элементы ковариационной матрицы

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot P_{12} & D - \alpha \cdot P_{12} \\ D - \alpha \cdot P_{12} & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{E} := \text{identity}(3)$$

$$\mathbf{p} := \begin{pmatrix} P_{11} \\ P_{12} \\ P_{22} \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_p := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_p := \begin{pmatrix} 0 \\ D \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_p := (1 \ 0 \ 0)$$

Вектор состояний и матрицы эквивалентной формы Коши

$$\mathbf{W} := \mathbf{H}_p \cdot (s \cdot \mathbf{E} - \mathbf{A}_p)^{-1} \cdot \mathbf{B}_p \quad \mathbf{W} \rightarrow \frac{2}{s \cdot (s + \alpha)} \cdot D$$

$$\mathbf{D}_z(t) := \frac{1}{s} \cdot \mathbf{W} \quad \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace, s} \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow 2 \cdot D \cdot \frac{-1 + \alpha \cdot t + \exp(-\alpha \cdot t)}{\alpha^2}$$

Результат

Рис. П. 5.1. Решение примера с помощью ковариационного уравнения

Рассмотренный пример, в силу его сравнительной простоты, конечно, более рационально решать с применением формулы (П. 5.10). Однако в более сложных случаях, когда анализируются числовые характеристики реакций динамической системы на случайные воздействия, более приемлемым с практической точки зрения будет второй способ. Он позволяет достичь решения как аналитически (путем формирования передаточной функции и ее разложения на простые дроби в случае, когда эта функция сложна), так и численным интегрированием матричного ковариационного уравнения (8.88) или его эквивалентной формы Коши [17].

Марковские случайные процессы и последовательности

В общей теории систем, теории стохастического управления, в теории массового обслуживания широко распространены так называемые марковские случайные процессы и последовательности. Дадим краткое описание процессов этого типа.

В разд. 8, ч. I отмечалось, что полное описание случайного процесса $X(t)$ требует знания плотностей $f_{X_1 X_2 \dots X_m}(x_1, x_2, \dots, x_N)$ совместных распределений на интервале (t_0, t_N) , где N — любое целое число в диапазоне $[1, \infty)$, а $x_1 = X(t_1), \dots, x_N = X(t_N)$. В общем случае такое количество информации, которое потребовалось бы для описания случайного процесса $X(t)$, практически недоступно. В то же время большинство случайных процессов, которые встречаются в практических вероятностных задачах, могут требовать для своего описания значительно меньшего объема данных. К таким процессам относятся **марковские случайные процессы**.

Случайный процесс называется марковским, если для любых моментов времени $t_1 < t_2 < \dots < t_N$ условная плотность распределения сечения x_N , при условии, что известны $x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$, имеет свойство

$$f_{X_N}(x_N/x_{N-1}, \dots, x_1) = f_{X_N}(x_N/x_{N-1}).$$

Это определение можно сформулировать в терминах функций распределения:

$$P[X(t_N) \leq x_N / X(t_{N-1}) = x_{N-1}, \dots, X(t_1) = x_1] = P[X(t_N) \leq x_N / X(t_{N-1}) = x_{N-1}].$$

Из приведенных определений ясно, что если считать t_{N-1} текущим моментом времени, а $t_{N-2}, \dots, t_1$ — прошедшими, то вероятностный закон, описывающий процесс в будущем (т. е. в момент времени t_N), зависит только от текущего состояния процесса (в момент времени t_{N-1}) и совершенно не зависит от предыстории (т. е. от его поведения в моменты времени $t_{N-2}, \dots, t_1$).

Условная плотность вероятности $f_{X_N}(x_N/x_{N-1})$ определяет вероятностные свойства перехода процесса из состояния x_{N-1} в состояние x_N , поэтому эта плотность может быть названа плотностью перехода или **переходной плотностью**.

Нетрудно убедиться в том, что марковские процессы обладают следующим практически важным свойством.

Плотность $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ совместного распределения сечений марковского процесса на интервале (t_0, t_N) полностью определяется заданием плотности

распределения начального состояния $f(x_0)$ и плотностей переходов из состояния к состоянию.

Действительно, из определения условной плотности распределения имеем:

$$f_{x_1 \dots x_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) = f_{x_N}(x_N/x_{N-1}, \dots, x_1) f_{x_{N-1} \dots x_1}(x_{N-1}, \dots, x_1).$$

Для марковского процесса последнее равенство переписывается в форме:

$$f_{x_1 \dots x_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) = f_{x_N}(x_N/x_{N-1}) f_{x_{N-1} \dots x_1}(x_{N-1}, \dots, x_1).$$

Аналогично, для последнего сомножителя правой части этих выражений справедливо соотношение:

$$f_{x_{N-1} \dots x_1}(x_{N-1}, \dots, x_1) = f_{x_{N-1}}(x_{N-1}/x_{N-2}) f_{x_{N-2} \dots x_1}(x_{N-2}, \dots, x_1).$$

Повторяя эту процедуру, получаем

$$f_{x_N \dots x_1}(x_N, \dots, x_1) = f_{x_N}(x_N/x_{N-1}) f_{x_{N-1}}(x_{N-1}/x_{N-2}) \dots f_{x_1}(x_1/x_0) f_{x_0}(x_0)$$

Понятие марковского случайного процесса справедливо и для векторных случайных процессов.

Марковское свойство не служит строгим ограничением числа случайных процессов, относящихся к этому классу. Наоборот, можно говорить о весьма большой распространенности марковских случайных процессов в общем многообразии случайных процессов.

Например, к марковским относится случайный процесс $X(t)$, который описывается дифференциальным уравнением вида (см. прил. 5)

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + w(t),$$

где $w(t)$ — белый шум; $a(t)$ — неслучайная функция времени.

В то же время процесс $Z(t)$, который описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$\ddot{z}(t) = a(t)\dot{z}(t) + b(t)z(t) + w(t),$$

не может быть отнесен к марковским. Однако переменные $z(t)$ и $\dot{z}(t)$ можно рассматривать в качестве составляющих двумерного (векторного) случайного процесса $\mathbf{Z}(t)$, для которого справедлива следующая форма Коши:

$$\dot{\mathbf{Z}}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{Z}(t) + \mathbf{D}w(t);$$

$$\mathbf{C}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b(t) & a(t) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Компоненты такого векторного процесса обладают марковским свойством, что позволяет отнести векторный процесс $\mathbf{Z}(t)$ к марковским. Отмеченная возможность перехода от скалярных случайных процессов, которые описываются дифференциальными уравнениями высоких порядков, к системам дифференциальных уравнений соответствующего порядка определяет широкую распространенность марковских процессов в прикладных задачах анализа динамических систем со случайными возмущениями.

Винеровские случайные процессы

В начале XIX века английским ученым Р. Броуном был описан процесс хаотического перемещения элементарной частицы под воздействием ударов молекул в физических средах. Этот процесс получил название броуновского движения. Математическая модель подобного процесса перемещения частиц была позже предложена американским ученым Н. Винером, который показал, что броуновское движение характеризуется процессом с независимыми приращениями.

Для различных моментов времени $t_0, t_1, t_2, \dots, t_N$, разделенных интервалами $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ ($i = \overline{1, N}$), приращениями процесса $X(t)$ будем называть разности $X(t_i) - X(t_{i-1}) = \delta(t_i, t_{i-1})$.

Процессом $X(t)$ с независимыми приращениями называют такой процесс, для которого:

1. Начальное значение $X(t_0) = 0$.
2. Для любой последовательности моментов времени $t_0, t_1, t_2, \dots, t_N$ приращения $\delta(t_i, t_{i-1})$ имеют нулевые средние и являются независимыми, т. е., например:

$$M[\delta(t_2, t_1)] = M[\delta(t_4, t_3)] = 0; f[\delta(t_2, t_1), \delta(t_4, t_3)] = f[\delta(t_2, t_1)] f[\delta(t_4, t_3)].$$

Это определение можно распространить на случай векторного процесса с независимыми приращениями.

Разновидностями процессов с независимыми приращениями служат случайные процессы с некоррелированными приращениями, для которых

$$M[\delta(t_2, t_1)] = M[\delta(t_4, t_3)] = 0; M[\delta(t_2, t_1), \delta(t_4, t_3)] = 0,$$

и случайные процессы со стационарными приращениями, в которых приращения являются функциями только разностей моментов времени Δt_i .

Нетрудно видеть, что математическое ожидание случайного процесса с независимыми приращениями равно нулю:

$$m(t) = M[X(t)] = M[X(t) - X(t_0)] = 0; t \geq t_0.$$

В то же время анализ корреляционных свойств случайного процесса с независимыми приращениями $X(t)$ показывает, что эти процессы относятся к нестационарным. Действительно, запишем корреляционную функцию $X(t)$ для моментов времени, например, $t_2 \geq t_1$:

$$\begin{aligned} K(t_2, t_1) &= M[X(t_2)X(t_1)] = M\{[X(t_2) - X(t_1) + X(t_1) - X(t_0)][X(t_1) - X(t_0)]\} = \\ &= M[X(t_1) - X(t_0)][X(t_1) - X(t_0)] = D(t_1). \end{aligned}$$

Здесь $D(t_1)$ — дисперсия процесса $X(t)$ в момент времени t_1 , т. е. величина,

зависящая от времени. Для векторного процесса $\mathbf{X}(t)$ с независимыми приращениями аналогично можно показать, что его корреляционная матрица $\mathbf{K}(t_2, t_1) = \mathbf{D}(t_1)$, т. е. равна ковариационной матрице в момент времени t_1 . Зависимость вторых моментов распределения от времени свидетельствует о нестационарности процессов рассматриваемого типа.

Нормально распределенные случайные процессы с независимыми приращениями называют **винеровскими процессами** или процессами броуновского движения.

Примером скалярного случайного процесса винеровского типа служит процесс, описываемый дифференциальным уравнением вида [7, 12—14]:

$$\dot{x}(t) = w(t); \quad x(t_0) = 0,$$

где $w(t)$ — гауссов белый шум с нулевым средним и интенсивностью $q(t)$.

Эргодические случайные функции

Ранее отмечалось, что числовые характеристики случайной функции $X(t)$ в общем случае могут быть найдены путем соответствующего анализа ее сечений $X(t^*)$ для $t^* = \text{const}$, при котором используются данные по всему ансамблю возможных реализаций $X(t)$. Это относится как к нестационарным, так и к стационарным случайным функциям. Процедуры обработки результатов экспериментов с целью получения числовых характеристик случайных величин и функций рассмотрены в ч. II материала. Здесь отметим лишь некоторые особенности этих процедур.

Так, для стационарных случайных функций процедура определения математического ожидания или дисперсии предполагает взвешенное усреднение значений x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) случайной величины $X(t^*)$ и квадратов их отклонений от математического ожидания, причем n — число реализаций, полученных в результате эксперимента. Для особого подкласса стационарных случайных функций (процессов) процедуры усреднения по множеству реализаций можно заменить усреднением по времени. Этот подкласс составляют эргодические случайные функции.

Стационарную случайную функцию (процесс) $X(t)$ называют эргодической, если при определении ее любых числовых характеристик усреднение по множеству ее реализаций эквивалентно усреднению по времени одной бесконечно длинной реализации.

В этом определении неявно отмечено основное свойство эргодичности случайной функции, которое состоит в том, что каждая отдельная ее реализация репрезентативна, является носителем исчерпывающей информации обо всей совокупности ее реализаций. Таким образом, одна реализация достаточной продолжительности эргодической случайной функции может информационно заменить множество ее реализаций той же суммарной продолжительности.

Достаточным условием эргодичности случайной функции $X(t)$ служит стремление модуля ее корреляционной функции $K_X(\tau)$ к нулю при $|\tau| \rightarrow \infty$:

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} |K_X(\tau)| = 0.$$

На основании общей эргодической теоремы [7] для стационарной случайной функции $X(t)$, корреляционная функция которой неограниченно убывает при $|\tau| \rightarrow \infty$, имеет место предельное соотношение

$$\text{l.i.m}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt = m_X,$$

т.е. математическое ожидание эргодической случайной функции эквивалентно пределу в среднем квадратическом (см. прил. 5) среднего значения случайной функции по области T .

Это означает, что для оценки $\hat{m}_X$ математического ожидания эргодической случайной функции $X(t)$ можно воспользоваться вычислением среднего по времени достаточно продолжительной реализации:

$$\hat{m}_X = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt.$$

Это утверждение относится и к другим числовым характеристикам, для получения которых используется оператор математического ожидания. Так, корреляционная функция процесса $X(t)$ выражается математическим ожиданием произведения центрированных функций $X^0(t)X^0(t+\tau)$, причем $X^0(t+\tau)$ определена на интервале $t+\tau \leq T$, поэтому для оценки корреляционной функции эргодического случайного процесса можно воспользоваться соотношениями вида:

$$\hat{K}_X(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} X^0(t)X^0(t+\tau)dt = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} X(t)X(t+\tau)dt - (\hat{m}_X)^2.$$

Эта формула при $\tau=0$ может быть использована и для оценки дисперсии.

На практике решение о принадлежности исследуемой случайной функции к подклассу эргодических функций удастся обосновать не всегда. Это, как правило, связано с ограниченностью длины реализации, что влияет на достоверность оценки корреляционной функции, не позволяя определить ее характер при больших значениях интервала τ между сечениями случайной функции. Однако, стремление $K_X(\tau)$ к нулю при увеличении τ служит обычно веским основанием для заключения о наличии у исследуемой функции эргодического свойства. Если же корреляционная функция $K_Z(\tau)$ случайного процесса $Z(t)$, убывая, стремится к ненулевому постоянному значению, такая функция не может быть отнесена к эргодическим.

Например, случайная функция $Z(t) = X(t) + Y$ с независимыми слагаемыми, причем $X(t)$ — эргодическая функция, а Y — случайная величина, не может быть причислена к эргодическим. Действительно, согласно свойствам суммы независимых случайных функций, для $Z(t)$ имеем:

$$m_Z(t) = m_X(t) + m_Y; \quad K_Z(\tau) = K_X(\tau) + \sigma_Y^2.$$

Отсюда следует, что каждая реализация $Z(t)$ будет иметь среднее значение, зависящее от того, какое значение примет в этой реализации случайная величина Y , а корреляционная функция $Z(t)$ будет иметь установившееся значение, равное дисперсии Y , что не соответствует условиям эргодичности.

Распределение хи-квадрат

Пусть $z_1, z_2, \dots, z_n$ — независимые случайные величины, каждая из которых распределена нормально с нулевым средним и единичной дисперсией.

Определим новую непрерывную случайную величину

$$X(n) = (z_1)^2 + (z_2)^2 + \dots + (z_n)^2. \quad (\text{П.9.1})$$

Случайная величина $X(n)$ носит название величины хи-квадрат с n степенями свободы. Число степеней свободы n есть число независимых, или «свободных», значений квадратов величин, входящих в сумму (П.9.1).

На основании разд. 5.7 и 7.9 (ч. I), в которых рассматривались распределение функций случайных величин и проблема композиции законов распределений, можно показать, что случайная величина $X(n)$ имеет плотность распределения вида:

$$f_X(x) = [2^{n/2} \Gamma(n/2)]^{-1} x^{(n/2)-1} \exp(-x/2) \text{ при } x > 0; \\ f_X(x) = 0 \text{ при } x \leq 0. \quad (\text{П.9.2})$$

Распределение с плотностью (П.9.2) носит название **распределения хи-квадрат с n степенями свободы**.

В выражении (П. 9.2) $\Gamma(\alpha)$ — **гамма-функция** Эйлера:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx; \quad \Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha); \quad \Gamma(n) = (n-1)! \text{ при } n = 1, 2, 3, \dots$$

Пользуясь приведенными выражениями, можно показать, что математическое ожидание и дисперсия случайной величины с распределением хи-квадрат (П.9.2) равны:

$$M(X(n)) = n; \quad D(X(n)) = 2n.$$

Практически важным служит следующее свойство распределения хи-квадрат: сумма независимых случайных величин X_i , распределенных по закону хи-квадрат с числом степеней свободы n_i каждая, также имеет распределение хи-квадрат, число степеней свободы которого равно сумме n_i .

В системах Mathcad предусмотрены встроенные функции [17] для вычисления характеристик распределением хи-квадрат (П.9.2):

dchisq (x, d) — для плотности распределения (П.9.2);

pchisq (x, d) — для функции распределения;

qchisq (p, d) — для квантили порядка p ;

rchisq (m, d) — для получения $(m \times 1)$ -вектора независимых случайных чисел с распределением хи-квадрат (П.9.2).

В перечисленных встроенных функциях d — число степеней свободы.

На рис. П.9.1 представлены кривые плотностей и функций распределений

хи-квадрат с числом степеней свободы $d = 5$ и $d = 10$, отражающие характер влияния этого параметра распределения на вид кривых.

$x := 0, 0.5 \dots 30$ $f(x, d) := \text{dchisq}(x, d)$

$p(x, d) := \text{pchisq}(x, d)$

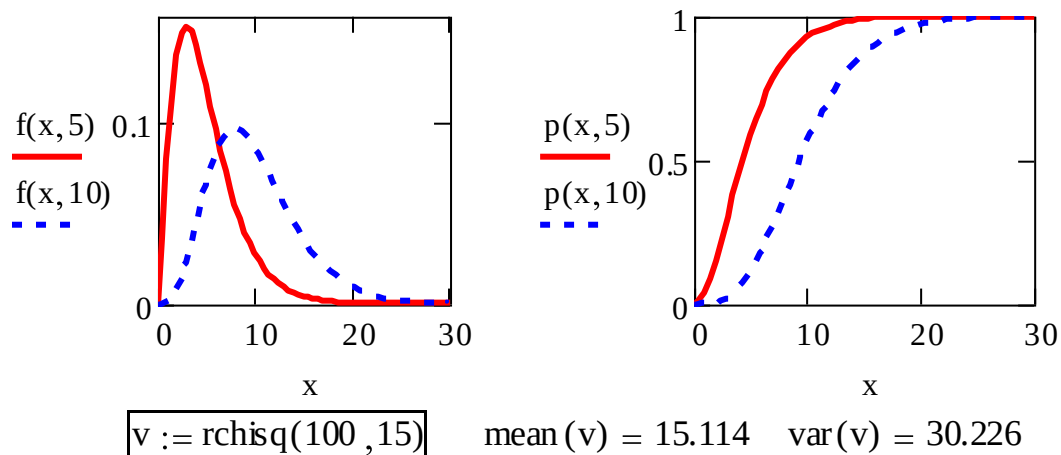


Рис. П.9.1. Характеристики распределения хи-квадрат

Из левого графика (см. рис. П.9.1) следует, что плотности распределения хи-квадрат несимметричны и унимодальны. С ростом числа степеней свободы график плотности смещается вправо, что сопровождается снижением максимума.

В нижней части рис. П.9.1 с помощью встроенной функции **rchisq** сформирована выборка **v** (объемом 100) из случайной величины, имеющей распределение хи-квадрат с 15-ю степенями свободы. Определены выборочное среднее (15.114) и выборочная дисперсия (30.226), которые достаточно близки к теоретическим значениям математического ожидания (15) и дисперсии (30).

Распределение Стьюдента (*t*-распределение)

Пусть X и Y — независимые случайные величины, причем X имеет нормированное нормальное распределение, т. е. $X \sim N(0, 1)$, а Y распределена по закону хи-квадрат с n степенями свободы.

Определим функцию случайных аргументов X и Y вида $T(n) = X / \sqrt{Y/n}$, значения которой соответствуют:

$$t(n) = x / \sqrt{y/n}. \quad (\text{П.10.1})$$

Случайная величина $T(n)$ имеет следующую плотность распределения:

$$f_t(n) = \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\sqrt{\pi n} \Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}. \quad (\text{П.10.2})$$

Здесь $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx; \quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha); \quad \Gamma(n) = (n-1)! \text{ при } n = 1, 2, 3,$$

Распределение случайной величины $T(n)$ носит название распределения **Стьюдента** (или ***t*-распределения**) с n степенями свободы.

Распределение Стьюдента имеет особенности:

- плотность вероятности распределения Стьюдента симметрична относительно начала координат. Это означает, например, что квантили t_p и t_{1-p} порядков p и $(1-p)$ связаны соотношением вида: $t_p = -t_{1-p}$;
- при $n > 1$ математическое ожидание $T(n)$ равно нулю;
- дисперсия $T(n)$ равна $n/(n-2)$; $n > 2$.

В системах Mathcad предусмотрены встроенные функции [17] для вычисления характеристик распределения Стьюдента (П.10.2):

dt (x, d) — для плотности распределения (П.10.2);

pt (x, d) — для функции распределения;

qt (p, d) — для квантили порядка p ;

rt (m, d) — для получения $(m \times 1)$ -вектора независимых случайных чисел с *t*-распределением (П.10.2).

В перечисленных встроенных функциях d — число степеней свободы.

На рис. П.10.1 представлены кривые плотностей и функций распределения Стьюдента с числом степеней свободы $d = 3$ и $d = 100$, отражающие характер влияния этого параметра распределения на вид кривых.

Из левого графика (см. рис. П.10.1) следует, что плотности распределения Стьюдента симметричны и унимодальны. По виду они близки к кривым плотности нормированного нормального распределения, однако плотности распре-

деления Стьюдента убывают медленнее, чем плотности нормального распределения. С ростом числа степеней свободы максимум плотности вероятностей t -распределения увеличивается.

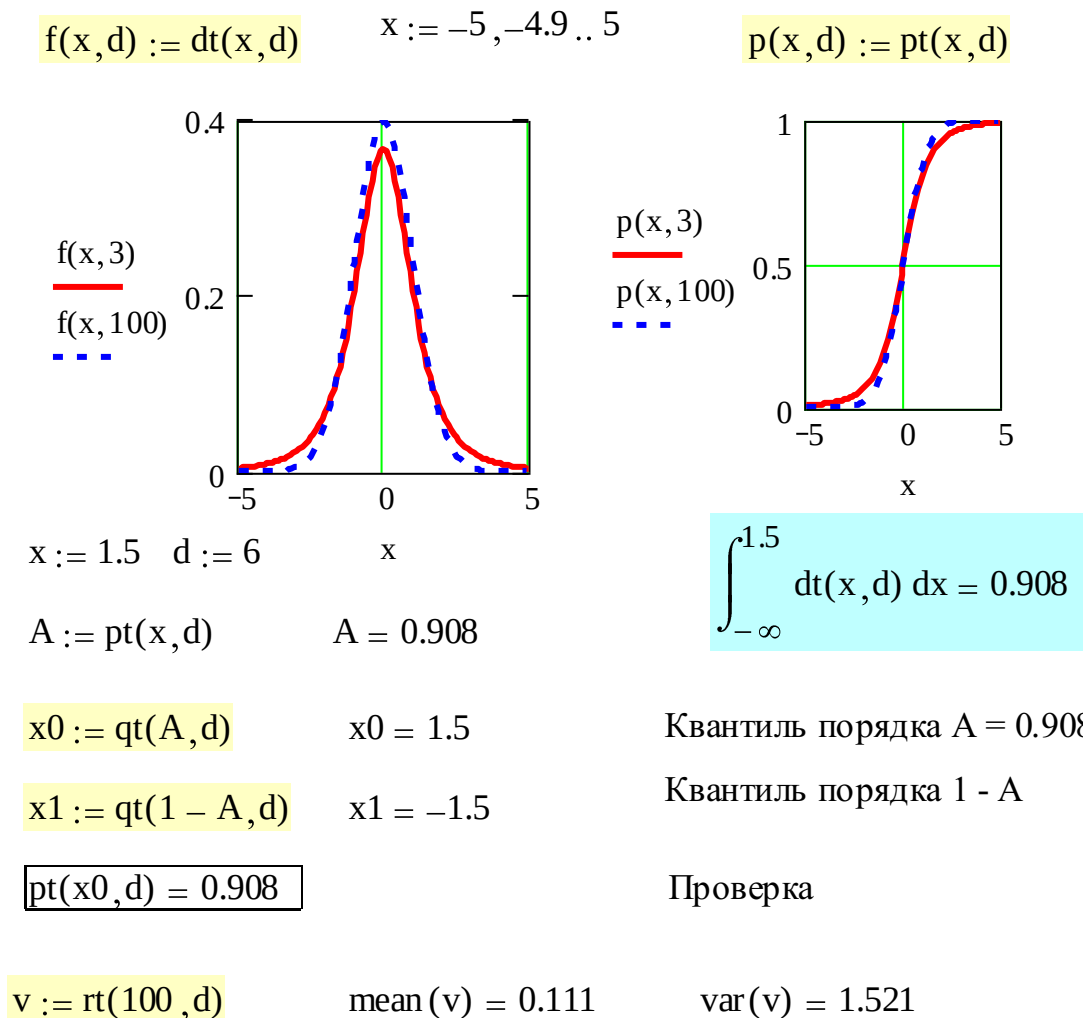


Рис. П.10.1. Характеристики распределения Стьюдента

В нижней части рис. П.10.1 с применением встроенной функции **qt** вычисляются квантили t -распределения с 6 степенями свободы порядков $A = 0.908$ и $(1 - A)$, которые равны 1.5 и (-1.5) соответственно.

Проверка вычисленных квантилей производится путем вычисления функции t -распределения с применением встроенной функции **pt**.

В последней строке (см. рис. П.10.1) с помощью встроенной функции **rt** сформирована выборка из случайной величины, имеющей t -распределение с 15 степенями свободы объемом 100. С помощью встроенных функций **mean** и **var** определены: выборочное среднее (0.111) и выборочная дисперсия (1.521). Теоретическое значение математического ожидания равно 0, а дисперсия для принятых данных должна составлять 1.5.

Распределение Фишера (F -распределение)

Пусть X_1 и X_2 — независимые случайные величины, распределенные по закону хи-квадрат с n_1 и n_2 степенями свободы соответственно.

Определим следующее отношение:

$$W(n_1, n_2) = \frac{X_1/n_1}{X_2/n_2} = \frac{X_1 n_2}{X_2 n_1}. \quad (\text{П.11.1})$$

Случайная величина (П.11.1) $W(n_1, n_2)$ имеет следующую плотность распределения:

$$f_W(n_1, n_2) = \frac{\Gamma[(n_1 + n_2)/2](n_1/n_2)^{n_1/2} F^{(n_1/2)-1}}{\Gamma(n_1/2) \Gamma(n_2/2) (1 + F n_1/n_2)^{(n_1 + n_2)/2}}, \text{ при } W > 0; \quad (\text{П.11.2})$$

$$f_W(n_1, n_2) = 0, \text{ при } W \leq 0.$$

Здесь $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера.

Распределение случайной величины $W(n_1, n_2)$ носит название распределения **Фишера** с n_1 и n_2 степенями свободы.

Распределение Фишера имеет особенности:

- плотность вероятности распределения Фишера несимметрична относительно начала координат и унимодальна;
- при $n_2 > 2$ математическое ожидание $F(n_1, n_2)$ равно $n_2 / (n_2 - 2)$;
- при $n_2 > 4$ дисперсия $F(n_1, n_2)$ равна

$$2n_2^2 (n_1 + n_2 - 2) / n_1 (n_2 - 2)^2 (n_2 - 4);$$

- дробь, обратная отношению (П.11.1), представляет случайную величину, имеющую распределение Фишера, причем числа степеней свободы меняются местами. Это свойство связывает квантили $F_p(n_1, n_2)$ и $F_{1-p}(n_2, n_1)$ распределения Фишера порядков p и $(1 - p)$ следующим соотношением:

$$1/F_p(n_1, n_2) = F_{1-p}(n_2, n_1). \quad (\text{П.11.3})$$

В системах Mathcad предусмотрены встроенные функции [17] для вычисления характеристик распределения Фишера (П.11.2):

dF (x, n_1, n_2) — для плотности распределения (П.11.2);

pF (x, n_1, n_2) — для функции распределения;

qF (p, n_1, n_2) — для квантили порядка p ;

rF (m, n_1, n_2) — для получения $(m \times 1)$ -вектора независимых случайных чисел с F -распределением (П.11.2).

На рис. П.11.1 представлены кривые плотностей (верхний график) и функций (нижний график) распределения Фишера с числом степеней свободы $n_1 = 5$, $n_2 = 5$; $n_1 = 5$, $n_2 = 50$; $n_1 = 10$, $n_2 = 50$, отражающие характер влияния этих параметров на форму кривых.

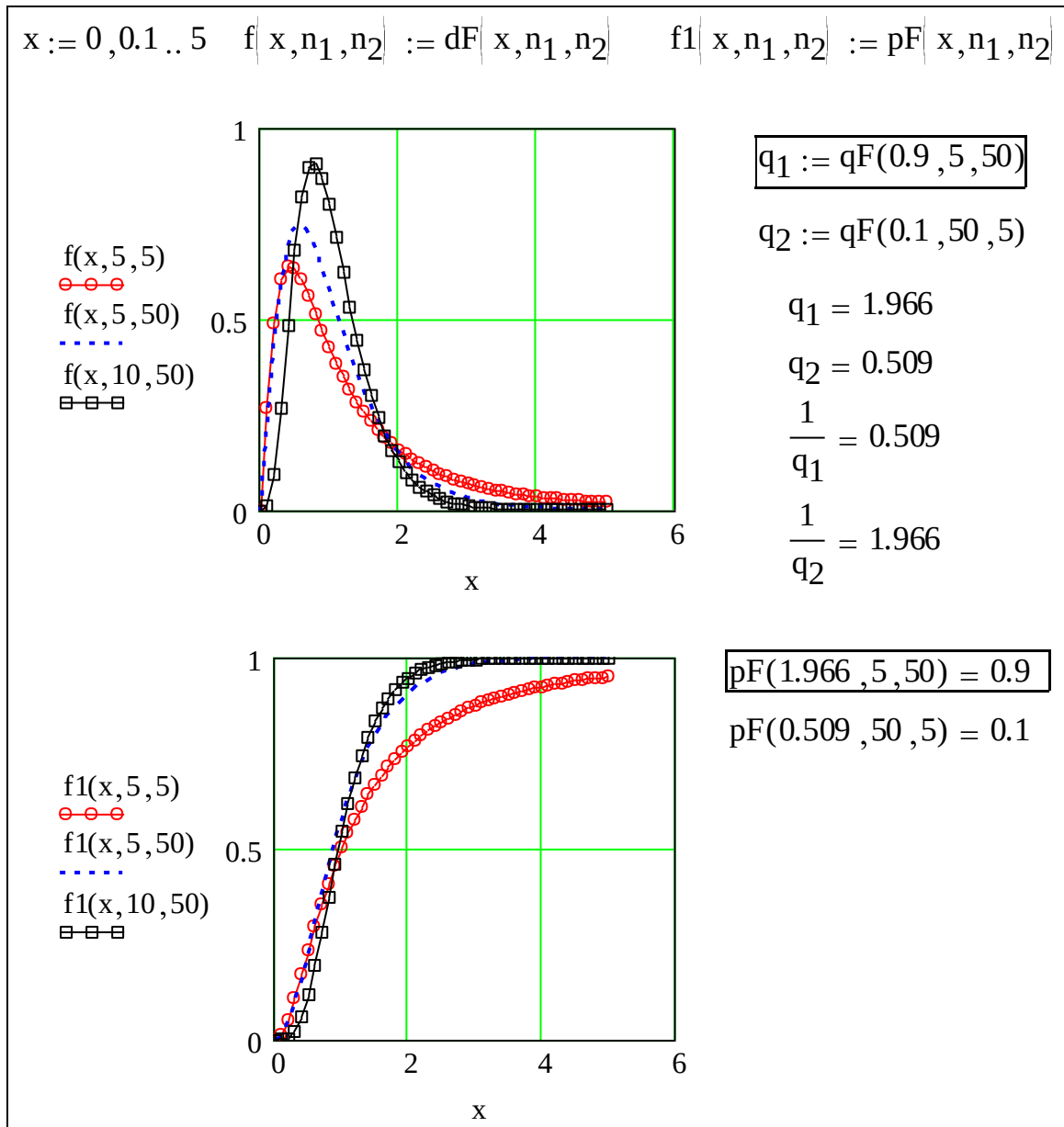


Рис. П.11.1. Характеристики распределения Фишера

Справа от верхнего графика рис. П.11.1 с применением встроенной функции **qF** вычисляются квантили распределения Фишера с 5 и 50 степенями свободы порядков 0.9 и 0.1, иллюстрирующие свойство (П.11.3).

Проверка вычисленных квантилей производится путем вычисления функции распределения Фишера с применением встроенной функции **pF**.

Символьный анализ оценок максимального правдоподобия

Функция правдоподобия в примере нахождения ОМП параметров нормального распределения (см. пример 2.5, *разд. 2.6.2, ч. II*) имеет вид:

$$\text{Ln}(L) = -n \text{Ln}(\sigma) + \text{Ln}[1 / (\sqrt{2\pi})^n] - \sum_i (x_i - a)^2 / 2\sigma^2.$$

Получим первые и вторые производные этой функции по искомым параметрам с использованием операторов символьных вычислений Mathcad. На рис. П.12.1 приведен анализ производных по первому параметру (a), причем функция правдоподобия в принятой форме выделена рамкой. Последовательно получаемые производные сопровождаются краткими комментариями, которые отмечены заливкой.

Нетрудно видеть, что смешанная производная (недиагональный элемент матрицы Гессе $\mathbf{H}$) в точке $\hat{a} = \bar{x}_B$, $\hat{D} = D_B$ (2.61) равна нулю, а вторая производная по параметру a (верхний диагональный элемент $\mathbf{H}$) — сугубо отрицательная величина.

$fa(a, D) := -n \cdot \ln \sqrt{D} + \ln\left[\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\right] - \frac{\sum_{i=1}^n x_i - a ^2}{2 \cdot D}$	
$\frac{d}{da} fa(a, D) \text{ simplify} \rightarrow \frac{-\left(n \cdot a - \sum_{i=1}^n x_i\right)}{D}$	Первая производная по параметру a
$\frac{d}{dD} \frac{d}{da} fa(a, D) \text{ simplify} \rightarrow \frac{n \cdot a - \sum_{i=1}^n x_i}{D^2}$	Смешанная производная
$\frac{d^2}{da^2} fa(a, D) \text{ substitute } D = D_B \rightarrow \frac{-n}{D_B}$	Вторая производная по параметру a в точке экстремума

Рис. П.12.1. Анализ производных по a

При анализе производных по второму параметру в исходной функции правдоподобия целесообразно сделать упрощающие подстановки. Это можно осуществить с элементами, не содержащими параметр D . Так, числитель последнего слагаемого, в силу (2.61), может быть заменен на произведение nD_B . Результаты анализа производных по параметру D представлены на рис. П.12.2, в нижней части которого приведена матрица Гессе для точки (2.61).

$$\boxed{\text{fd}(a, D) := -n \cdot \ln |\sqrt{D}| + \ln \left[\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \right]^n - \frac{n \cdot D_B}{2 \cdot D}}$$

$$\frac{d}{dD} \text{fd}(a, D) \text{ simplify} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot n \cdot \frac{(-D) + D_B}{D^2} \quad \text{Первая производная по параметру } D$$

$$\frac{d^2}{dD^2} \text{fd}(a, D) \text{ substitute } D = D_B \rightarrow \frac{-1}{2} \cdot \frac{n}{D_B^2} \quad \text{Вторая производная по параметру } D \text{ в точке экстремума}$$

$$H := \begin{pmatrix} \frac{-n}{D_B} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} \cdot \frac{n}{D_B^2} \end{pmatrix} \quad \text{Результирующая структура матрицы Гессе}$$

Рис. П.12.2. Анализ производных по D и матрица Гессе

Полученная матрица Гессе — отрицательно определенная, что подтверждает получение максимума в точке (2.61).

Некоторые распределения непрерывных случайных величин

В главах 3 и 5 (ч. I) были рассмотрены основные распределения дискретных и непрерывных случайных величин, среди которых: биномиальное (разд. 3.1, 5.4), Пуассона (разд. 3.4, 5.5), геометрическое (разд. 5.6); равномерное (разд. 5.1), нормальное (разд. 5.2), экспоненциальное (разд. 5.3).

В прил. 9, 10, 11 рассмотрены распределения хи-квадрат, Стьюдента, Фишера, которые широко применяются при решении задач интервального оценивания и проверки статистических гипотез (см. главы 3, 4, ч. II).

Кроме этих законов распределения, в практике вероятностного анализа достаточно часто встречаются также гамма-распределение, распределения Коши, Вейбулла, Максвелла, Эрланга, Рэлея, логнормальное распределение и др. Основные характеристики этих распределений с краткими комментариями и иллюстрациями приводятся ниже в этом приложении. Эти сведения дополняются теми встроенными функциями систем Mathcad, которые могут быть использованы для получения характеристик этих распределений.

Гамма-распределение

Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ — независимые случайные величины, имеющие показательное распределение с параметром λ . На основании разд. 7.9, ч. I, в котором рассматривалась проблема композиции законов распределений, можно показать, что сумма таких случайных величин имеет плотность распределения вида:

$$f_X(x) = (\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}) / \Gamma(\alpha) \text{ при } x \geq 0; f_X(x) = 0 \text{ при } x < 0. \quad (\text{П.13.1})$$

Распределение с плотностью (П.13.1) носит название **двухпараметрического гамма-распределения**. В выражении (П.13.1) параметры $\lambda > 0$, $\alpha > 0$ — масштабирующий множитель и параметр формы гамма-распределения соответственно; $\Gamma(\alpha)$ — **гамма-функция** Эйлера:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx; \Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha); \Gamma(n) = (n-1)! \text{ при } n = 1, 2, 3, \dots$$

Пользуясь приведенными выражениями, нетрудно показать, что математическое ожидание и дисперсия случайной величины с гамма-распределением (П.13.1) имеют вид: $M(X) = \alpha / \lambda$; $\sigma_X^2 = \alpha / \lambda^2$.

Так, для математического ожидания имеем:

$$M(X) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \lambda^\alpha x^\alpha e^{-\lambda x} dx = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\lambda \Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\lambda}.$$

Здесь использована подстановка вида $t = \lambda x$, $dx = dt/\lambda$, для которой

$$\int_0^{\infty} \lambda^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda}.$$

Аналогично доказывается справедливость выражения для дисперсии

$$\sigma_x^2 = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

На рис. П.13.1, а приведены плотности гамма-распределения для ряда значений параметров α и λ , позволяющих оценить влияние этих параметров на характер плотности распределения (П.13.1). Данные получены в среде Mathcad.

$$f(x, \lambda, \alpha) := \frac{\lambda^{\alpha} x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \exp[-\lambda \cdot x]$$

$$f1(x) := f(x, 0.5, 1)$$

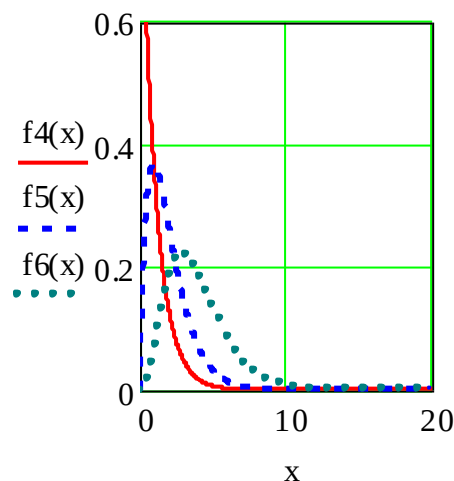
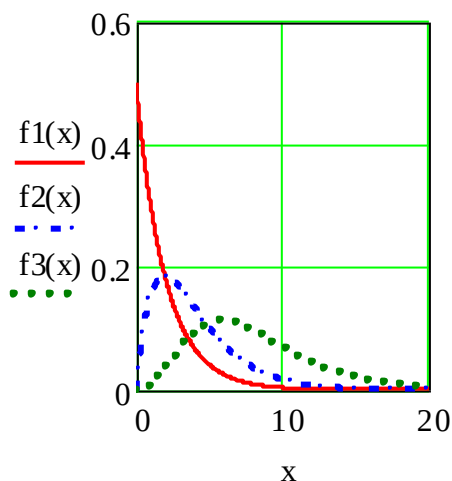
$$f2(x) := f(x, 0.5, 2)$$

$$f3(x) := f(x, 0.5, 4)$$

$$f4(x) := f(x, 1, 1)$$

$$f5(x) := f(x, 1, 2)$$

$$f6(x) := f(x, 1, 4)$$



$$f0(x) := \text{dgamma}(x, 4)$$

$$f0(5) = 0.14037$$

$$f6(5) = 0.14037$$

Рис. П.13.1, а. Плотности двухпараметрического гамма-распределения

При $\lambda = 1$ получаем **однопараметрическое** гамма-распределение, плотность которого, в силу (П.13.1), имеет вид:

$$f_0(z) = (z^{\alpha-1} e^{-z}) / \Gamma(\alpha) \text{ при } z \geq 0; \quad f(z) = 0 \text{ при } z < 0. \quad (\text{П.13.2})$$

В системах Mathcad предусмотрены встроенные функции [17] для вычисления характеристик однопараметрического гамма-распределения:

dgamma (z, α) — для плотности распределения (П.13.2);

pgamma (z, α) — для функции распределения;

qgamma (p, α) — для квантили порядка p ;

rgamma (n, α) — для получения $(n \times 1)$ -вектора независимых случайных чисел с гамма-распределением.

В нижней части рис. П.13.1, *а* функция **dgamma** (*x*, *a*) использована для вычисления значения плотности при $\alpha = 4$ и $x = 5$.

Перечисленные встроенные функции однопараметрического распределения могут быть использованы для получения одноименных характеристик двухпараметрического распределения с плотностью (П.13.1). Действительно, на основании (5.56) *разд. 5.7, ч. I*, случайная величина X с плотностью распределения (П.13.1) может быть получена из случайной величины Z с плотностью вероятностей (П.13.2) посредством функционального преобразования $X = Z / \lambda$.

Учитывая, что $Z = \lambda X$ имеет плотность вероятностей $f_0(z)$ (П.13.2), из (5.56) имеем:

$$f_X(x) = f_0(z) \cdot \left| \frac{dz}{dx} \right| = f_0[\Psi(x)] \cdot \left| \frac{d[\Psi(x)]}{dx} \right|; x = z / \lambda; \Psi(x) = \lambda x. \quad (\text{П.13.3})$$

Подставляя в $f_X(x)$ (П.13.3) выражение для $f_0[\lambda x]$ (П.13.2), получаем:

$$f_X(x) = \lambda f_0(\lambda x) = \lambda (\lambda x)^{\alpha-1} e^{-\lambda x} / \Gamma(\alpha), \quad (\text{П.13.4})$$

что полностью соответствует выражению (П.13.1) для плотности двухпараметрического гамма-распределения.

В соответствии с (П.13.1)—(П.13.4) квантили $q_0(p, \alpha)$ порядка p однопараметрического гамма-распределения связаны с квантилями $q(p, \alpha, \lambda)$ того же порядка двухпараметрического распределения соотношением

$$q(p, \alpha, \lambda) = q_0(p, \alpha) / \lambda. \quad (\text{П.13.5})$$

На рис. П.13.1, *б* представлен фрагмент *mcd*-файла, изображенного на рис. П.13.1, *а*, с результатами вычисления квантили двухпараметрического гамма-распределения порядка $p = 0.9$ для $\alpha = 2$ и $\lambda = 0.5$. С этой целью вначале квантиль находится из решения нелинейного уравнения (результат, полученный вычислительным блоком с ключевыми словами **given** и **find**, отмечен заливкой), а затем используется выражение (П.13.5), в котором квантиль однопараметрического гамма-распределения $q_0(p, \alpha)$ вычислен с применением встроенной функции **qgamma**. Результаты этих двух способов, как указывалось выше, совпадают; искомое значение равно 7.779.

$q := 1$ Given	$\int_0^q f(x, 0.5, 2) dx = 0.9$	Find (<i>q</i>) = 7.779
$\lambda := 0.5$ $\alpha := 2$	$\frac{\text{qgamma}(0.9, \alpha)}{\lambda} = 7.779$	

Рис. П.13.1, б. Вычисление квантили гамма-распределения (П.13.1)

Из гамма-распределения с плотностью (П.13.1) могут быть получены другие распределения: экспоненциальное распределение ($\alpha = 1$); распределение **Эрланга** (при целых $\alpha = 1, 2, 3, \dots$); распределение **хи-квадрат** с m степенями свободы ($\alpha = m/2$), где m — нечетное целое, и $\lambda = 0.5$.

Распределение Вейбулла

Распределению Вейбулла также описывает свойства неотрицательных случайных величин. Оно применяется при анализе надежности технических систем [6]. Плотность распределения Вейбулла имеет вид:

$$f_X(x) = \lambda \alpha x^{\alpha-1} \exp(-\lambda x^\alpha) \text{ при } x \geq 0; f_X(x) = 0 \text{ при } x < 0.$$

Здесь $\lambda > 0$, $\alpha > 0$ — масштабирующий множитель и параметр формы распределения Вейбулла соответственно (рис. П.13.2).

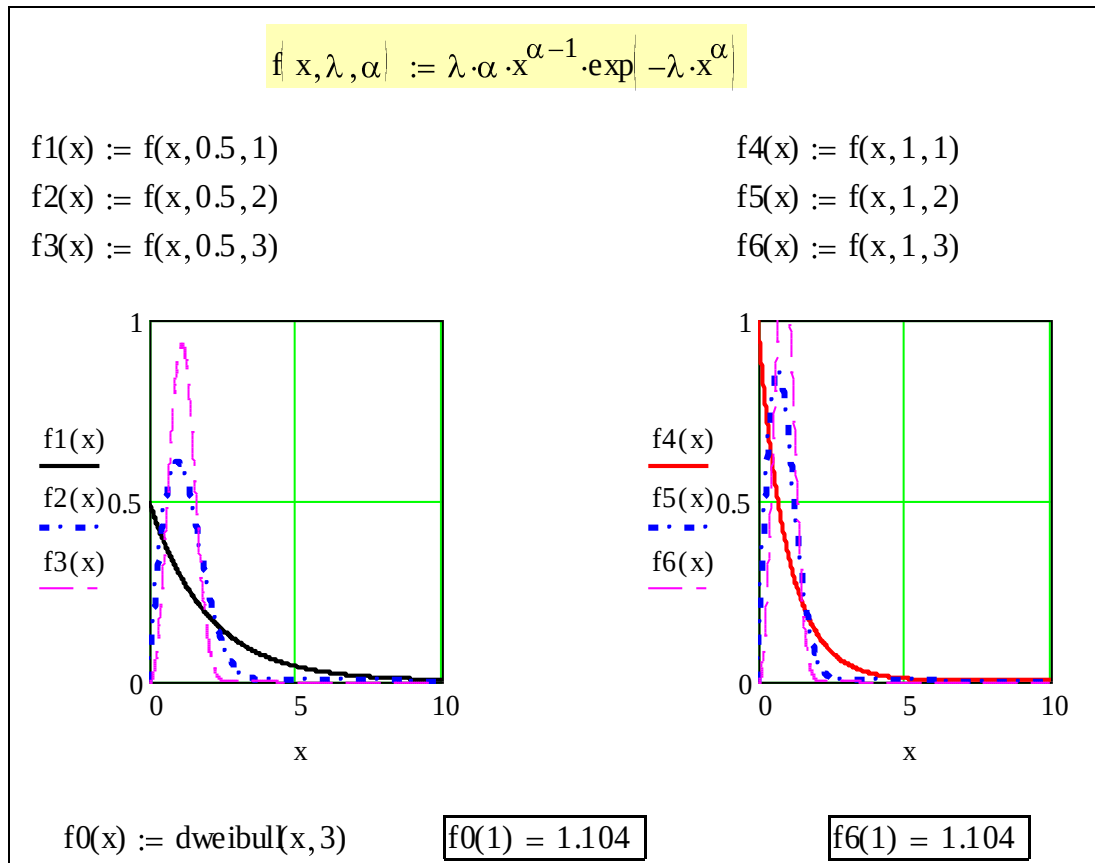


Рис. П.13.2. Плотности распределения Вейбулла

Математическое ожидание величины X , распределенной по закону Вейбулла, найдем с помощью подстановки вида:

$$t = \lambda x^\alpha; dt = \frac{t\alpha}{x} dx = t\alpha t^{1/\alpha} \lambda^{-1/\alpha} dx;$$

$$M(X) = \int_0^\infty \lambda \alpha x^\alpha e^{-\lambda x^\alpha} dx = \lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \int_0^\infty \frac{1}{t^\alpha} e^{-t} dt = \lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \Gamma(1 + \alpha^{-1}).$$

Дисперсия X равна:

$$\sigma_x^2 = M(X^2) - [M(X)]^2 = \lambda^{-\frac{2}{\alpha}} \left\{ \Gamma(1 + 2\alpha^{-1}) - \left[\Gamma(1 + \alpha^{-1}) \right]^2 \right\}.$$

На рис. П.13.2 приведены плотности распределения Вейбулла для ряда значений параметров, полученные в среде Mathcad.

Для получения характеристик распределения Вейбулла при $\lambda = 1$ в системах Mathcad предусмотрены следующие встроенные функции [17]:

dweibull (x, α) — для плотности распределения;

pweibull (x, α) — для функции распределения;

qweibull (p, α) — для квантили по заданной вероятности P ;

rweibull (n, α) — для получения $(n \times 1)$ -вектора независимых случайных чисел с распределением Вейбулла.

В нижней части рис. П.13.2 функция **dweibull** (x, α) использована для вычисления значения плотности при $\alpha = 3$ и $x = 1$.

При $\alpha = 1$ распределение Вейбулла трансформируется в экспоненциальное распределение; при $\alpha = 2$ — в распределение Рэлея.

Распределение Рэлея

Распределение этого типа (рис. П.13.3) встречается в задачах анализа суммы ряда гармонических колебаний различной частоты, оценки разброса снарядов при стрельбе по круговым целям на плоскости.

$$f(x, \lambda, \alpha) := \lambda \cdot \alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot \exp(-\lambda \cdot x^\alpha) \quad \lambda := \frac{1}{2 \cdot \sigma^2} \quad \alpha := 2$$

$$f(x, \lambda, \alpha) \rightarrow \frac{1}{\sigma^2} \cdot x \cdot \exp\left(-\frac{1}{2 \cdot \sigma^2} \cdot x^2\right) \quad f(r, \sigma) := \frac{1}{\sigma^2} \cdot r \cdot \exp\left(-\frac{1}{2 \cdot \sigma^2} \cdot r^2\right)$$

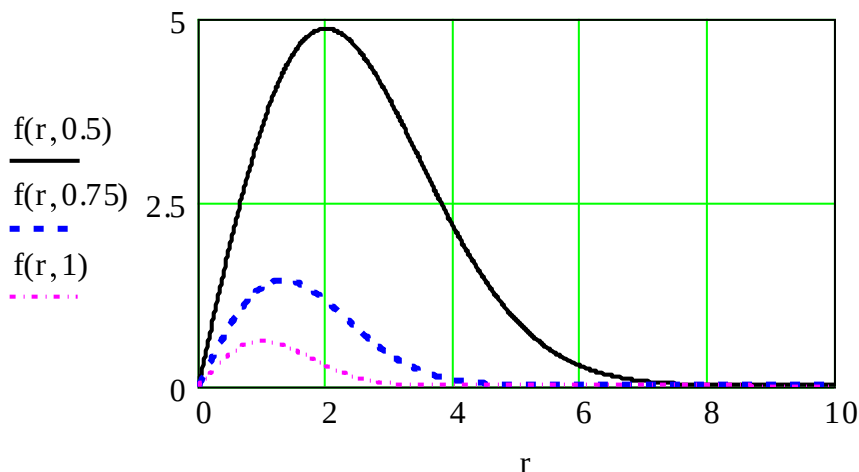


Рис. П.13.3. Плотности распределения Рэлея

Если отклонения X и Y от цели в каждом из двух взаимно перпендикулярных направлений независимы и распределены по нормальному закону с нулевыми математическими ожиданиями и одинаковыми дисперсиями σ^2 , то расстояние от точек попадания до центра мишени $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ будет распре-

делены по закону Рэлея с плотностью вероятности (см. рис. П.13.3)

$$f_R(r) = (r/\sigma^2)e^{-r^2/2\sigma^2} \text{ при } r \geq 0; f_R(r) = 0 \text{ при } r < 0.$$

Сопоставляя эту плотность с плотностью распределения Вейбулла, можно заметить, что закон распределения Рэлея может быть получен из закона распределения Вейбулла при $\alpha = 2$ и $\lambda = 1/2\sigma^2$ (см. рис. П.13.3).

Подставляя в ранее полученные формулы для математического ожидания и дисперсии распределения Вейбулла параметры $\alpha = 2$ и $\lambda = 1/2\sigma^2$, после несложных преобразований получим математическое ожидания и дисперсию распределения Рэлея:

$$M(R) = \sigma\sqrt{\pi/2} = 1.2533\sigma; D(R) = \sigma_r^2 = (2 - \pi/2)\sigma^2 = 0.429\sigma^2.$$

Распределение Коши

Распределение Коши можно назвать экзотическим, поскольку оно обладает необычным свойством: математическое ожидание и дисперсия случайной величины с таким распределением не существуют.

Если случайная величина Y распределена равномерно в интервале от $(-\pi/2)$ до $(+\pi/2)$, а m и s — константы, то случайная величина $X = m + s \cdot \operatorname{tg}(Y)$ будет распределена по закону Коши и иметь плотность распределения вида:

$$f_X(x) = 1 / \{ \pi s [1 + (x - m)^2 / s^2] \}.$$

Простейший пример такого распределения порождает следующая задача. Пусть перед сколь угодно длинной стеной размещено орудие, ствол которого вращается с постоянной скоростью в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси. Предположим также, что орудие расположено относительно стены на единичном расстоянии ($s = 1$), а выстрелы происходят на каждом обороте в произвольные моменты времени.

В данном случае через x обозначим расстояние от середины стены m (примем $m = 0$) до точки попадания, а через y — угол поворота ствола относительно начального положения, в качестве которого примем нормаль к стене. Таким образом, возможные значения y равновероятны, а попадания имеют место, если y принадлежит диапазону $(-\pi/2, +\pi/2)$. Рассматриваемая схема и плотность вероятностей Y приведены на рис. П.13.4 а, б.

Определим распределение случайной величины X , опираясь на материал разд. 5.7 (ч. I). В рассматриваемом примере

$$X = \operatorname{tg}(Y); Y = \operatorname{arctg}(X); dy/dx = 1/(1+x^2); f_Y(y) = 1/\pi.$$

На основании (5.54), ч. I, $f_X(x)dx = f_Y(y)dy$, что при описанных условиях дает плотность распределения случайной величины X вида:

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}; -\infty \leq x \leq \infty.$$

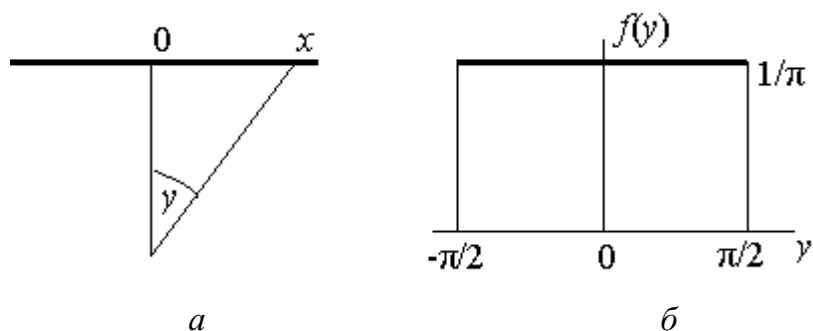


Рис. П.13.4. Исходные данные примера

Нетрудно убедиться в том, что математическое ожидание распределения Коши не существует. Однако главное среднее значение по Коши^{*)} математического ожидания может быть определено. Для рассматриваемого простого примера оно равно нулю:

$$m = \lim_{Z \rightarrow \infty} \int_{-Z}^Z \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx = \lim_{Z \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \ln(1+x^2) \Big|_{-Z}^Z = 0.$$

В общем случае плотности распределения Коши симметричны относительно $x = m$; параметр s определяет форму кривой.

Для получения характеристик распределения Коши в системах Mathcad предусмотрены следующие встроенные функции [17]:

dcauchy (x, m, s) — для плотности распределения;

pcachy (x, m, s) — для функции распределения;

qcauchy (p, m, s) — для квантили по заданной вероятности P ;

rcachy (n, m, s) — для получения $(n \times 1)$ -вектора независимых случайных чисел с распределением Коши.

На рис. П.13.5 приведены кривые плотностей распределения Коши для ряда параметров; плотность при $m = 0$ и $s = 1$ получена с помощью встроенной функции **dcauchy** (x, m, s).

Логарифмически нормальное распределение

В ряде задач радиотехники, в задачах анализа характеристик распространения колебаний в различных средах часто используется операция логарифмирования. Например, затухание Q сигнала при прохождении по тракту выражается через натуральный логарифм отношения мощностей выходного и входного сигналов, причем Q обычно проявляет себя как нормально распределенная случайная величина. Попытка определить плотность распределения отношения мощностей сигналов приводит к следующей задаче.

Пусть X и Y — случайные величины, связанные зависимостью $X = \ln(Y)$, причем X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2 .

^{*)} Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике. М.: Физматлит, 1970. — 720 с. (стр. 144)

Требуется определить плотность распределения случайной величины Y , которая определена в этом случае для положительных значений.

$$f(x, m, s) := \left[\pi \cdot s \cdot \left[1 + \frac{(x - m)^2}{s^2} \right] \right]^{-1} \quad \boxed{f1(x, m, s) := \text{dcauchy}(x, m, s)}$$

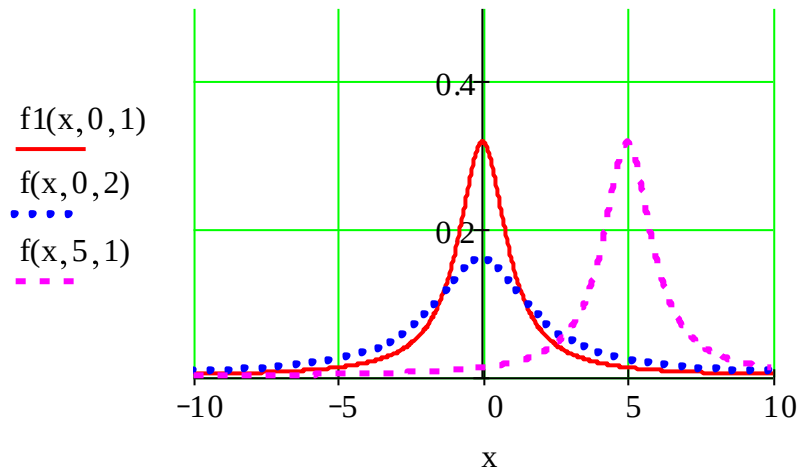


Рис. П.13.5. Плотности распределения Коши

Эта задача достаточно просто решается с использованием формул преобразования законов распределения (см. разд. 5.7, ч. I). Согласно исходным данным

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}; \quad Y = e^X; \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}.$$

Тогда, на основании (5.54), получаем искомую плотность в виде:

$$f_Y(y) = f_X(x) \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} \exp[-(\ln y - m)^2/2\sigma^2]; \quad y > 0;$$

$$f_Y(y) = 0; \quad y \leq 0.$$

Полученная плотность определяет **логарифмически нормальное (логнормальное)** распределение.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины для этого распределения равны:

$$M(Y) = \exp(m + \sigma^2/2); \quad D(Y) = [\exp(\sigma^2) - 1] \exp(2m + \sigma^2).$$

Для получения основных характеристик логнормального распределения в среде Mathcad предусмотрены следующие встроенные функции [17]:

dlnorm(y, m, σ) — для плотности распределения;

plnorm(y, m, σ) — для функции распределения;

qlnorm(p, m, σ) — для квантили по заданной вероятности P ;

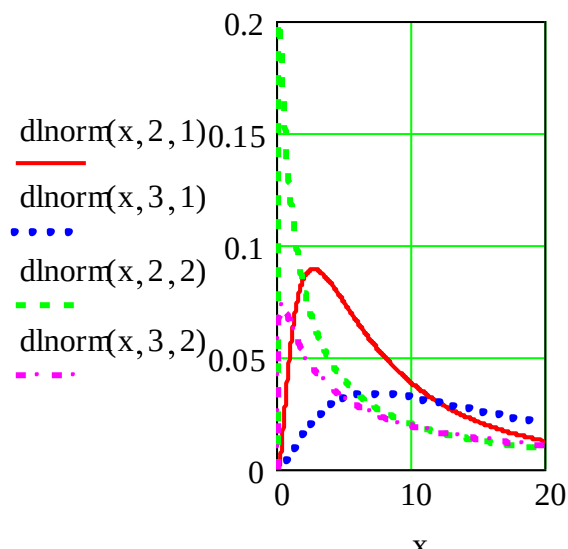
rlnorm(n, m, σ) — для получения $(n \times 1)$ -вектора независимых случайных чисел с логнормальным распределением.

Плотность логнормального распределения можно представить в форме

$$f_Y(y) = f_N(\ln y, m, \sigma) / y, \quad (\text{П.13.6})$$

которая позволяет получить ее пересчетом соответствующей плотности нормального распределения $f_N(\ln y, m, \sigma)$ для положительных значений y . Это может быть использовано при проведении расчетов с помощью встроенных функций систем компьютерной математики. Например, функции **dlnorm**(y, m, σ) и **dnorm**[$\ln(y), m, \sigma$]/ y будут давать аналогичные результаты.

На рис. П.13.6 приведены кривые плотностей логарифмически нормального распределения для ряда параметров, указанных в аргументах встроенных функций.



$$x := 5$$

$$\text{dlnorm}(x, 2, 1) = 0.074$$

$$\frac{\text{dnorm}(\ln(x), 2, 1)}{x} = 0.074$$

Рис. П.13.6. Плотности логнормального распределения

Справа от графика (см. рис. П.13.6) приведено значение плотности логнормального распределения, полученное с применением встроенной функции **dlnorm**, а также с помощью формулы П.13.6, связывающей плотности нормального и логнормального распределений.

Таблицы выборочных данных

Данные примера 4.17, ч. II

№	$X \in N(2.5, 0.5)$	$Y \in N(1.2, 0.5)$
1.	2,311	1,850
2.	1,910	1,380
3.	1,935	0,882
4.	2,463	1,482
5.	2,158	1,786
6.	1,810	1,257
7.	2,800	1,149
8.	2,556	0,776
9.	1,874	0,909
10.	2,724	1,590
11.	2,207	1,206
12.	2,826	0,706
13.	2,235	0,557
14.	3,423	0,781
15.	3,148	1,523
16.	2,270	1,307
17.	2,189	0,208
18.	2,930	2,037
19.	2,455	0,701
20.	2,544	1,086
21.	2,837	1,558
22.	3,115	0,735
23.	2,676	1,869
24.	2,416	1,158
25.	1,598	2,082

Данные примера 5.6, ч. II

i	y_i	i	y_i	i	y_i	i	y_i
1	5,583	16	4,575	31	4,614	46	4,514
2	5,050	17	4,904	32	4,697	47	4,363
3	4,961	18	4,487	33	4,567	48	4,386
4	5,134	19	4,933	34	4,682	49	4,599
5	4,839	20	4,952	35	4,666	50	4,466
6	4,768	21	4,737	36	4,507	51	4,678
7	4,764	22	4,742	37	4,822	52	4,922
8	5,073	23	5,092	38	4,510	53	4,850
9	5,092	24	4,641	39	4,311	54	4,683
10	4,438	25	5,085	40	4,463	55	4,216
11	4,613	26	4,724	41	4,287	56	4,354
12	5,113	27	4,879	42	4,470	57	4,228
13	5,240	28	4,871	43	4,726	58	4,257
14	4,910	29	4,541	44	4,748	59	4,589
15	5,125	30	4,561	45	4,591	60	4,518

Векторное дифференцирование

1. Производная $(n \times 1)$ -вектора $\mathbf{X}$ по скаляру b есть $(n \times 1)$ -вектор вида:

$$d\mathbf{X}/db = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{db} \\ \frac{dx_2}{db} \\ \dots \\ \frac{dx_n}{db} \end{bmatrix}.$$

2. Производная скаляра b по $(n \times 1)$ -вектору $\mathbf{X}$ есть $(1 \times n)$ -вектор вида:

$$db/\partial \mathbf{X} = \left[\frac{db}{dx_1} \quad \frac{db}{dx_2} \quad \dots \quad \frac{db}{dx_n} \right].$$

3. Производная $(m \times 1)$ -вектора $\mathbf{b}$ по $(n \times 1)$ -вектору $\mathbf{X}$ есть $(m \times n)$ -матрица:

$$d\mathbf{b}/\partial \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \frac{db_1}{dx_1} & \frac{db_1}{dx_2} & \dots & \frac{db_1}{dx_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{db_m}{dx_1} & \frac{db_m}{dx_2} & \dots & \frac{db_m}{dx_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{db_1}{d\mathbf{X}} \\ \dots \\ \frac{db_m}{d\mathbf{X}} \end{bmatrix}.$$

4. Вторая производная скаляра b по $(n \times 1)$ -вектору $\mathbf{X}$ есть $(n \times n)$ -матрица:

$$d^2b/d\mathbf{X}^2 = \frac{d}{d\mathbf{X}} \begin{bmatrix} \frac{db}{dx_1} \\ \frac{db}{dx_2} \\ \dots \\ \frac{db}{dx_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d^2b}{dx_1^2} & \frac{d^2b}{dx_1 dx_2} & \dots & \frac{d^2b}{dx_1 dx_n} \\ \frac{d^2b}{dx_2 dx_1} & \frac{d^2b}{dx_2^2} & \dots & \frac{d^2b}{dx_2 dx_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^2b}{dx_n dx_1} & \frac{d^2b}{dx_n dx_2} & \dots & \frac{d^2b}{dx_n^2} \end{bmatrix}.$$

5. Производная скалярного произведения векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ по вектору $\mathbf{X}$ есть вектор-строка:

$$\frac{d(\mathbf{a}^T \mathbf{b})}{d\mathbf{X}} = \frac{d(\mathbf{b}^T \mathbf{a})}{d\mathbf{X}} = \mathbf{a}^T \frac{d\mathbf{b}}{d\mathbf{X}} + \mathbf{b}^T \frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{X}}.$$

6. Производная квадратичной формы по вектору $\mathbf{X}$ есть вектор-строка:

$$\frac{d(\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X})}{d\mathbf{X}} = \frac{d}{d\mathbf{X}} [\mathbf{X}^T (\mathbf{A} \mathbf{X})] = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{E} + \mathbf{X}^T \mathbf{A}^T \mathbf{E} = 2\mathbf{X}^T \mathbf{A}; \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}^T.$$

7. Производная линейной формы по вектору $\mathbf{X}$ есть вектор-строка:

$$\frac{d[\mathbf{c}^T(\mathbf{A}\mathbf{X})]}{d\mathbf{X}} = \mathbf{c}^T \mathbf{A}; \quad \mathbf{c} \text{ — вектор констант.}$$

Дифференцирование следа матрицы по матрице

1. След матрицы $\mathbf{A}$, определяемый как сумма элементов этой матрицы, находящихся на главной диагонали, обозначается символами $\text{sp}[\mathbf{A}]$ или $\text{tr}[\mathbf{A}]$. Имеют место следующие свойства следа матрицы:

$$\text{sp}[\mathbf{ABC}] = \text{sp}[\mathbf{CAB}] = \text{sp}[\mathbf{BCA}];$$

$$\text{sp}[\mathbf{A}] = \text{sp}[\mathbf{A}^T]; \quad \text{sp}[\mathbf{A} + \mathbf{B}] = \text{sp}[\mathbf{A}] + \text{sp}[\mathbf{B}].$$

При $\mathbf{A} = \mathbf{XY}^T$, $\text{sp}[\mathbf{A}] = \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$ ($\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ — векторы-столбцы одной размерности).

2. Основные операции дифференцирования следа матрицы по матрице имеют вид ($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{X}$ — матрицы согласованной размерности):

$$a) \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \text{sp}[\mathbf{X}] = \mathbf{E}; \quad б) \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \text{sp}[\mathbf{AX}] = \mathbf{A}^T; \quad в) \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \text{sp}[\mathbf{AX}^T] = \mathbf{A};$$

$$г) \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \text{sp}[\mathbf{AXB}] = \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T; \quad д) \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \text{sp}[\mathbf{AX}^T \mathbf{B}] = \mathbf{BA};$$

$$е) \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \text{sp}[\mathbf{AXBX}] = \mathbf{A}^T \mathbf{X}^T \mathbf{B}^T + \mathbf{B}^T \mathbf{X}^T \mathbf{A}^T; \quad ж) \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \text{sp}[\mathbf{AXBX}^T] = \mathbf{A}^T \mathbf{XB}^T + \mathbf{AXB}.$$

Формирование выборочных данных с заданными выборочными числовыми характеристиками

Во многих задачах моделирования систем (технических, экономических и др.) требуется учитывать возмущающие факторы, которые соответствуют скалярным и векторным случайным величинам с заданными числовыми характеристиками. Следуя подходу, использованному в разд. 6.6.1, ч. II, получим основные соотношения, позволяющие решить задачу имитации подобных возмущений. В качестве основного рассмотрим вариант случайного вектора, имея в виду простоту перехода от этого варианта к скалярному случаю.

Пусть $\mathbf{X}$ — случайный вектор с элементами X_j , $j = 1, m$, имеющий вектор математических ожиданий $M(\mathbf{X}) = \mathbf{m}_X$ и ковариационную матрицу

$$\mathbf{P}_X = M[(\mathbf{X} - \mathbf{m}_X)(\mathbf{X} - \mathbf{m}_X)^T].$$

Требуется преобразовать исходный вектор в случайный $(m \times 1)$ -вектор $\mathbf{Z}$, вектор математических ожиданий $M(\mathbf{Z}) = \mathbf{m}_Z$ и ковариационная матрица $\mathbf{P}_Z$ которого заданы.

Введем в рассмотрение матрицу $\mathbf{C}_X$, удовлетворяющую соотношению

$$\mathbf{C}_X (\mathbf{C}_X)^T = \mathbf{P}_X. \quad (\text{П.16.1})$$

Матрица $\mathbf{C}_X$ носит название корня из матрицы. Вычисление корня из симметричной матрицы может быть выполнено различными алгоритмами. Наибольшее распространение получило преобразование Холецкого^{*)} для положительно определенных матриц. В среде Mathcad имеется встроенная функция **cholesky**, выполняющая это преобразование. Эта функция используется ниже, при решении примера. Альтернативный алгоритм (см. в конце этого приложения) вычисления корня из матрицы приведен в работе^{**) (стр. 140)}. Он может быть использован для произвольных симметричных матриц.

Предполагая неособенность $\mathbf{C}_X$, проведем нормировку исходного вектора $\mathbf{X}$ с использованием выражения, структура которого аналогична структуре соотношения для локальной нормировки (6.43):

$$\mathbf{X}^+ = (\mathbf{C}_X)^{-1} (\mathbf{X} - \mathbf{m}_X) = (\mathbf{C}_X)^{-1} \mathbf{X}^0, \quad (\text{П.16.2})$$

где $\mathbf{X}^0 = (\mathbf{X} - \mathbf{m}_X)$ — центрированный случайный вектор.

Вектор $\mathbf{X}^+$ имеет нулевое математическое ожидание, поэтому его ковариационная матрица, в силу определения (см. (7.64), ч. I), равна

$$\mathbf{S}^+ = M[\mathbf{X}^+ (\mathbf{X}^+)^T] = (\mathbf{C}_X)^{-1} \mathbf{P}_X (\mathbf{C}_X)^{-T}.$$

Нетрудно видеть, что матрица $\mathbf{S}^+$ — единичная матрица порядка m :

$$\mathbf{S}^+ = (\mathbf{C}_X)^{-1} \mathbf{P}_X (\mathbf{C}_X)^{-T} = (\mathbf{C}_X)^T (\mathbf{C}_X)^{-T} = \mathbf{E}_m. \quad (\text{П.16.3})$$

*) Уилкинсон Д. Х. Алгебраическая проблема собственных значений: Пер. с англ. — М.: Физматлит, 1970. — 564.

**) Ривкин С. С., Ивановский Р. И., Костров А. В. Статистическая оптимизация навигационных систем. — Л.: Судостроение, 1976. — 280.

Таким образом, нормировкой (П.16.2) получаем вектор $\mathbf{X}^+$ с нулевым вектором математических ожиданий и единичной ковариационной матрицей.

На основании рассмотренных соотношений легко убедиться в том, что требуемый вектор $\mathbf{Z}$ с характеристиками $\mathbf{m}_Z$ и $\mathbf{P}_Z$ может быть получен с помощью выражения вида:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{m}_Z + \mathbf{C}_Z \mathbf{X}^+, \quad (\text{П.16.4})$$

где $\mathbf{C}_Z$ — корень из заданной ковариационной матрицы, $\mathbf{C}_Z (\mathbf{C}_Z)^T = \mathbf{P}_Z$.

Описанный подход может быть использован при формировании выборочных данных с заданными выборочными характеристиками.

С этой целью перейдем в выражениях (П.16.2)—(П.16.4) от теоретических числовых характеристик к их выборочным аналогам.

Опираясь на формальную аналогию преобразований (6.46)—(6.50) и используя введенные в них обозначения, приведем основные соотношения для получения выборочных данных $\mathbf{Z}_B$ с заданными вектором выборочных средних $\bar{\mathbf{Z}}_B$ и выборочной ковариационной матрицей $\mathbf{P}_{ZB}$, сопровождая выкладки лишь краткими комментариями.

Пусть, как и в разд. 6.6.1, ч. II, данные наблюдений объединены в $(m \times n)$ -матрицу $\mathbf{X}_B$, строками которой служат наблюдаемые значения элементов вектора $\mathbf{X}$. Тогда вектор выборочных средних $\bar{\mathbf{X}}_B$ и выборочная ковариационная матрица $\mathbf{P}_{XB}$ найдутся как:

$$\bar{\mathbf{X}}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_{Bi}; \quad \mathbf{P}_{XB} = \frac{1}{n} \mathbf{X}_B^0 (\mathbf{X}_B^0)^T. \quad (\text{П.16.5})$$

Здесь $\mathbf{X}_B^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{B1}^0 & \mathbf{X}_{B2}^0 & \dots & \mathbf{X}_{Bn}^0 \end{bmatrix}$ — $(m \times n)$ -матрица центрированных данных наблюдений, i -ый столбец которой $\mathbf{X}_{Bi}^0 = (\mathbf{X}_{Bi} - \bar{\mathbf{X}}_B)$, $(i = \overline{1, n})$.

Вычисляя матрицу $\mathbf{C}_{XB}$ — корень выборочной ковариационной матрицы $\mathbf{C}_{XB} (\mathbf{C}_{XB})^T = \mathbf{P}_{XB}$, определим $(m \times n)$ -матрицу $\mathbf{X}_B^+$ нормированных данных наблюдений с ковариационной матрицей $\mathbf{S}_B^+$, которая, аналогично матрице $\mathbf{S}^+$ из (П.16.3), является единичной:

$$\mathbf{X}_B^+ = \mathbf{C}_{XB}^{-1} \mathbf{X}_B^0; \quad \mathbf{S}_B^+ = \frac{1}{n} \mathbf{X}_B^+ (\mathbf{X}_B^+)^T = \mathbf{C}_{XB}^{-1} \mathbf{P}_{XB} \mathbf{C}_{XB}^{-T} = \mathbf{E}_m. \quad (\text{П.16.6})$$

Таким образом, нормированные данные наблюдения $\mathbf{X}_B^+$ имеют нулевой вектор выборочных средних и единичную выборочную ковариационную матрицу. Это позволяет, на основании выражения (П.16.4), получить выборочные данные $\mathbf{Z}_B$ с заданными свойствами. Для этого осуществим промежуточное преобразование

$$\mathbf{Z}_B^0 = \mathbf{C}_{ZB} \mathbf{X}_B^+; \quad \mathbf{C}_{ZB} (\mathbf{C}_{ZB})^T = \mathbf{P}_{ZB}$$

Из предыдущих выражений ясно, что вектор выборочных средних и выборочная ковариационная матрица, вычисленные с использованием выборочных данных $\mathbf{Z}_B^0$, равны нулевому вектору и заданной матрице $\mathbf{P}_{ZB}$:

$$\bar{\mathbf{Z}}_B^0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{Z}_{Bi}^0 = \mathbf{0}; \quad \frac{1}{n} \mathbf{Z}_B^0 (\mathbf{Z}_B^0)^T = \mathbf{P}_{ZB}. \quad (\text{П.16.7})$$

Здесь $\mathbf{Z}_{Bi}^0$ — i -ый столбец $(m \times n)$ -матрицы $\mathbf{Z}_B^0$.

Для выполнения второго требования — обеспечения заданного вектора $\bar{\mathbf{Z}}_B$ выборочных средних — необходимо добавить к каждому столбцу матрицы $\mathbf{Z}_B^0$ этот вектор. Таким образом, получаем требуемые выборочные данные в форме $(m \times n)$ -матрицы $\mathbf{Z}_B$, каждый столбец $\mathbf{Z}_{Bi}$ которой формируется как:

$$\mathbf{Z}_{Bi} = \mathbf{Z}_{Bi}^0 + \bar{\mathbf{Z}}_B; \quad \mathbf{Z}_B^0 = \mathbf{C}_{ZB} \mathbf{X}_B^+; \quad (i = \overline{1, n}). \quad (\text{П.16.8})$$

Интерактивный ресурс, использующий эти преобразования, размещен на портале <http://mas.exponenta.ru>, раздел <<Математическая статистика>>.

Пример П.16.1. Преобразовать выборочные данные для трехмерного вектора $\mathbf{X}$, приведенные в виде (3×16) -матрицы $\mathbf{A}$ (см. рис. П.16.1, *a*), в данные $\mathbf{Z}_B$ с вектором выборочных средних $\bar{\mathbf{Z}}_B$ и выборочной ковариационной матрицей $\mathbf{P}_{ZB}$, указанными на рис. П.16.1, *a*.

□ Решение. Решение примера представлено на рис. П.16.1 в виде отдельных фрагментов единого mcd-файла. На рис. П.16.1, *a* приведены исходные данные примера. Полученные собственные числа свидетельствуют о положительной определенности заданной матрицы $\mathbf{P}_{ZB}$.

$\mathbf{A}^T =$		0	1	2
	0	-0.2439	0.2867	-0.5588
	1	-0.2179	0.4045	-0.7732
	2	-0.1473	0.1727	-0.9395
	3	-0.1451	$3381 \cdot 10^{-3}$	-0.7302
	4	-0.1686	-0.1085	-0.6458
	5	0.0544	-0.1775	-0.7888
	6	0.0879	-0.1163	-0.8977
	7	0.2056	-0.3367	-1.1029
	8	0.4192	-0.3866	-1.0818
	9	0.3309	-0.3107	-1.1848
	10	0.3985	-0.7058	-1.1264
	11	0.4362	-0.6997	-0.9464
	12	0.4916	-0.6339	-1.1639
	13	0.5173	-0.7661	-1.1473
	14	0.3956	-1.4351	-1.152
	15	0.5569	-1.4236	-1.3533

$\mathbf{Z}_B := \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.5 \\ -0.3 \end{pmatrix}$

$\mathbf{P}_{ZB} := \begin{pmatrix} 0.81 & -0.16 & -0.05 \\ -0.16 & 1.44 & 0.88 \\ -0.05 & 0.88 & 2.25 \end{pmatrix}$

$\text{eigenvals } \mathbf{P}_{ZB} = \begin{pmatrix} 2.8219 \\ 0.7252 \\ 0.9528 \end{pmatrix}$

Рис. П.16.1, а. Исходные данные примера П.16.1

На рис. П.16.1, *б, в, г* приведены результаты этапных вычислений. Последовательность этапов отмечена номерами.

Этапы 1 и 2. Вычисление вектора $\bar{X}_B$ выборочных средних X , центрирование и вычисление выборочной ковариационной матрицы P_{XB} по формулам (П.16.5).

1	$X_{cp} := \frac{1}{n+1} \cdot \left(\sum_i A^{(i)} \right)$	$X_{cp} = \begin{pmatrix} 0.1857 \\ -0.3896 \\ -0.9746 \end{pmatrix}$	$n := 15$	$i := 0..n$
2	$A_0^{(i)} := A^{(i)} - X_{cp}$	$P_X := \frac{1}{n+1} \cdot A_0 \cdot A_0^T$	$P_X = \begin{pmatrix} 0.0806 & -0.1261 & -0.0548 \\ -0.1261 & 0.2704 & 0.0884 \\ -0.0548 & 0.0884 & 0.0475 \end{pmatrix}$	

Рис. П.16.1, б. Первые два этапа решения

Этапы 3 и 4. Вычисление корня из матрицы P_{XB} и нормировка исходных данных с проверками на основе выражений (П.16.6).

Этап 5. Вычисление корня из заданной ковариационной матрицы P_{ZB} .

Этап 6. Формирование требуемых выборочных данных с использованием выражений (П.16.7) и (П.16.8).

Этап 7. Проверка полученных данных на соответствие требованиям.

Проверка полученных с использованием соотношений (П.16.5)—(П.16.8) выборочных данных подтверждает выполнение требований. Ковариационные матрицы примера были положительно определенными, поэтому вычисление C_X и C_Z осуществлялось преобразованием Холецкого. ■

5	$C_Z := \text{cholesky } P_{ZB}$	
	$C_Z = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 & 0 \\ -0.1778 & 1.1868 & 0 \\ -0.0556 & 0.7332 & 1.3074 \end{pmatrix}$	$C_Z \cdot C_Z^T = \begin{pmatrix} 0.81 & -0.16 & -0.05 \\ -0.16 & 1.44 & 0.88 \\ -0.05 & 0.88 & 2.25 \end{pmatrix}$
6	$Z_0 := C_Z \cdot Z_0$	$Z^{(i)} := Z_0^{(i)} + Z_B$
Результат		
7	$\frac{1}{n+1} \cdot \left(\sum_i Z^{(i)} \right) = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.5 \\ -0.3 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{n+1} \cdot Z_0 \cdot Z_0^T = \begin{pmatrix} 0.81 & -0.16 & -0.05 \\ -0.16 & 1.44 & 0.88 \\ -0.05 & 0.88 & 2.25 \end{pmatrix}$

Рис. П.16.1, в. Завершающие этапы решения

Отметим здесь, что описанные преобразования неявно предполагают, что ковариационные матрицы исходных данных P_X и P_{XB} должны быть положительно определены (требование нормировки). Поэтому для вычисления корня из исходных матриц можно использовать как преобразование Холецкого, так и альтернативный алгоритм. В то же время результирующие соотношения, на-

пример, П.16.8, не требуют обращений матриц $\mathbf{C}$; задаваемые ковариационные матрицы $\mathbf{P}_Z$ и $\mathbf{P}_{ZB}$ в общем случае могут быть неотрицательно определенными (по определению). Для таких матриц преобразование Холецкого неприемлемо. Поэтому в качестве общего алгоритма вычисления матриц $\mathbf{C}_Z$ и $\mathbf{C}_{ZB}$ в процессе формирования выборочных данных с заданными свойствами целесообразно использовать альтернативный алгоритм.

$Z_0^T =$		0	1	2
	0	-1.3619	0.2878	1.7024
	1	-1.2796	0.9666	-0.5081
	2	-1.0558	0.3901	-2.3356
	3	-1.0488	-0.3393	0.0363
	4	-1.1231	-0.9758	0.598
	5	-0.4164	0.1114	1.2958
	6	-0.3099	0.5892	0.4241
	7	0.0632	0.3562	-1.3094
	8	0.7402	1.469	1.4532
	9	0.4602	1.2511	-0.7921
	10	0.6747	-0.0603	-0.0969
	11	0.7942	0.2016	2.7207
	12	0.9696	0.8356	0.7102
	13	1.0512	0.4159	0.942
	14	0.6653	-3.2779	-2.1056
	15	1.1768	-2.2212	-2.7349

$Z^T =$		0	1	2
	0	-1.1619	0.7878	1.4024
	1	-1.0796	1.4666	-0.8081
	2	-0.8558	0.8901	-2.6356
	3	-0.8488	0.1607	-0.2637
	4	-0.9231	-0.4758	0.298
	5	-0.2164	0.6114	0.9958
	6	-0.1099	1.0892	0.1241
	7	0.2632	0.8562	-1.6094
	8	0.9402	1.969	1.1532
	9	0.6602	1.7511	-1.0921
	10	0.8747	0.4397	-0.3969
	11	0.9942	0.7016	2.4207
	12	1.1696	1.3356	0.4102
	13	1.2512	0.9159	0.642
	14	0.8653	-2.7779	-2.4056
	15	1.3768	-1.7212	-3.0349

Рис. П.16.1, з. Промежуточные и результирующие (рамка) данные

Альтернативный алгоритм формирует нижнюю треугольную матрицу $\mathbf{C}$, удовлетворяющую равенству $\mathbf{C}\mathbf{C}^T = \mathbf{P}$, путем последовательного вычисления ее столбцов $\mathbf{C}_j, j = \overline{1, m}$:

$$\mathbf{C}_j = \begin{cases} \mathbf{D}_j \mathbf{q}_j / \sqrt{\mathbf{q}_j^T \mathbf{D}_j \mathbf{q}_j}, & \mathbf{q}_j^T \mathbf{D}_j \mathbf{q}_j \neq 0; \\ \mathbf{0} & , \mathbf{q}_j^T \mathbf{D}_j \mathbf{q}_j = 0; \end{cases}$$

$$\mathbf{D}_{j+1} = \mathbf{D}_j - [\mathbf{D}_j \mathbf{q}_j \mathbf{q}_j^T \mathbf{D}_j / \mathbf{q}_j^T \mathbf{D}_j \mathbf{q}_j]; \mathbf{D}_1 = \mathbf{P}.$$

Здесь $\mathbf{q}_j$ — вектор, j -ый элемент которого равен единице, остальные — нулю.

Простой пример получения $\mathbf{C}$ с помощью альтернативного алгоритма для неотрицательно определенной матрицы приведен ниже:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Этот алгоритм реализован в интерактивном ресурсе, размещенном на портале <http://mas.exponenta.ru>, раздел <<Математика/Линейная алгебра>>.

Основы применения Mathcad

Интерфейс систем Mathcad внешне весьма близок к интерфейсу хорошо известных текстовых редакторов Word. В распоряжении пользователя в системах Mathcad имеются: **визир** (в виде красного крестика) для выбора текущего места документа, **уголковый курсор** (уголок синего цвета) при вводе и редактировании математических выражений, а также курсор текстовых фрагментов (красная вертикальная линия). Визир перемещается стрелками клавиатуры или щелчком мыши в выбранной точке экрана.

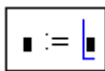
Перед началом операций ввода математических выражений, функций, матриц, шаблонов графиков, текстовых фрагментов щелчком рабочей кнопки мыши вызывается визир. Последующие нажатия на кнопки клавиатуры (латинские символы, цифры) будут восприниматься системой в качестве элементов математических выражений.

При вводе на экране появляется последовательность вводимых символов, цифр, операторов и проч., которые заключены в черную рамку. Наличие рамки означает, что этот фрагмент документа в настоящее время является активным; рамка исчезает при щелчке мыши в другой (свободной от выражений) зоне документа.

Ввод первой цифры или первого символа математических выражений (внутри черной рамки) сопровождается появлением синего **уголкового курсора (УК)**, имеющего горизонтальную линию, расположенную слева или справа от вертикальной линии. Переориентация горизонтали УК осуществляется стрелками клавиатуры; «охват» УК нужных частей выражений удобно производить нажатием на клавишу **<Пробел>**.

Удаление одиночного фрагмента, выделенного черной рамкой, осуществляется клавишами **<Ctrl> + <D>**; удаление нескольких фрагментов, выделенных пунктиром после протяжки мышью, производится клавишей **<Del>**.

Оператор присваивания (имеет вид $:=$) вызывается нажатием на клавишу **<:=>** (двоеточие; верхний регистр клавиатуры, т. е. предварительно нажать **<Shift>**). При вызове оператора на место визира получаем так называемый



шаблон ввода, в состав которого входят два маркера ввода, разделенные оператором присваивания. Левый предназначен для ввода имени выражения (переменной, функции, вектора, матрицы и проч.), правый — для ввода выражения. При вводе выражений используются операторы, вызов которых может быть осуществлен путем нажатия соответствующей кнопки полей математической палитры (для ее вызова активизировать позицию **View/Toolbars/Math** главного меню системы).

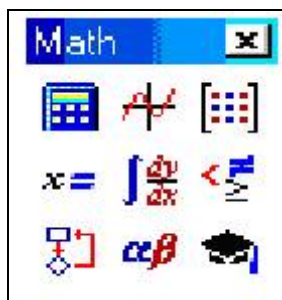


Рис. П.17.1. Математическая палитра

Эта многоуровневая палитра (рис. П.17.1) задает шаблоны математических выражений, символов, графиков, векторов и матриц, позволяет вводить конкретные символы и их значения, надстрочные и подстрочные индексы, обеспечивает задание структур программных модулей и проч.

В табл. П.17.1 приведено смысловое назначение наборов, вызываемых активизацией каждой из девяти клавиш палитры.

Таблица П.17.1

Индекс кнопки	Содержание набора средств
11	Шаблоны арифметических операций, стандартных функций (корни, логарифмы, степени и проч.), задания значений
12	Шаблоны двумерных и трехмерных графиков
13	Шаблоны векторов и матриц, операторов обращения и транспонирования, векторных соотношений, векторизации, ввода элементов, диапазонов изменения и проч.
21	Набор операторов численного и символьного вывода, унарных и бинарных операторов
22	Набор шаблонов интегрирования, дифференцирования, произведений, пределов и др.
23	Набор логических операторов (Boolean)
31	Набор шаблонов и операторов для создания программных модулей
32	Набор греческих символов
33	Набор шаблонов и операторов символьных вычислений

Перечисление кнопок математической палитры проиндексировано в табл. П.17.1 подобно элементам квадратной матрицы третьего порядка в соответствии со взаимным расположением кнопок, принятым на рис. П.17.1.

Ввод операторов. Ввод операторов (арифметических, логических, сумм, произведений, интегралов, производных и др.) в системах Mathcad может быть осуществлен также несколькими путями. Большую часть операторов можно ввести с использованием математической палитры (см. рис. П.17.1). В то же время в процессе решения задач удобно пользоваться и специальными клавишами. В табл. П.17.2 приводится перечень основных операторов, даются краткие комментарии.

Каждый оператор имеет шаблон, который появляется на экране монитора при вводе оператора. Шаблон содержит необходимое число маркеров ввода. Например, для квадратного корня шаблон имеет вид $\sqrt{\blacksquare}$; для оператора <<меньше>> — $\blacksquare < \blacksquare$. На месте маркеров в некоторых шаблонах операторов (см. табл. П.17.2) проставлены символы, в роли которых могут выступать чис-

ла, имена функций, математические выражения. Во втором столбце табл. П.17.2 указаны кнопки клавиатуры.

Таблица П.17.2

Оператор или шаблон	Кнопки клавиатуры	Комментарий
$a := b$	$a : b$	Присваивание переменной a значения b
$a =$	$a =$	Вывод вычисленного значения a
$a + b, a - b$	$a+b, a-b$	Суммирование и вычитание
$a \cdot b, \frac{a}{b}$	$a*b, a/b$	Умножение, деление в форме отношения
$a \div b$	Ctrl+/	Деление «в строчку»
a^b	a^b	Возведение в степень (надстрочный символ)
$\sqrt{a}$	\a или a\	Извлечение квадратного корня из a
$\sqrt[n]{a}$	Ctrl+\	Шаблон корня n -ой степени
$a!$	$a!$	Вычисление факториала
$ a $	$a $ или $ a$	Вычисление модуля числа или переменной a
$\bar{a}$	a''	Вычисление комплексно-сопряженного числа
$a > b, a < b$	$a > b, a < b$	Ввод операторов неравенств $>$ или $<$
$a \geq b$	Ctrl + 0	Ввод операторов неравенств $\geq$
$a \leq b$	Ctrl + 9	Ввод операторов неравенств $\leq$
$a \neq b$	Ctrl + 3	Ввод операторов неравенств $\neq$
$a = b$	Ctrl + =	Ввод операторов отношений «эквивалентно»
$\frac{d}{db} a$	Shift + /	Первая производная
a'	Ctrl + F7	Первая производная (второй вариант)
$\frac{d^n}{da^n} b$	Ctrl+Shift+/	Высшая производная

Ввод функций. Системы Mathcad имеют весьма широкий набор встроенных функций для решения математических задач различных классов. Все эти функции могут быть вызваны активизацией опции **Insert\Function** главного меню или клавишами <Ctrl> + <E> для версий Mathcad, начиная с восьмой и выше. Появляющееся при этом диалоговое окно позволяет выбрать категорию (левое поле окна) и необходимую функцию категории и ввести ее на место курсора. В диалоговом окне даются краткие комментарии по назначению и особенностям функций.

Остальные особенности Mathcad комментируются в процессе решения задач в главах книги. Подробное описание практики решения задач в среде Mathcad содержится в учебном пособии [17].

Описание компакт-диска

В CD включены Mathcad-файлы (условно обозначенные в тексте как mcd-файлы) задач и примеров, рассмотренных в разделах и приложениях книги, а также некоторые дополнительные файлы по тематике рассматриваемых вопросов. Предлагаемые файлы служат лишь вариантом гарантированного достижения конечного результата в рассматриваемой задаче, имея который можно заниматься их модернизацией или разработкой собственных программ. Копируя mcd-файлы на свой компьютер и меняя исходные данные или структуру файла, можно формировать множество вариантов для исследовательской или учебной работы.

Файлы выполнены в Mathcad-13 и имеют имена, соответствующие номерам рисунков, имеющихся в отдельных главах. Некоторым фрагментам mcd-файлов, копии которых присутствуют в разделах книги, не присвоены номера. Эти mcd-файлы также представлены на компакт-диске. Такие файлы обозначены номерами страниц, в которых они присутствуют.

При запуске представленных в CD mcd-файлов следует учитывать:

1. Некоторые из mcd-файлов могут иметь пассивный режим (без автоматического запуска и пересчета). Такие файлы активизируются либо нажатием функциональной клавиши F9 (пересчет при каждом нажатии), либо использованием позиции <<**Tools/Calculate/Automatic Calculation**>> основного меню Mathcad.
2. В mcd-файлах, связанных с обработкой массивов данных, используются два варианта задания исходных данных:
 - 2.1. формирование исходных массивов с использованием датчиков случайных чисел.
 - 2.2. использование (ввод) прилагаемых (фиксированных) массивов в текстовых или Excel-форматах.

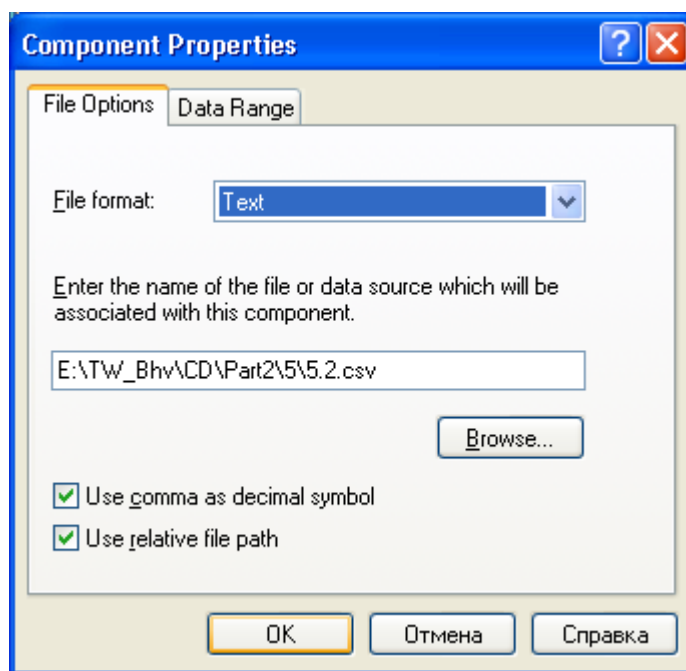
В варианте 2.1 исходные данные формируются заново при каждом новом запуске mcd-файла. Поэтому результаты, получаемые в таких файлах, всегда будут отличаться от результатов, приведенных на соответствующих рисунках текста. В уже запущенном mcd-файле формирование новых данных и пересчет всего алгоритма осуществляется активизацией (щелчком левой кнопки мыши по этому фрагменту, после которого он заключается в сплошную черную рамку) фрагмента-источника данных (например, $X := \text{runif}(100, 1, 3)$) с последующим однократным (или многократным) нажатием <F9>.

Ряд примеров использует вариант 2.2 задания исходных данных. Эти данные (массивы), предварительно сформированные в других форматах, также представлены на CD в разделе, максимально приближенном к рассматриваемому mcd-файлу. Для их ввода и трансформации в формат Mathcad указывает-

ся путь к ним. Фрагменты, необходимые для такого ввода и трансформации присутствуют в mcd-файлах. Например, в файле 5.2 (часть 2), который соответствует рис. 5.2, используются предварительно подготовленные данные с именем **5.2.csv**. Имя файла с этими данными можно прочесть в блоке ввода файла **5.2.xmcd** после его запуска. Такие блоки ввода выделены рамкой и заливкой:



Для изменения пути (или указания нужного пути) к файлу **5.2.csv** требуется лишь щелкнуть правой кнопкой мыши по имени файла и выбрать опцию **Properties** во всплывающем меню. Появится окно для выбора пути к нужному файлу:



Выбор пути производится кнопкой **<Browse>**. В данном случае, когда применен формат **csv**, в числах используется разделительная запятая. Поэтому первый флажок (галочка) у текста **<<Use comma as decimal symbol>>** должен быть сохранен. В других форматах, когда применяется десятичная разделяющая точка, этот флажок необходимо убрать. Особенности разделителей можно увидеть, дважды щелкая мышью по фиксированным данным (в нашем примере — по файлу **5.2.csv**). Данные раскроются либо с помощью Excel (для файла **5.2.csv**), либо с помощью Notepad.

Компакт-диск содержит триал-версию Mathcad 14.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В.* Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. Учеб. пособие. М.: Наука, 1960. – 511 с.
2. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. Учеб. для вузов. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 564 с.
3. *Зарубин В. С., Крищенко А. П.* (ред). Теория вероятностей. Учеб. для вузов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1999. – 456 с.
4. *Зарубин В. С., Крищенко А. П.* (ред). Математическая статистика. Учеб. для вузов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2001. – 420 с.
5. *Амосова Н. Н., Куклин Б. А., Макарова С. Б., Максимов Ю. Д.* и др. (под ред Максимова Ю. Д.). Вероятностные разделы математики. – СПб.: Иван Федоров, 2001. – 588 с.
6. *Глазунов Л. П., Грабовецкий В. П., Щербаков О. В.* Основы теории надежности автоматических систем управления. – Л.: Энергоатомиздат, 1984. – 208 с.
7. *Пугачев В. С.* Теория случайных функций. М.:Физматгиз, 1960. – 884 с.
8. *Крамер Г.*, Математические методы статистики. / Пер. с англ. под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Мир, 1975. – 648 с.
9. *Кендалл М., Стьюарт А.* Статистические выводы и связи. / Пер. с англ. под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Наука, 1973. – 900 с.
10. *Ли. Р.* Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. – М.: Наука, 1966. – 176 с.
11. *Бендат Дж., Пирсол А.* Измерение и анализ случайных процессов. – М.: Мир, 1974. – 464 с.
12. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. – М.: Мир, 1977. – 650 с.
13. *Дж. Медич.* Статистически оптимальные линейные оценки и управление. / Пер. с англ. под ред. А. С. Шаталова. – М.: Энергия, 1973. – 440 с.
14. *Кузнецов Д. Ф.* Численное моделирование стохастических дифференциальных уравнений и стохастических интегралов. – СПб.: Наука, 1999. – 458 с.
15. *Розанов Ю. А.* Случайные процессы. Краткий курс. – М.: Наука. 1971. – 385 с.
16. *Ивановский Р. И., Шарыхин В. В.* Генерация стационарных векторных случайных последовательностей // Изв. вузов. Сер. Приборостроение. 1990. № 8. С. 11–15.
17. *Ивановский Р. И.* Компьютерные технологии в науке и образовании. Практика применения систем Mathcad: Учеб. пособие. – М: Высшая школа, 2003. – 432 с.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика. – М.: Финансы и статистика. 1983.

Боровков А. А. Курс теории вероятности. – М., Наука, 1972.

Боровков А. А. Математическая статистика. Дополнительные главы. – М.: Наука, 1984.

- Боровков А. А. Математическая статистика: Оценка параметров. Проверка гипотез. – М.: Наука, 1984.
- Булдинский А. В., Ширяев А. Н. Теория случайных процессов. – М.: Физматлит, 2003.
- Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория вероятностей. Задачи и упражнения. – М.: Наука, 1969.
- Гнеденко Б. В. Курс теории вероятности. – М.: ГИТТЛ, 1954.
- Гурский Е. И. Теория вероятностей с элементами математической статистики. – М.: Высшая школа, 1971.
- Захаров В. К., Севастьянов В. А., Чистяков В. Н. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1983.
- Иванова В. М. и др. Математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1982.
- Ивченко Г. И., Медведев Ю. Н. Математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1984.
- Кибзун А. И. и др. Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами: Учеб. пособие. – М.: Физматлит, 2002.
- Климов Г. П. Стохастические системы обслуживания. – М.: Наука, 1966.
- Климов Г. П. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: МГУ, 1983.
- Коваленко И. Н., Филиппова А. А. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1982.
- Лозе М. Теория вероятностей – М.: ИЛ, 1962.
- Мешалкин Л. Д. Сборник задач по теории вероятностей. – М.: МГУ, 1963.
- Миллер Б. М., Панков А. Р. Теория случайных процессов в примерах и задачах. – М.: Физматлит, 2002.
- Невё Ж. Математические основы теории вероятностей. – М.: Мир, 1969.
- Прохоров А. В., Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г. Задачи по теории вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. – М.: Наука, 1986.
- Пугачев В. С. Введение в теорию вероятностей. – М.: Наука, 1968.
- Пугачев В. С. Теория вероятностей и математическая статистика. 2-е изд., испр. и доп. – М.: Физматлит, 2002.
- Розанов Ю. А. Случайные процессы. – М.: Наука, 1971.
- Розанов Ю. А. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1982.
- Розанов Ю. А. Лекции по теории вероятностей. – М.: Наука, 1988.
- Розанов Ю. А. Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика. – М.: Наука, 1989 (2-е изд.).
- Ротарь В. И. Теория вероятностей. – М.: Высшая школа, 1994.
- Севастьянов В. А. Курс теории вероятностей и математической статистики. – М.: Наука, 1982.
- Севастьянов В. А., Чистяков В. П., Зубков А. М. Сборник задач по теории вероятностей. – М.: Наука, 1980.
- Солодовников А. С. Теория вероятностей. – М.: Просвещение, 1983.
- Уиттл П. Вероятность. – М.: Наука, 1982.
- Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. I, Т. II, – М.: Мир, 1967 Физматлит, 1970.
- Чистяков В. П. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1987.
- Ширяев А. Н. Вероятность. – М.: Наука, 1980.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Алгебра событий 19

В

Вариационный ряд 229

Векторная случайная функция (ВСФ):

ковариационная матрица ВСФ 192

линейные формы ВСФ 195

математическое ожидание ВСФ 192

Векторные случайные величины
(ВСВ) 129

дискретные ВСВ 130

ковариационная матрица 143, 150

линейные преобразования ВСВ 158

математическое ожидание ВСВ 147

непрерывные ВСВ 137

плотность распределения

непрерывной ВСВ 137

функция распределения ВСВ 134

числовые характеристики ВСВ 142

Вероятность:

аксиоматический подход 20

геометрический подход 23

классический подход 21

статистический подход 21

Выборка 227

свойства 228

Выборочная дисперсия 234, 247

распределение 249

Выборочная ковариационная
матрица 441

Выборочное СКО 234

Выборочная совокупность 227

Выборочное среднее 233, 245

распределение при известной
дисперсии 249

распределение при неизвестной
дисперсии 250

Выборочный момент 233, 234, 251

Г

Гистограмма 237

Группированный статистический
ряд 230

Д

Действия над событиями:

дополнение 17

объединение 17

пересечение 17

разность 17

свойства 18

Доверительная вероятность 269

Доверительный интервал 269

З

Задача регрессии 365

алгоритм МНК (обобщенное
обращение матрицы) 368

доверительные интервалы 398

метод наименьших квадратов
(МНК) 368

множественная линейная
регрессия 380

нелинейная регрессия 403

остаточная дисперсия 373

остаточная сумма квадратов 369

проблема адекватности 393

рекуррентный алгоритм
МНК 383, 387, 389

символьное решение 479

Законы распределения:

биномиальный 104

Вейбулла 504

гамма-распределение 501

геометрический 112

двумерный нормальный 174

композиция законов 182

Коши 506

логнормальное 507

многомерный нормальный 173

нормальный 95

показательный 102

Пуассона 107

равномерный 93

распределение Стьюдента
(*t*-распределение) 495

распределение функции одного
случайного аргумента 114
распределение хи-квадрат 493
Рэля 505
условные 164
Фишера (F -распределение) 497
Эрланга 503

И

Имитация случайного
воздействия (СВ) 118
Интервальная оценка:
дисперсии 280
дисперсии асимптотическая 282
математического ожидания 272, 285
математического ожидания
асимптотическая 278
отношения двух дисперсий 288
разности двух математических
ожиданий 290
Испытания:
асимптотические приближения в
схемах испытаний 53
композиция независимых
испытаний 38
независимые 38
схема испытаний Бернулли 39
схема испытаний Пуассона 46

К

Корень из матрицы 514
алгоритм Холецкого 514
альтернативный алгоритм 518
Корреляционная функция 190
Корреляционное отношение 417
интервальная оценка 436
свойства 419
точечная оценка 434
Корреляционный момент 152
Коэффициент корреляции 153, 414
выборочный 422
выборочный (интервальная
оценка) 427
выборочный (свойства) 422
Критерий значимости 295

М

Матрица коэффициентов

корреляции 415
Моменты распределения СВ 81
начальные 82
центральные 82

Н

Неравенство:
Рао-Крамера 266
Чебышева 121
Нормировка случайного вектора 514

О

Оценка:
интервальная 269
несмещенная 244
состоятельная 245
точечная 244
эффективная 244

П

Плотность распределения 65
Полная группа событий 19
Проверка однородности выборок:
критерий знаков 362
критерий Смирнова 358
критерий Уилкокса 361
критерий хи-квадрат 354
Простейший поток 110, 472

С

Сводный коэффициент
корреляции 446
выборочный 448
интервальная оценка 460
точечная оценка 448
Сложение вероятностей 28
Случайная величина (СВ) 61
дискретная 62
непрерывная 65
Случайная функция (СФ) 187
векторная (ВСФ) 192
дисперсия СФ 190
интеграл СФ 483
математическое ожидание СФ 189
производная СФ 482
сечение СФ 187
стационарная СФ 198

Случайный процесс 205
 винеровский 490
 ковариационное уравнение 211
 марковский 487
 с независимыми
 приращениями 489
 типа белого шума 205
 События:
 достоверные 16
 независимые 30
 несовместные 17
 сложные 16
 элементарные 15
 Спектральная плотность СФ 201
 Статистическая гипотеза 294
 критерий Вальда 313
 критерий Колмогорова 342
 критерий омега-квадрат 346
 критерий хи-квадрат 332
 ошибки первого и второго рода 301
 проверка однородности
 выборок 354
 проверка по критерию
 Неймана—Пирсона 308
 этапы проверки 297
 Статистический ряд 229
 группированный 230
 Сходимость по вероятности 120

Т

Теорема:
 Бернулли 123
 Лапласа интегральная 58
 Муавра—Лапласа 57
 центральная предельная 127
 Чебышева 124
 Точечная оценка:
 метод моментов 254
 метод МП 257

У

Уравнения Колмогорова 473
 операторный метод решения 474
 преобразование 476
 Уровень значимости 270
 Условная вероятность 33
 Условная дисперсия 169
 Условное математическое

ожидание 167

Ф

Формирующий фильтр 222
 Формула:
 Байеса 36
 Бернулли 40
 полного математического
 ожидания 167
 полной вероятности 35
 Пуассона 54
 Функция:
 правдоподобия 257, 258, 260
 распределения СВ 61
 регрессии 168
 Функция распределения:
 выборочная 231
 дискретной СВ 63
 непрерывной СВ 66

Х

Характеристические и производящие
 функции 87

Ч

Частный коэффициент
 корреляции 451
 выборочный 455
 интервальная оценка 463
 точечная оценка
 (альтернативный подход) 456
 точечная оценка по Крамеру 456
 Числовые характеристики СВ 70
 асимметрия 80
 дисперсия 77
 квантиль 73
 математическое ожидание 71, 72
 эксцесс 80

Э

Эллипс рассеивания 177